

CONDICIONES DE CONTORNO DE FLUJOS TOTALMENTE DESARROLLADOS PARA EL MÉTODO DE LATTICE BOLTZMANN

Javier A. Dottori^{a,b}, Gustavo A. Boroni^{a,b}, Marcos G. Lazo^{a,b}, Cristian D. García Bauza^{a,b}
and Alejandro Clause^{a,b,c}

^aPLADEMA -Universidad Nacional del Centro de la Pcia. de Buenos Aires, 7000 Tandil, Argentina

^bCONICET, Argentina

^cCNEA – Libertador 8250, Buenos Aires, Argentina

Keywords: Lattice-Boltzmann, Simulación, Perfil desarrollado, Entropía, Fluidos, Condiciones de contorno.

Abstract. El método de Lattice Boltzmann (LBM) es un esquema numérico, que opera en un espacio de variables discretas vectoriales internas con más grados de libertad que las estrictamente necesarias para representar un flujo a nivel macroscópico. Para contraer la solución a las variables observables se utiliza una función de cierre, llamada ecuación de equilibrio, que asegura una aproximación a segundo grado de las ecuaciones de transporte correspondientes. En particular, el modelo de Bhatnagar-Gross-Krook (BGK) permite simular las ecuaciones de Navier-Stokes. Sin embargo, las condiciones de contorno requieren especial cuidado para conservar el orden de convergencia y disminuir el error del método.

En este trabajo se presenta un estudio del tratamiento de las condiciones de contorno de LBM a la salida de un flujo totalmente desarrollado. Se analizan los métodos más utilizados y se propone una solución basada en la maximización de la entropía. Luego de realizar tres estudios numéricos sobre canales rectos con y sin fuerza transversal, se concluyó que la solución propuesta permite obtener mejores resultados sobre las variables macroscópicas observadas en problemas de flujos desarrollados. De esta manera, se pueden realizar experimentos con canales de menor longitud, lo cual se traduce en menor costo de memoria y tiempo de procesamiento.

1 INTRODUCCIÓN

El método de Lattice Boltzmann (LBM) es un método numérico basado en teoría de la cinética que permite la simulación de un amplio espectro de problemas de transporte. El método utiliza un espacio de variables discretas vectoriales internas en cada celda de la grilla espacial, lo cual lleva a expandir los grados de libertad más allá de los estrictamente necesarios para representar el nivel macroscópico (e.g., un escalar densidad y un vector velocidad). Para contraer la solución a las variables macroscópicas observables se utiliza una función de cierre, llamada ecuación de equilibrio, que asegura una aproximación a segundo grado de las ecuaciones de transporte correspondientes.

En comparación con otros métodos numéricos, las características cinéticas de LBM le permiten ser más efectivo para simular flujos complejos, siendo ideal para cálculo en paralelo, donde las condiciones de contorno (CC) complejas en principio pueden ser formuladas en términos de reglas mecánicas elementales. Sin embargo, las CC requieren especial cuidado para conservar el orden de convergencia y evitar la introducción de artefactos numéricos en los bordes. En el presente trabajo se estudió el tratamiento de CC en bordes abiertos, especialmente la salida de flujos totalmente desarrollados. Los tratamientos de CC en bordes abiertos pueden clasificarse en cuatro categorías: esquema heurístico, esquema dinámico, esquema de extrapolación y esquema de tratamiento de contorno curvo. Por ejemplo, Skordos (1993) sugiere relacionar las variables internas (función distribución) en los contornos con gradientes de la velocidad y densidad. Inamuro et al. (1995) propone que la función de distribución en el contorno se calcule a partir de la función de distribución de equilibrio modificada. Maier et al. (1996) utilizan distintas relaciones para contornos de velocidad y presión. En el presente trabajo se estudió el tratamiento de las condiciones de contorno a la salida de un flujo totalmente desarrollado. Se analizan los métodos más utilizados y se propone una solución basada en la maximización de la entropía.

2 MÉTODO DE LATTICE-BOLTZMANN

LBM puede ser interpretado como un modelo cinemático mesoscópico con una variable velocidad interna y discreta, cuyas magnitudes promedios corresponden a un campo de ecuaciones macroscópicas (Chen y Doolen, 1998). El método se ejecuta sobre una grilla regular o lattice y representa el fluido mediante un conjunto de partículas que se mueven entre las celdas de la grilla. El modelo más común para simulaciones 2D es D2Q9 (Sukop y Thorne, 2006), el cual utiliza una lattice cuadrada con 9 direcciones de velocidad (Fig. 1). En este trabajo, se utiliza la regla de colisión de Bhatnagar-Gross-Krook (BGK) para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos viscosos en 2D (Bhatnagar, Gross, Krook, 1954), (Chen et al., 1991), (Qian et al. 1992). Consideremos la población de partículas $f_\alpha(x, t)$ con velocidad e_α , entonces, la regla básica de actualización LBM es:

$$f_\alpha(x + e_\alpha \delta_t, t + \delta_t) = f_\alpha(x, t) + \frac{1}{\tau} \left[f_\alpha^{(0)}(x, t) - f_\alpha(x, t) \right] \quad (1)$$

donde $f_\alpha^{(0)}(x, t)$ es la función distribución de equilibrio, δ_t es el incremento de tiempo, y es el parámetro de relajación.

En el modelo D2Q9, el índice α representa nueve direcciones distintas (Figura 1).

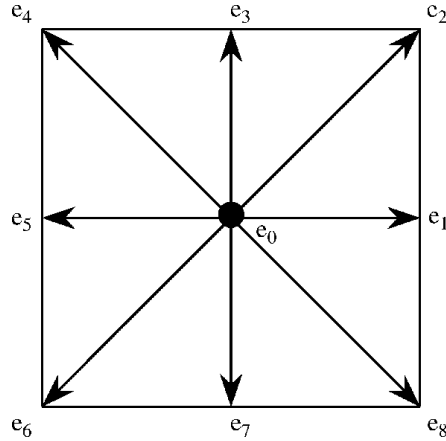


Figura 1. Espacio interno de velocidades del modelo D2Q9

Para simular las ecuaciones de Navier-Stokes, BGK utiliza las siguientes funciones de equilibrio (Chen y Doolen, 1998):

$$f_{\alpha}^{(0)} = w_{\alpha} \rho \left[1 + \frac{3}{e^2} (e_{\alpha} \cdot u) + \frac{9}{2e^4} (e_{\alpha} \cdot u)^2 - \frac{3}{2e^2} u \cdot u \right] \quad (2)$$

donde $w_0 = \frac{4}{9}$; $w_{\alpha} = \frac{1}{9}$, $\alpha = 1, 3, 5, 7$; y $w_{\alpha} = \frac{1}{36}$, $\alpha = 2, 4, 6, 8$, y $e = \delta_x / \delta_t$ es la velocidad característica de la lattice y

$$\rho = \sum_{\alpha} f_{\alpha}, \quad \rho u = \sum_{\alpha} f_{\alpha} e_{\alpha} \quad (3)$$

son la densidad macroscópica y la cantidad de movimiento respectivamente. La viscosidad del fluido puede ser controlada mediante el parámetro de relajación τ , según:

$$\nu = \left[\frac{(2\tau - 1)}{6} \right] e^2 \delta_t \quad (4)$$

Para problemas con fuerzas externas, el siguiente término es agregado a la parte derecha de la Ec. (2).

$$f_{\alpha}(x + e_{\alpha} \delta_t, t + \delta_t) = f_{\alpha}(x, t) + \frac{1}{\tau} \left[f_{\alpha}^{(0)}(x, t) - f_{\alpha}(x, t) \right] + \delta_t g_{\alpha}(x, t) \quad (5)$$

donde $g_{\alpha}(x, t)$ representa el cambio en las funciones de distribución debido a la fuerza externa $F(x, t)$ definido según

$$g_{\alpha}(x, t) = - \frac{w_{\alpha} \rho [e_{\alpha} \cdot F(x, t)]}{e^2} \quad (6)$$

3 FLUJO TOTALMENTE DESARROLLADO

En la frontera del dominio espacial, la Ec. (1) no puede calcularse porque la ecuación requiere valores de variables fuera del dominio. En general estas variables desconocidas se determinan en función de propiedades macroscópicas en la zona fronteriza. Sin embargo, como el esquema LBM tiene más grados de libertad que la descripción macroscópica, es necesario introducir información adicional que suele expresarse con una relación entre las componentes de la función distribución. Esta relación no es trivial ya que afecta la precisión del método y la convergencia sobre todo el dominio (Latt y Chopard, 2008).

En particular, para fronteras abiertas, es común argumentar que la manera sencilla de modelar CC es extrapolar la función de distribución. Sin embargo, estas fronteras pueden traer errores considerables a menos que el área computacional sea lo suficientemente grande. La solución común entonces es trabajar con un canal suficientemente largo y tomar la solución solamente en la zona que no está afectada por los errores introducidos en la salida. Claramente esto puede ser demasiado costoso computacionalmente, por lo cual es de interés el desarrollo de CC eficientes.

En este trabajo se supondrá el caso de un flujo en sentido horizontal según se observa en la Figura 2 sin entrar por ello en pérdida de generalidad. En el extremo izquierdo del dominio, las variables f_α para $\alpha=4,5,6$ son indeterminadas. Se desea desarrollar un método de frontera que suponga un canal infinito para el perfil desarrollado.

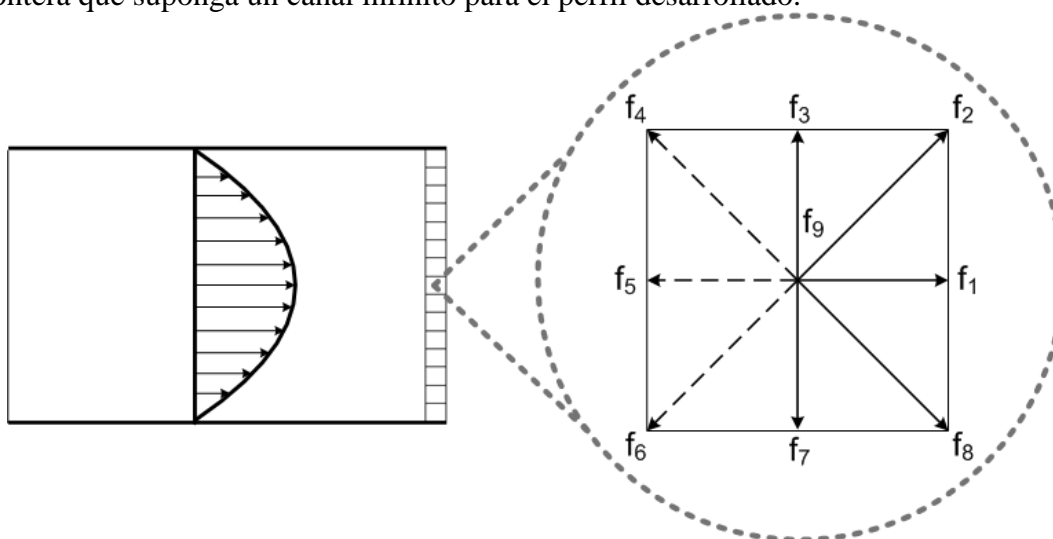


Figura 2. Esquema de velocidades en una celda de salida. Con líneas punteadas se indican las incógnitas

Latt y Chopard (2008) hacen una revisión de los diferentes métodos para CC de velocidad y los clasifican en dos clases: aquellos que se calculan sólo las f_α incógnitas, y aquellos que una vez conocidas las variables macroscópicas utilizan las mismas para reemplazar todas las f_i con el valor según la ecuación de equilibrio, Ec (2). Los métodos más populares para CC de flujo desarrollado consisten en la interpolación de las variables de distribución, o en imponer $\nabla u_x = 0$ y $u_y = 0$, obteniendo así una CC de Dirichlet sobre la velocidad que se puede aplicar según diferentes métodos.

Tong et al. (2007) realizan un estudio de los métodos más utilizados para obtener un perfil desarrollado, concluyendo que el error por compresibilidad es la principal fuente de error. En este trabajo se presenta un estudio similar al descrito por Tong et al. (2007), incorporando en

el análisis comparativo la solución propuesta.

A continuación se describen dichos métodos.

3.1 Método 1 (M1)

Este método es el más simple y por lo tanto muy utilizado. Consiste simplemente en aproximar las variables de la función de distribución faltantes como la misma variable de la celda inmediatamente anterior. Por lo tanto se tiene (Succi et al., 2001)

$$f_{\alpha}(N_x, y) = f_{\alpha}(N_x - 1, y) \quad ; \quad \alpha = 4, 5, 6 \quad (7)$$

donde se tomó como dirección del flujo a la salida la dirección x .

3.2 Método 2 (M2)

En este método (Yu et al., 2005) se supone que la variación de la función de distribución en la dirección del flujo a la salida es constante, por lo que propone una interpolación lineal de f_{α} , esto es:

$$f_{\alpha}(N_x, y) = 2f_{\alpha}(N_x - 1, y) - f_{\alpha}(N_x - 2, y) \quad ; \quad \alpha = 4, 5, 6 \quad (8)$$

Este método es muy inestable ya que pueden resultar valores negativos si la variación entre las celdas utilizadas es muy grande.

3.3 Método 3 (M3)

Este método utiliza las variables macroscópicas para calcular la función distribución. Se aplican las siguientes condiciones de contorno sobre la velocidad a la salida:

$$\begin{aligned} u_x(N_x, y) &= u_x(N_x - 1, y) \\ u_y(N_x, y) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Para cualquier CC de este tipo, por consistencia entre las Ec. (3) se obtiene que:

$$\rho = \frac{1}{1+u} \left(\sum_{\alpha=0,3,7} f_{\alpha} + 2 \sum_{\alpha=4,5,6} f_{\alpha} \right) \quad (10)$$

donde $u = \|u\|$. Dado que hay solamente dos ecuaciones para determinar tres variables, es necesario agregar alguna relación adicional. En este trabajo se consideró el método propuesto por Zou y He (1997) que resulta:

$$\begin{aligned} f_5 &= f_1 - \frac{2}{3} \rho u \\ f_4 &= f_8 - \frac{1}{6} \rho u - \frac{1}{2} (f_3 - f_7) \\ f_6 &= f_2 - \frac{1}{6} \rho u + \frac{1}{2} (f_3 - f_7) \end{aligned} \quad (11)$$

las cuales se obtienen de suponer el rebote de la función de no-equilibrio en el sentido del flujo

$$f_1 - f_1^{(0)} = f_5 - f_5^{(0)} \quad (12)$$

3.4 Método 4 (M4)

En [Tong et al. \(2007\)](#) se propone mantener constante el flujo de masa entre el perfil de entrada y salida para reducir el error por compresibilidad. En este caso

$$\begin{aligned} u_x(N_x, y) &= \sigma u_x(N_x - 1, y) \\ u_y(N_x, y) &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

donde σ es el factor de corrección de flujo de masa, y para BGK incompresible puede calcularse como

$$\sigma = \frac{\sum_j \rho(1, j) u(1, j) \delta_y}{\sum_j \rho(nx, j) u(nx - 1, j) \delta_y} \quad (14)$$

En este trabajo se utiliza el método BGK compresible, por lo que el problema de compresibilidad se puede interpretar como un aumento de la velocidad contra una disminución de la presión, de forma que se conserva el flujo de masa. Es por esto, que el método fue adaptado a BGK compresible buscando conservar la integral de velocidad. Esto es

$$\sigma = \frac{\sum_j u(1, j) \delta_y}{\sum_j u(nx - 1, j) \delta_y} \quad (15)$$

En su propuesta, los autores no detallan la elección de la presión, ya que puede suponerse constante en los casos de estudio utilizados. Dado que esta suposición no es válida para canales con fuerzas transversales, en este trabajo se calcula ρ con la Ec. (10). Una vez calculadas las variables macroscópicas se utiliza Ec. (2) para calcular las funciones de distribución de toda la celda de salida, considerando el equilibrio de la celda individual y no del sistema total.

Durante las primeras iteraciones, a fijarse el perfil de velocidades en la entrada, y comenzar el fluido en reposo a la salida, los valores de σ son muy grandes, y luego convergen a 1. Los valores iniciales en algunos casos causan inestabilidades por crear grandes diferencias en el campo de velocidad, por esto para los estudios utilizados σ se acotó a $|\sigma| \in [0.99, 1.01]$.

Cabe señalar que el método propuesto por Tong presenta como ventaja una convergencia acelerada, dado que el flujo se ve impulsado desde la entrada y desde la salida simultáneamente. σ converge a 1 en el estado estacionario, por lo que la cota aplicada solo afecta la evolución inicial, pero no el estado estacionario.

3.5 Método 5 (M5)

La Ec. (2) surge de la distribución de equilibrio que maximiza la entropía de la distribución de partículas en una celda para un ρ y u determinados ([Ansumali et al., 2003](#)). En efecto, la entropía de una celda se calcula como:

$$H = -\sum_{\alpha} f_{\alpha} \log \left(\frac{f_{\alpha}}{w_{\alpha}} \right) \quad (16)$$

Maximizando H se obtiene una ecuación para la distribución de equilibrio definida positiva. La expansión de Taylor en segundo orden de dicha ecuación resulta en el operador de

colisión BGK (Ec. (2)).

Por otra parte, el término $g_\alpha(x, t)$ de la Ec. (5) introduce un cambio en la velocidad de cada celda debido a la acción de una fuerza externa. En el estado estacionario, en cada celda existen dos velocidades observables, una antes y otra después de la aplicación de dicho término. Según el método de fuerzas aplicado dependerá cuál de estos valores representa la magnitud física. Esto puede implicar que en flujos con fuerzas externas la condición $u_y = 0$ sea inconsistente.

A partir de estas consideraciones se desarrolló un método que permite aumentar la precisión de los cálculos, incluso en canales con fuerzas transversales aplicadas. El método parte primeramente de condiciones de derivada nula en ambas componentes de la velocidad, lo cual es consistente con un flujo completamente desarrollado; esto es:

$$\begin{aligned} u_x(N_x, y) &= \sigma u_x(N_x - 1, y) \\ u_y(N_x, y) &= u_y(N_x - 1, y) \end{aligned} \quad (17)$$

Al igual que en el método 3, ρ se obtiene según la Ec. (10).

Luego se calculan f_4 , f_5 y f_6 de forma que maximicen H , resultando:

$$\begin{aligned} f_4 &= \alpha - \frac{f_5}{2} \\ f_6 &= \beta - \frac{f_5}{2} \\ f_5 &= \frac{4\left(\alpha + \beta \pm \sqrt{(-\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta}\right)}{3} \end{aligned} \quad (18)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{-\rho u_x + \rho u_y + 2f_8 + f_1 - f_3 + f_7}{2} \\ \beta &= \frac{-\rho u_x - \rho u_y + 2f_2 + f_1 + f_3 - f_7}{2} \end{aligned} \quad (19)$$

4 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Para analizar la precisión del método propuesto, se realizaron experimentos numéricos de canales 2D. Se utilizaron canales rectangulares con velocidad nula en los bordes laterales y velocidad de entrada constante $u_{in} = 0.01e$. En dichos experimentos se realizaron comparaciones sobre los estados estacionarios, considerando la condición de corte:

$$tol = \max(\|u_{new} - u_{old}\|) < 10^{-7} \quad (20)$$

En todos los casos se fijó $\tau = 0.6$, aunque se obtienen resultados similares para τ mayores.

En estado estacionario con salida desarrollada del flujo existe una solución analítica para el perfil de velocidades de salida (parábola de Poiseuille), que toma un valor máximo $1.5u_{in}$. El gradiente de presiones es en la dirección del flujo cuando la fuerza externa es nula, $F = 0$, caso contrario tomará valores diagonales dependientes de u_{in} y F .

4.1 Convergencia en un flujo de Poiseuille

Como primer experimento se presenta una evaluación empírica de la convergencia a partir de los métodos mencionados en la sección 4. Se utilizaron grillas rectangulares de $6R\delta_x \times R\delta_x$ para asegurar que el perfil de velocidades a la salida se encuentre desarrollado en el estado estacionario. R indica la resolución de grilla. El error en el perfil de salida se mide según la máxima diferencia respecto a la velocidad máxima:

$$error = \max \left(\frac{\|u(x) - u_a(x)\|}{1.5u_{in}} \right) \quad (21)$$

donde $u_a(x)$ corresponde al valor analítico de la parábola de Poiseuille y el máximo se calcula sólo sobre el perfil de salida. En la [Figura 3](#) se muestra la relación entre el error y la resolución de la grilla. En la misma se observa que M1 y M4 presentan una menor convergencia para escalas pequeñas, mientras que los restantes métodos tienen una convergencia similar. La ventaja de M3 frente a M4 se debe a la suposición de colocar las celdas en equilibrio como se estudió en [Latt y Chopard \(2008\)](#). Por último, para el método propuesto los resultados son satisfactorios y están dentro de los mejores resultados obtenidos. Cabe señalar que los factores de corrección por error de compresibilidad son despreciables y no existen fuerzas que afecten al resultado.

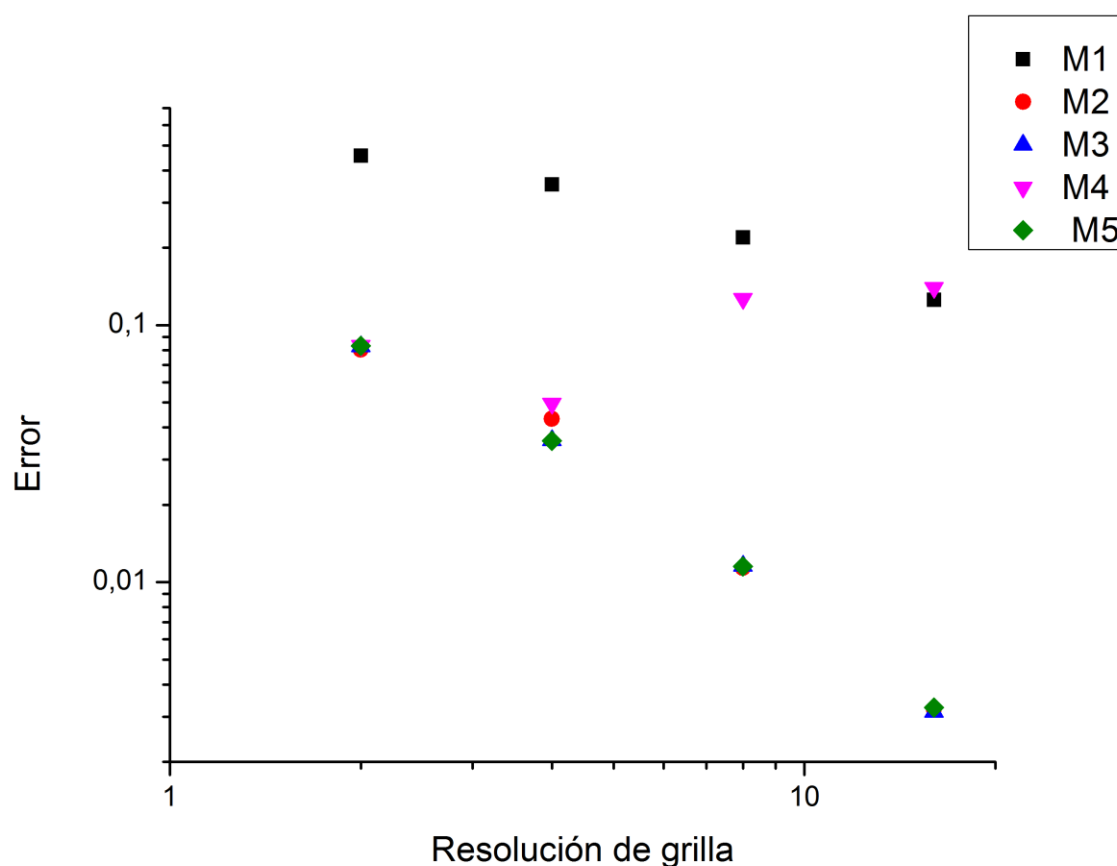


Figura 3. Dependencia del error respecto del tamaño del canal en un flujo de Poiseuille manteniendo la relación de aspecto.

4.2 Error en un flujo de Poiseuille

En este caso se estudió el error introducido por cada uno de los métodos, considerando una simulación de referencia de un flujo de Poiseuille en un canal de $500\delta_x \times 50\delta_x$ aplicando M4 (el método más apropiado conocido previamente). En la [Figura 4](#) se muestran las líneas de flujo obtenidas con el método de referencia, donde se observa que la longitud de desarrollo es aproximadamente de $70\delta_x$. Posteriormente se realizaron simulaciones similares para distintas longitudes del canal, manteniendo constantes los restantes parámetros. Al cambiar la relación de aspecto, esto es equivalente a simular un canal infinitamente largo, utilizando diferentes largos de simulación, ya que se mantiene δ_x constante. Para cada caso se calculó el error según:

$$error = \max\left(\|u(x) - u_{ref}(x)\|\right) \quad (22)$$

donde $u_{ref}(x)$ representa la velocidad en cada celda del canal de referencia de longitud $500\delta_x \times 50\delta_x$, y el máximo se calcula sobre todo el dominio.

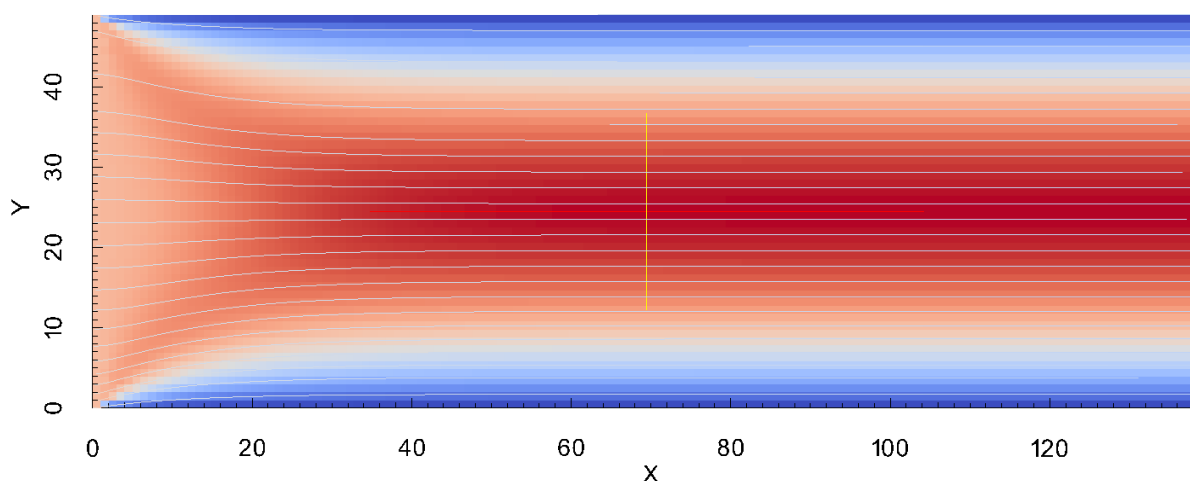


Figura 4. Líneas de flujo del experimento base.

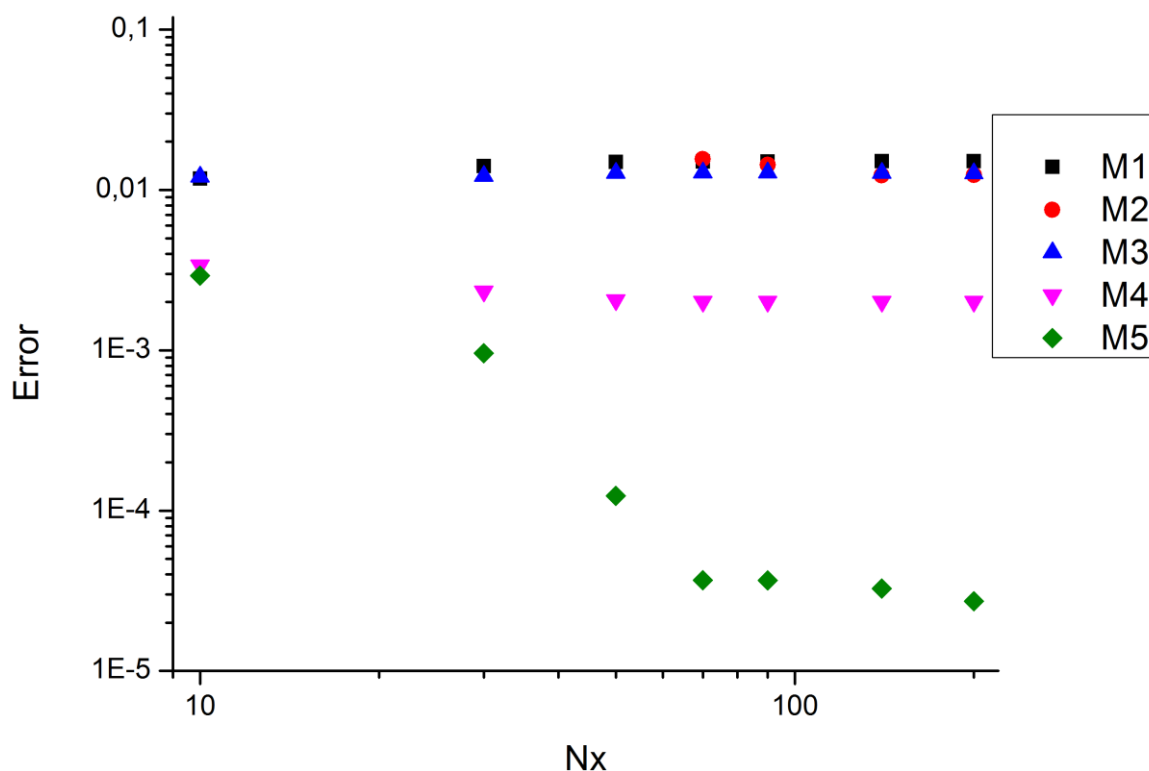


Figura 5. Error en función de la longitud del canal expresada en número de celdas.

En la [Figura 5](#) se observan los errores obtenidos para cada método. Con M2 no se pueden simular canales de longitud menor a $30\delta_x$ debido a inestabilidades numéricas, pero el error decrece más rápidamente que los otros métodos al aumentar la longitud del canal (aunque nunca alcanza a M5).

En todo el rango estudiado el método propuesto (M5) es el que tiene menor error. En cuanto al M4 cabe aclarar que los errores máximos se presentan en las últimas celdas del canal. En el resto del canal el error disminuye, obteniéndose mapas de error similares a los presentados en el siguiente caso de estudio.

Finalmente se puede ver que los mejores resultados al disminuir la longitud del canal los presenta M5, incluso siendo que el M4 es el de referencia. La condición de máxima entropía parece hacer al método invariante respecto al largo del canal, luego de ser superada la longitud de desarrollo necesaria.

4.3 Flujo en un canal con fuerza transversal

Para estudiar el comportamiento de cada método frente a fuerzas transversales, se desarrolló el caso de un canal igual al anterior, pero incluyendo una componente de fuerza transversal al flujo, $F(x,t) = (0, G)$. Luego de evaluar su efecto, se obtuvo que considerar valores de $G = 5.2 \times 10^{-05} \delta_x / \delta_t^2$ es suficiente para distinguir diferencias entre los resultados de los distintos métodos. En la [Figura 6](#) se muestran las líneas de corriente obtenidas para M4. Se observa que inicialmente dichas líneas se inclinan hacia arriba hasta que la presión sobre el

borde superior compensa la fuerza tangencial. Luego se desarrolla una parábola similar al caso sin fuerza (Poiseuille).

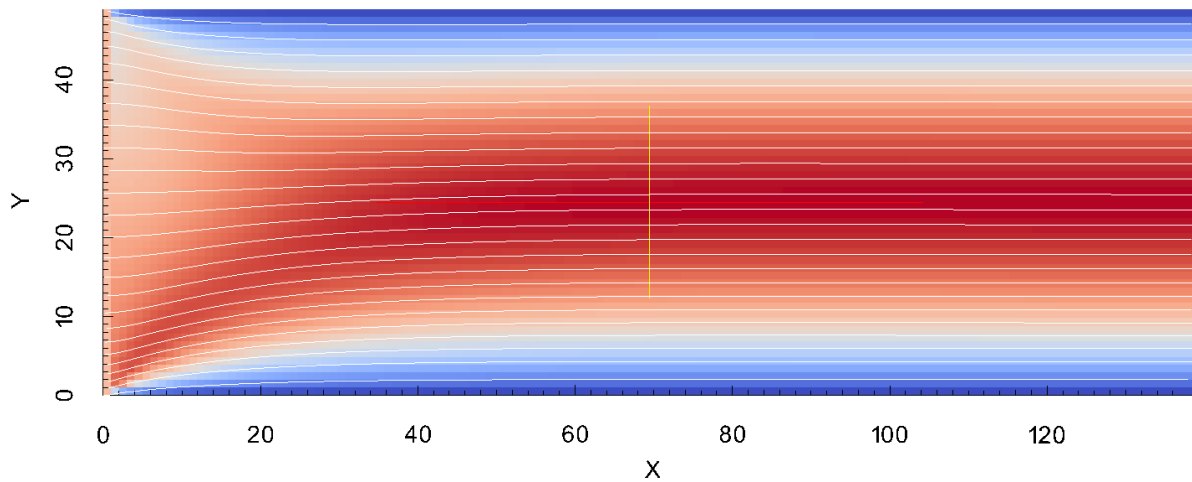


Figura 6. Líneas de flujo del canal con una fuerza transversal.

En la Figura 7 se muestran los resultados del error según la Ec. (22). Se observa que M2 presenta inestabilidades para canales de largo inferior a $70\delta_x$ (largo de desarrollo de flujo). También se puede ver que el método propuesto minimiza el error en todos los casos. Dicho error se mantiene constante en M1, M2, M3 y M4, mientras que el método propuesto presenta el mismo comportamiento que el caso sin fuerzas transversales.

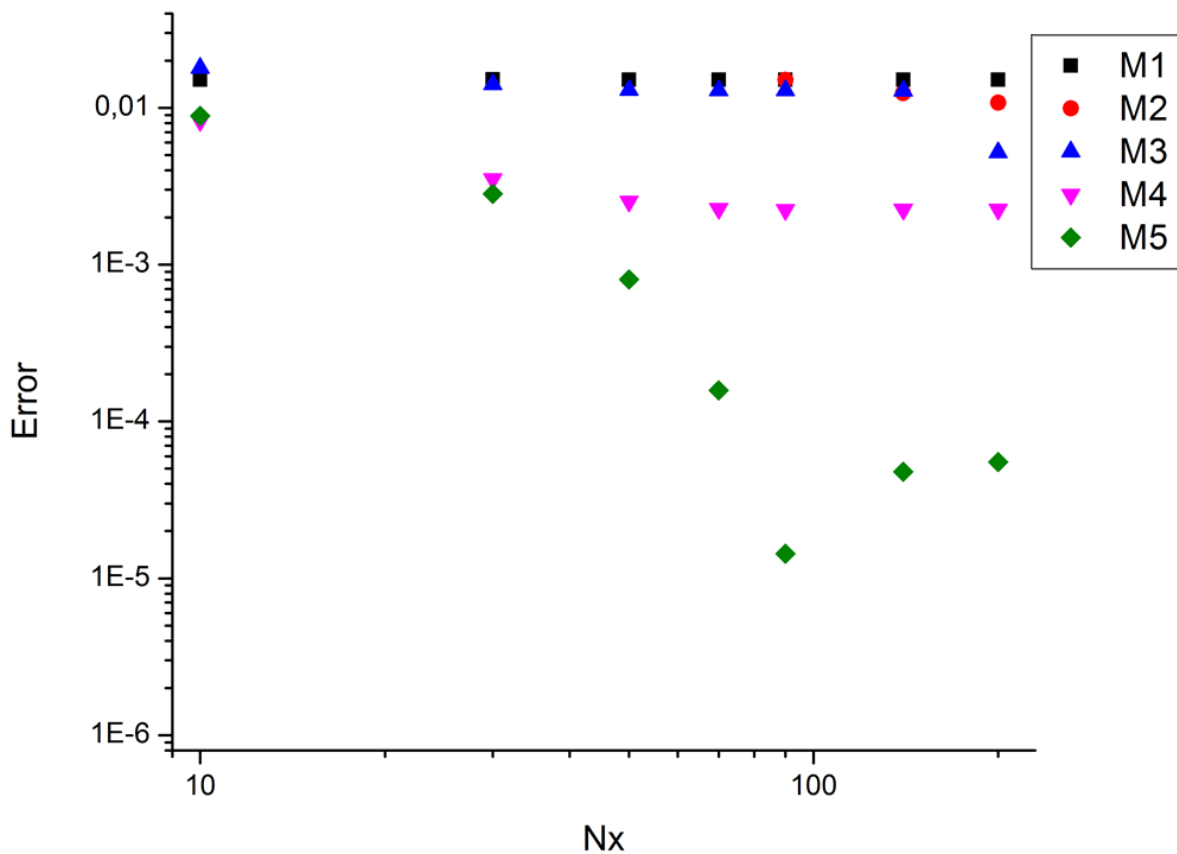


Figura 7. Error respecto de una simulación con un canal más largo utilizando una fuerza transversal.

En la [Figura 8](#) se muestra un mapa de error por celda. Los métodos M1, M2 y M3 introducen un error significativo en todo el dominio, mientras que M4 sólo lo hace en la salida del canal. Esto se debe a que en M1, M2 y M3 aparece ruido por compresibilidad tal como fue analizado en [Tong et al. \(2007\)](#), mientras que en M4 las suposiciones de equilibrio para cada celda y la velocidad tangencial nula no se condicionan a la presencia de fuerzas transversales. A partir de este análisis, se observa que para utilizar este método es necesario descartar el último fragmento de canal, manteniendo así acotado el error pero teniendo mayor costo en el uso de memoria y tiempo de cómputo. En cambio, el método propuesto (M5) presenta un mejor resultado sobre todo el dominio para las distintas configuraciones, siendo independiente de la longitud del canal una vez pasada la longitud de desarrollo.

5 CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó un análisis para diferentes condiciones de salida de flujos desarrollados en dominios bidimensionales para simulaciones de fluidos con LBM. Adicionalmente, se presentó un método propio basado en maximización de entropía y contemplando la existencia de fuerzas transversales.

En las pruebas realizadas, se observó que la mayoría de los métodos existentes introducen error numérico al aplicar una fuerza de gravedad transversal al flujo. El método propuesto permite minimizar este error, siendo invariante a la longitud del canal una vez desarrollado el flujo. Esto permite utilizar canales con menor longitud, lo cual se traduce en menor costo de memoria y tiempo de procesamiento.

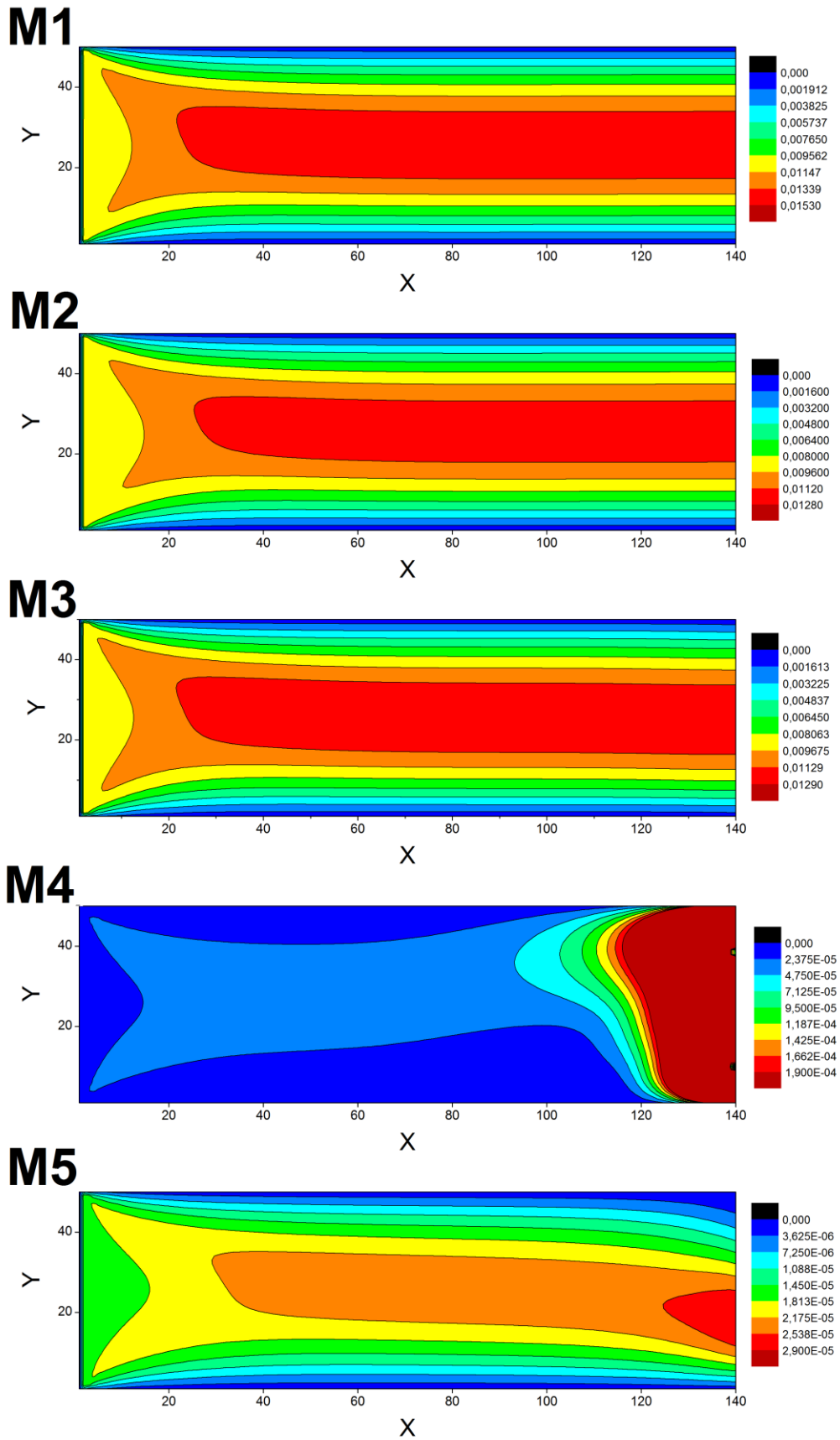


Figura 8. Mapa de error para cada método.

Como trabajo futuro se realizarán dos nuevos estudios: en primer lugar se desarrollará una solución analítica para el caso de canales con gravedad transversal, la cual permitirá obtener una mejor apreciación sobre la medida del error, y en segundo lugar se estudiará la factibilidad del método para casos en tres dimensiones.

REFERENCIAS

- Ansumali S., Karlin I. V., and Ottinger H. C., Minimal entropic kinetic models for hydrodynamics. *EuroPhysics Letters*, 63(6):798–804, 2003.
- Bhatnagar P., Gross E., Krook M., A model for collisional processes in gases: small amplitude processes in charged and neutral one-component system, *Physical Review* 94(3):511-525, 1954.
- Chen, S. and Doolen G. D., Lattice Boltzmann Method for Fluid Flows. *Annual Reviews Fluid Mechanics* 30:329-364, 1998.
- Chen S., Chen H., Martínez D., Matthaeus W., Lattice Boltzmann model for simulation of magnetohydrodynamics, *Physical Review Letters* 67(27):3776–3779, 1991.
- Inamuro T., Yoshino M. and Ogino F., A non-slip boundary condition for lattice Boltzmann simulations. *Physics of Fluids* 7:2928 (1995).
- Latt J., Chopard B. Straight velocity boundaries in the lattice Boltzmann method. *Physical Review E*, 2008.
- Maier R. S., Bernard R. S., and Grunau D. W. Boundary conditions for the lattice Boltzmann method. *Physic Fluids* 8:1788, 1996.
- Mohamad A.A. and Kuzmin A. A critical evaluation of force term in lattice Boltzmann method, natural convection problem”, *Internation journal of Heat and Mass Transfer*: 990–996, 2010.
- Qian Y., d’Humières D., Lallemand P., Recovery of Navier–Stokes equations using a lattice-gas Boltzmann method. *Europhysics Letters* 17:479, 1992.
- Skordos P.A., Initial and boundary conditions for the lattice Boltzmann. *Physical Review E* 48:4823-4842, 1993.
- Sukop, M. and Thorne D. Lattice Boltzmann Modeling. *Springer*, 2006.
- Succi S. Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond. *Clarendon Press*, 2001.
- Tong C. Q., He Y. L., Tang G. H., Wang Y. and Liu Y. W. Mass modified outlet boundary for a fully developed flow in the lattice Boltzmann equation. *International Journal of Modern Physics C* Vol. 18, No. 7:1209-1221, 2007.
- Yu, D., Mei, R. and Shyy, W. Improved treatment of the open boundary in the method of LBE. *Progress in Computational Fluid Dynamic* 5:1259, 2005.
- Zou Q. and He X. On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model. *Physic Fluids* 9:1591 (1997).