Elementos Mixtos

Generalizan los EF vistos p/ problemas elípticos.

Ej típico: problema Stokes 2D.

Hallar $\underline{u} = (u_1, u_2)$ y p (presión)

velocidad

campo div nula

$$\boxed{\begin{array}{c} -\Delta \underline{u} + \underline{\nabla} p = f \\ \operatorname{div} \underline{u} = 0 \\ \underline{u} = 0 \end{array}} \quad \begin{array}{l} \text{en } \Omega \\ \text{en } \Omega \\ \text{sobre } \Gamma \end{array}$$

Nota: Si p es solución $\Rightarrow$ $(p+c)$ es soluc $\forall c$ cte

p/ lograr p única $\Rightarrow$ $\left| \int_\Omega p \, dx = 0 \right|$

Formulación variacional:

Hallar $u \in V$ y $p \in H$ /

$$V = [H_0^1(\Omega)]^2 = \{ \underline{v} = (v_1, v_2) / v_i \in H_0^1(\Omega), i=1,2 \}$$

$$H = \{ q \in L_2(\Omega) : \int_\Omega q \, dx = 0 \}$$

$$-(v, \Delta u) + (v, \nabla p) = (f, v) \quad \forall v \in V$$

Int p/partes:

Hallar $\underline{u}$, p en V, H /

$$\boxed{\begin{aligned} &(\nabla v, \nabla u) - (\operatorname{div} v, p) = (f, v) \quad &(1) \\ &(q, \operatorname{div} u) = 0 \quad \forall q \in H \quad &(2) \end{aligned}}$$

donde $(\, , \,)$ prod int en L_2.

En particular:

$$(\nabla u, \nabla v) = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, d\Omega = \sum \int \frac{\partial u_i}{\partial x_1}\frac{\partial v_i}{\partial x_1} + \frac{\partial u_i}{\partial x_2}\frac{\partial v_i}{\partial x_2}$$

$$\Delta \underline{u} - \underline{\nabla} p \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} - \dfrac{\partial p}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} - \dfrac{\partial p}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$$(v, \Delta u) = \int v_1 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}\right) + v_2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}\right) d\Omega$$

$$(f, v) = \int_\Omega f_i v_i \, dx$$

Prob variacional discreto

$V \to V_h \qquad H \to H_h$

Hallar $(u_h, p_h) \in V_h \times H_h$ /

$$(*)\quad \begin{cases} (\nabla u_h, \nabla v) - (p_h, \operatorname{div} v) = (f, v) & \forall v \in V_h \\ (q, \operatorname{div} u_h) = 0 & \forall q \in H_h \end{cases}$$

Un método q/resuelve es un EF "Mixto"

Nota: la condición de divergencia nula se cumple en forma aproximada.

Costo adicional $\Longrightarrow$ espacio H_h.

Veremos la elección de V_h y H_h no es totalmente libre. No toda combinación funciona.

Veremos $\exists$ casos de V_h, H_h / estabilidad se prueba fácilmente pero no resulta un método óptimamente preciso.

Estabilidad:

$\exists$ una constante C / si $(u_h, p_h) \in V_h \times H_h$ satisface $(*)$

luego:

$(**)$

$$\|u_h\|_1 + \|p_h\|_0 \leq C \|f\|_{-1}$$

$$\|f\|_{-1} = \sup_{v \in V} \frac{(f,v)}{\|v\|_1} \qquad \|v\|_1^2 = \|v_1\|_{H^1}^2 + \|v_2\|_{H^1(\Omega)}^2$$

$$\|q\|_0 = \|q\|_{L_2(\Omega)}$$

La estimación (**) p/ la velocidad se obtiene fácilmente:

$$(\nabla u_h, \nabla u_h) - (p_h, \operatorname{div} u_h) = (f, u_h)$$

$$+ \quad (p_h, \operatorname{div} u_h) = 0$$

$$\|\nabla u_h\|_{L_2}^2 = (\nabla u_h, \nabla u_h) = (f, u_h) \leq \|f\|_{-1} \, \|u_h\|_1$$

Hay que llegar a:

$$\boxed{\|u_h\|_1 \leq C \, \|f\|_{-1}}$$

$\circledast$ $(p_h, \operatorname{div} v) = (\nabla u_h, \nabla v) - (f, v) \quad \forall v \in V_h$

Queremos partir de ésta y llegar a:

$\circledast$ $\|p_h\|_0 \leq C\left(\|u_h\|_1 + \|f\|_{-1}\right)$

P/lograr $\circledast$ a partir de $\circledast$ se necesita lo sig:

$$\boxed{\exists \text{ una cte } c > 0 \ / \ \forall\, q \in H_h \quad \sup_{v \in V_h} \frac{(q, \operatorname{div} v)}{\|v\|_1} \geq c\,\|q\|_0}$$

Condic de Babuska Brezzi

Babuska - Brezzi

$$(p_h, \operatorname{div} v) = (\nabla u_h, \nabla v) - (f, v) \quad \forall v \in V_h$$

$$\|u_h\|_1 \leq C \|f\|_{-1}$$

$$|(p_h, \operatorname{div} u_h)| \leq |(\nabla u_h, \nabla u_h)| + |(f, u_h)| \leq$$

?

$$\leq \|u_h\|_1^2 + \|f\|_{-1} \|u_h\|_1$$

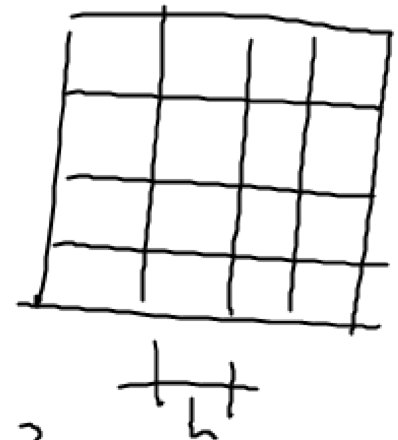
NO

$$c\|p_h\|_0 \leq \frac{|(p_h, \operatorname{div} u_h)|}{\|u_h\|_1} \leq \|u_h\|_1 + \|f\|_{-1}$$

$$\sup_{v \in V_h} \frac{(q, \operatorname{div} v)}{\|v\|_1} \geq c \|q\|_0$$

Ejemplo Asumimos Ω cuadrado

$$T_h = \{K\}$$



K cuadrados de lado h

$$V_h = \{ v \in V : v|_K \in [Q_2(K)]^2 \ \forall K \in T_h \}$$

$$H_h = \{ q \in H : q|_K \in Q_0(K) \ \forall K \in T_h \}$$

Veremos si cumple BB

Si es así cumple la estimación de error:

$$\|u - u_h\|_1 + \|p - p_h\|_0 \leq Ch\left(h\|u\|_3 + \|p\|_1\right)$$

Resultado preliminar (Girault-Raviart)

Se demuestra

existe una constante C / $\forall q \in H$ $\exists\, v \in [H_0^1(\Omega)]^2$ que verifica

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{div} v &= q \\ \|v\|_1 &\leq C \|q\|_0 \end{aligned}} \Longleftarrow (***)$$

Dado $q \Rightarrow$ sea v / $\operatorname{div} v = q$

Luego

$$\|v\|_1 \leq C \|q\|_0$$

Tiene relación c/ BB:

$$\frac{(q, \operatorname{div} v)}{\|v\|_1} \geq \frac{(q,q)}{} = \frac{\|q\|_0^2}{C \cancel{\|q\|_0}}$$

Luego $\displaystyle\sup_{v_1\in V} \frac{(q, \operatorname{div} v_1)}{\|v_1\|_1} \geq c\,\|q\|_0 \quad \forall q\in H$

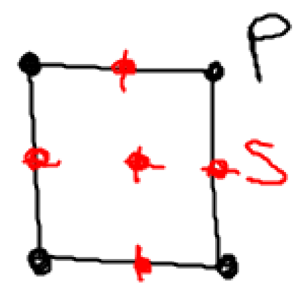
BB P/ Stokes continuo

Vemos q/ para P/ variacional discreto.

Sea $q\in H_h$. Sea $v\in V$ / $\operatorname{div} v = q$

Sea $v_h\in V_h$ un interpolante de v:

$$\begin{cases} v_h(P) = \tilde{v}(P) \\ \displaystyle\int_S v_h\,ds = \int_S v\,ds \quad \forall \text{ lados } S \\ \displaystyle\int_K v_h\,dx = \int_K v\,dx \quad \forall K\in T_h \end{cases}$$



donde $\tilde{v}\in V_h$ / $\left(\nabla(v-\tilde{v}), \nabla w\right)=0 \quad \forall w\in V_h$

1) Es fácil ver $\|v_h\|_1 \le C\|v\|_1$ Ejercicio

2)
$$\|q\|_0^2 = (q, \operatorname{div} v) = \sum_K \int_K q \operatorname{div} v \, dx \underset{\text{Green}}{=}$$

$$= \sum_K \int_{\partial K} q \, \underline{v} \cdot \underline{n}_K \, ds \underset{q \text{ discreto}}{=} \sum_K \int_{\partial K} q \, v_h \cdot n_K \, ds$$

$$= \sum_K \int_K q \operatorname{div} v_h \, d\underline{x} = (q, \operatorname{div} v_h)$$

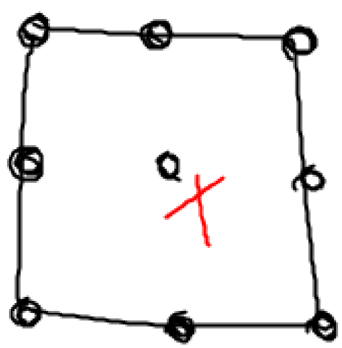
Por (***)
Por (1)

$$\|v_h\|_1 \le C\|v\|_1 \le C\|q\|_0$$

$$\|q\|_0 = \frac{(q, \operatorname{div} v_h)}{\|q\|_0} \leq C \frac{(q, \operatorname{div} v_h)}{\|v_h\|_1}$$

BB

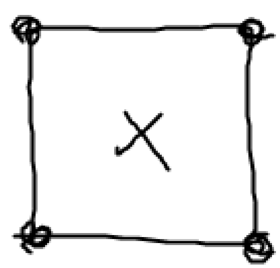
$$\sup_{v \in V_h} \frac{(q, \operatorname{div} v)}{\|v\|_1} \geq C \|q\|_0$$



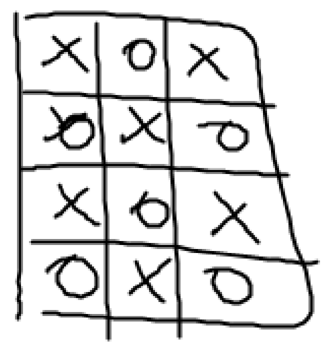
Ej 2) El elemento + simple sería: $Q_1 - Q_0$

$$V_h = \{ v \in V : v|_K \in [Q_1(K)]^2 \ \forall K \in T_h \}$$

$$H_h = \{ q \in H : q|_K \in Q_0(K) \ \forall K \in T_h \}$$



No satisface BB

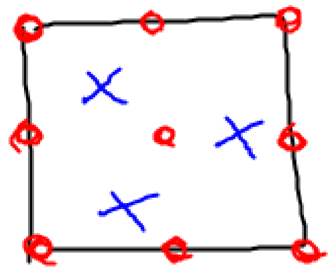


Hay soluciones pidiendo p/ filtrar modos "espúreos"

Ej 3)

$$V_h = \{ v \in V : v|_K \in [Q_2(K)]^2 \}$$

$$H_h = \{ q \in H : q|_K \in P_1(K) \}$$



$Q_2 - P_1$

Ej 4)

$Q_2 - Q_1 \Longrightarrow$ inestable