

Introducción al Método de los Elementos Finitos

Parte 5

Algunas aplicaciones del MEF a problemas elípticos

Alberto Cardona, Víctor Fachinotti

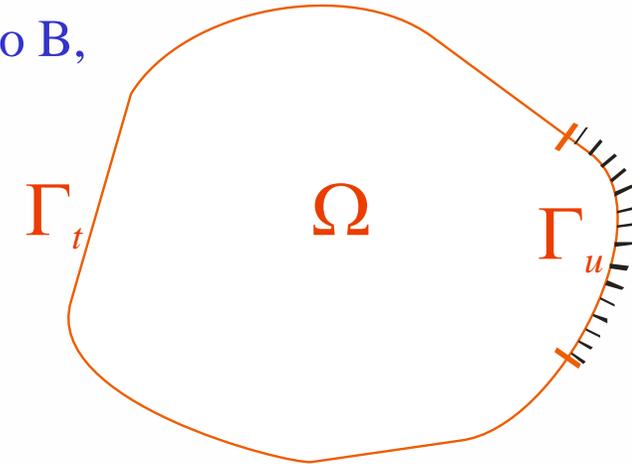
Cimec-Intec (UNL/Conicet), Santa Fe, Argentina

25/10/11

Algunas aplicaciones del MEF a problemas elípticos

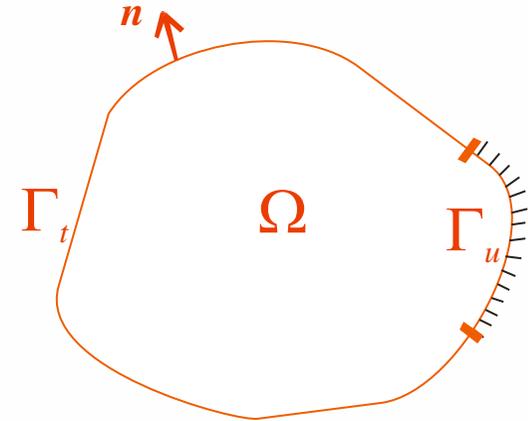
Problema de Elasticidad

- Consideremos un cuerpo elástico, isótropo y homogéneo B , que ocupa el dominio acotado $\Omega \in \mathbb{R}^3$, con frontera $\Gamma = \Gamma_t \cup \Gamma_u$ tal que $\Gamma_t \cap \Gamma_u = \emptyset$ y área $\Gamma_u > 0$.
- El cuerpo B está sometido a una fuerza volumétrica f , y a una fuerza superficial t aplicada sobre Γ_t .
- Se supone B fijo a lo largo de Γ_u .
- Se busca determinar
 - desplazamientos u .
 - deformaciones ε , dependientes de los desplazamientos de acuerdo a la cinemática de la deformación.
 - tensiones σ , dependientes de las deformaciones de acuerdo a la ley constitutiva del material.



Problema de Elasticidad

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0} & \text{en } \Omega & \text{Ecuación de equilibrio} \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sobre } \Gamma_u & \text{CB Dirichlet (despl. impuesto)} \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{t} & \text{sobre } \Gamma_t & \text{CB Neumann (tracción impuesta)} \end{cases}$$



- Ecuaciones de clausura

- Cinemáticas: asumiendo pequeñas deformaciones:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

- Constitutivas: asumiendo comportamiento elástico lineal (ley de Hooke):

$$\sigma_{ij} = \lambda \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + \mu \varepsilon_{ij}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}^+, \text{ ctes. de Lamé.}$$

$$\text{con } \mu = \frac{E}{1+\nu}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \left\{ \begin{array}{l} E : \text{módulo de Elasticidad} \\ \nu : \text{coeficiente de Poisson} \end{array} \right.$$

- Nota:** en adelante, usaremos las siguientes convenciones de notación:

- derivada parcial: $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$

- sumatoria: $\sigma_{ij} n_j = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j$

Forma variacional del problema de Elasticidad

- Dado $(D) \quad \sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad i, j = 1, 2, 3$
 se llega a $(V) \quad \text{Hallar } \mathbf{u} \in V / a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V$
 con $V = \left\{ \mathbf{v} : \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^3 \text{ y } \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_u \right\}$

haciendo

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} v_i dx}_{\text{T. de Green}} + \int_{\Omega} f_i v_i dx = 0 \\
 & - \int_{\Omega} \sigma_{ij} v_{i,j} dx + \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j v_i ds + \int_{\Omega} f_i v_i dx = 0 \\
 & - \int_{\Omega} \frac{\sigma_{ij} v_{i,j} + \sigma_{ji} v_{j,i}}{2} dx + \int_{\Gamma_t} t_i v_i ds + \int_{\Omega} f_i v_i dx = 0 \quad \text{CB} \\
 & \underbrace{- \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{v_{i,j} + v_{j,i}}{2} dx}_{\text{Simetría de } \sigma} + \int_{\Gamma_t} t_i v_i ds + \int_{\Omega} f_i v_i dx = 0 \\
 & \underbrace{- \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) dx}_{\text{Ley de Hooke}} + \int_{\Gamma_t} t_i v_i ds + \int_{\Omega} f_i v_i dx = 0 \\
 & \underbrace{- \int_{\Omega} [\lambda u_{i,i} \delta_{ij} + \mu \varepsilon_{ij}(\mathbf{u})] \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) dx}_{a(\mathbf{u}, \mathbf{v})} + \underbrace{\int_{\Gamma_t} t_i v_i ds + \int_{\Omega} f_i v_i dx}_{L(\mathbf{v})} = 0
 \end{aligned}$$

Cinemática
de pequeñas
deformaciones

Forma variacional del problema de Elasticidad (cont.)

- Se puede demostrar que la forma lineal $L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} f_i v_i dx + \int_{\Gamma_t} t_i v_i ds$ es continua, i.e., $L(\mathbf{v}) \leq \lambda \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$.
- Se puede demostrar que la forma bilineal
$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \left[\lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \right] \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) dx = \int_{\Omega} \left[\lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) \right] dx$$
 - es simétrica, i.e., $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{v}, \mathbf{u})$, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$.
 - continua, i.e., $|a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \gamma \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$.
 - V-elíptica, i.e., $a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \alpha \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, con $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^3 \|v_i\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2$.

$$\text{Demo.: } a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \lambda \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 dx + \mu \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) dx$$

$$\geq \mu \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) dx \geq \mu c \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2, \quad c \in \mathbb{R}^+.$$

Desigualdad de Korn

MEF aplicado al problema de Elasticidad

- Consideremos el problema de Elasticidad en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.
- Sea $T_h = \{K\}$ una malla de triángulos de Ω . Definimos el espacio de EF

$$V_h = \left\{ \mathbf{v} : \mathbf{v} \in V \text{ y } \mathbf{v}|_K \in [P_1(K)]^2, \forall K \in T_h \right\}$$

- El MEF aplicado al problema de Elasticidad consiste en

$$\text{Hallar } \mathbf{u}_h \in V_h / \mathbf{a}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V_h$$

- La solución $\mathbf{u}_h \in V_h$ satisface

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch |\mathbf{u}|_{H^2(\Omega)}$$

Funciones de base para el triángulo lineal

Toda función $\mathbf{v} \in [P_1(\mathbb{K})]^2$ puede representarse

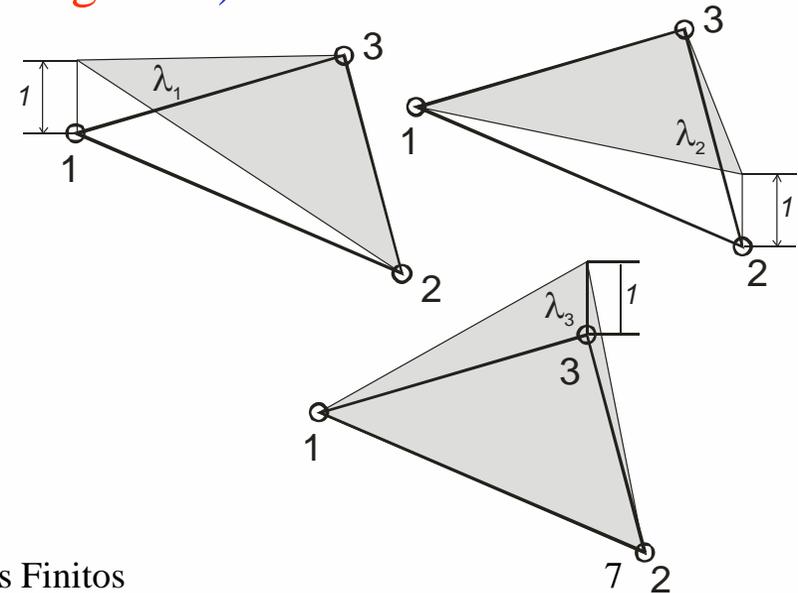
$$\mathbf{v}(x, y) = \begin{Bmatrix} v_x(x, y) \\ v_y(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^3 N_i(x, y) V_i^x \\ \sum_{i=1}^3 N_i(x, y) V_i^y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1^x \\ V_1^y \\ V_2^x \\ V_2^y \\ V_3^x \\ V_3^y \end{Bmatrix}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{K}.$$

Las funciones de base $N_i = \lambda_i$ (\equiv coord de área del triángulo \mathbb{K}) resultan:

$$N_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y$$

con:

$$\begin{array}{lll} a_1 = \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2}{2 A_K} & b_1 = \frac{y_2 - y_3}{2 A_K} & c_1 = \frac{x_3 - x_2}{2 A_K} \\ a_2 = \frac{x_3 y_1 - x_1 y_3}{2 A_K} & b_2 = \frac{y_3 - y_1}{2 A_K} & c_2 = \frac{x_1 - x_3}{2 A_K} \\ a_3 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2 A_K} & b_3 = \frac{y_1 - y_2}{2 A_K} & c_3 = \frac{x_2 - x_1}{2 A_K} \end{array}$$



MEF aplicado al problema de Elasticidad

Notar:

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{u}_h) = \int_{\Omega} \left[\lambda \varepsilon_{jj}(\mathbf{v}) \varepsilon_{ii}(\mathbf{u}_h) + \mu \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}_h) \right] dx = \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}(\mathbf{v}) \\ \varepsilon_{yy}(\mathbf{v}) \\ 2\varepsilon_{xy}(\mathbf{v}) \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda + \mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + \mu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}(\mathbf{u}_h) \\ \varepsilon_{yy}(\mathbf{u}_h) \\ 2\varepsilon_{xy}(\mathbf{u}_h) \end{Bmatrix} dx$$

El vector de deformación :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}(\mathbf{v}) \\ \varepsilon_{yy}(\mathbf{v}) \\ 2\varepsilon_{xy}(\mathbf{v}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1^x \\ V_1^y \\ V_2^x \\ V_2^y \\ V_3^x \\ V_3^y \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{V}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h) = \mathbf{B} \mathbf{U}_h$$

Para el triángulo lineal, la matriz \mathbf{B} es constante :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

MEF aplicado al problema de Elasticidad

Luego:

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{u}_h) = \sum_K a_K(\mathbf{v}, \mathbf{u}_h)$$

con

$$a_K(\mathbf{v}, \mathbf{u}_h) = \int_K \mathbf{V}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{U}_h dx = \mathbf{V}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{U}_h \mathbf{A}_K$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda + \mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu/2 \end{bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{bmatrix}$$

(estado *plano de deformación*)

En consecuencia, la matriz de rigidez elemental :

$$\mathbf{A}_K = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{A}_K$$

Notar:

$$\sigma_{ij} = \lambda \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + \mu \varepsilon_{ij} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + \mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}$$

Problema de Stokes

- Consideremos las ecuaciones de Stokes para el flujo estacionario de un fluido Newtoniano incompresible encerrado en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, sometido a una fuerza volumétrica f :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad \text{Balance de cant. de movto.}$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) - p\delta_{ij} \quad \text{en } \Omega, \quad \text{Ley const. de fluido Newtoniano}$$

$$u_{i,i} = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad \text{Condición de incompresibilidad}$$

$$u_i = 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \quad \text{CB Dirichlet}$$

\mathbf{u} : velocidad

$\boldsymbol{\sigma}$: tensión

p : presión

μ : viscosidad

$$-\mu\Delta u_i + p_{,i} = f_i \quad \text{en } \Omega, \quad \text{Balance de cant. de movto. p/fluido Newtoniano}$$

- Definimos el espacio de funciones de prueba

$$V = \left\{ \mathbf{v} : \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^3 \text{ y } \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ en } \Omega \right\}$$

- Luego, podemos llevar el problema de Stokes a la forma variacional

$$(V) \quad \text{Hallar } \mathbf{u} \in V / a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

Forma variacional del problema de Stokes

- Para llevar el problema de Stokes a la forma variacional hacemos

$$f_i = -\Delta u_i + p_{,i}$$

$$\int_{\Omega} f_i v_i dx = -\mu \int_{\Omega} \Delta u_i v_i dx + \int_{\Omega} p_{,i} v_i dx$$

$$\int_{\Omega} f_i v_i dx = \mu \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v_i dx - \underbrace{\mu \int_{\Gamma} \frac{\partial u_i}{\partial n} v_i ds}_{=0} - \underbrace{\int_{\Omega} p v_{i,i} dx}_{=0} + \underbrace{\int_{\Gamma} p n_i v_i ds}_{=0}$$

$$\underbrace{\int_{\Omega} f_i v_i dx}_{L(\mathbf{v})} = \underbrace{\mu \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v_i dx}_{a(\mathbf{u}, \mathbf{v})}$$

- Dado que $\mu > 0$, se demuestra (ídem problema de Poisson) que $a(\cdot, \cdot)$ es simétrica, continua y V-elíptica.
- Se demuestra también (ídem problema de Poisson) que $L(\cdot)$ es continua.
- Nota:** al adoptar un espacio de velocidades de divergencia nula, la formulación variacional no involucra la presión.

MEF aplicado al problema de Stokes

Consideremos el problema de Stokes en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Luego:

$$V = \left\{ \mathbf{v} : \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \text{ y } \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \text{ en } \Omega \right\}$$

- Si Ω es simplemente conexo (i.e., no contiene agujeros), $\text{div } \mathbf{v} = 0$ en Ω si y solo si

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) = \text{rot } \varphi \text{ para alguna función } \varphi.$$

φ : función de corriente del campo de velocidades \mathbf{v} .

o sea: $\mathbf{v} \in V \Leftrightarrow \mathbf{v} = \text{rot } \varphi, \varphi \in H_0^2(\Omega)$.

- Adoptamos luego un subespacio W_h de dimensión finita de $H_0^2(\Omega)$ (usamos por ej. el elemento finito C^1 -continuo ya visto) y definimos $V_h = \{ \mathbf{v} : \mathbf{v} = \text{rot } \varphi, \varphi \in W_h \}$.
- Se formula el MEF reemplazando V por $V_h \subset V$ en la formulación variacional. La solución $\mathbf{u}_h \in V_h$ satisface

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^4 |\mathbf{u}|_{H^5(\Omega)}$$

Desarrollo del MEF para Stokes

Desarrollaremos un EF triangular C1-continuo. El campo $\varphi(x, y)$ será aproximado por polinomios de grado 5:

$$\varphi(x, y) = \sum_{0 \leq i+j \leq 5} c_{ij} x^i y^j = c_{00} + c_{10}x + c_{01}y + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2 + \dots = \mathbf{p}^T(x, y)\mathbf{c}, \quad \forall (x, y) \in K.$$

con:

$$\mathbf{p}^T(x, y) = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad \dots]$$

$$\mathbf{c} = [c_{00} \quad c_{10} \quad c_{01} \quad c_{20} \quad c_{11} \quad c_{02} \quad c_{30} \quad c_{21} \quad c_{12} \quad c_{03} \quad c_{40} \quad c_{31} \quad c_{22} \quad c_{13} \quad \dots \quad c_{23} \quad c_{14} \quad c_{05}]^T$$

Para el cálculo de los coeficientes \mathbf{c} expresamos el valor del campo en los nodos

$$\varphi(x_k, y_k) = \sum_{0 \leq i+j \leq 5} c_{ij} x_k^i y_k^j = c_{00} + c_{10}x_k + c_{01}y_k + c_{20}x_k^2 + c_{11}x_k y_k + c_{02}y_k^2 + \dots = \varphi^k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Obtenemos así tres ecuaciones con 21 incógnitas:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_k & y_k & x_k^2 & x_k y_k & y_k^2 & x_k^3 & x_k^2 y_k & x_k y_k^2 & y_k^3 & x_k^4 & x_k^3 y_k & x_k^2 y_k^2 & x_k y_k^3 & y_k^4 & x_k^5 & x_k^4 y_k & x_k^3 y_k^2 & x_k^2 y_k^3 & x_k y_k^4 & y_k^5 \end{bmatrix} \mathbf{c} = \varphi^k$$

$$k = 1, 2, 3.$$

Desarrollo del MEF para Stokes

Calculando luego el valor de la derivada respecto de x en los nodos, logramos tres ecuaciones más:

$$\varphi_{,x}(x_k, y_k) = \sum_{0 \leq i+j \leq 5} c_{ij} i x_k^{(i-1)} y_k^j = c_{10} + 2c_{20}x_k + c_{11}y_k + \dots = \varphi_{,x}^k, \quad k = 1, 2, 3.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2x_k & y_k & 0 & 3x_k^2 & 2x_k y_k & y_k^2 & 0 & 4x_k^3 & 3x_k^2 y_k & 2x_k y_k^2 & y_k^3 & 0 & 5x_k^4 & 4x_k^3 y_k & 3x_k^2 y_k^2 & 2x_k y_k^3 & y_k^4 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{c} = \varphi_{,x}^k$$

$k = 1, 2, 3.$

Repitiendo el proceso para la evaluación de todos los grados de libertad nodales, obtenemos un conjunto de 18 ecuaciones con 21 incógnitas.

Este proceso puede hacerse usando un programa de manipulación simbólica, como se indica en el siguiente slide.

Desarrollo del MEF para Stokes

Programa para calculo simbólico coeficientes

```
clear
syms C x y x1 y1 x2 y2 x3 y3
C = 1;
for i=1:5
    for j=0:i
        C = [C x^(i-j)*y^(j)];
    end
end

Cx = diff(C,x);
Cy = diff(C,y);
Cxx = diff(C,x,2);
Cxy = diff(Cx,y);
Cyy = diff(C,y,2);

% NODO 1
% phi(x1,y1) = phi_1
A(1,:) = subs(C, {x,y}, {x1,y1});
% dphi/dx (x1,y1) = dphix_1
A(2,:) = subs(Cx, {x,y}, {x1,y1});
% dphi/dy (x1,y1) = dphiy_1
A(3,:) = subs(Cy, {x,y}, {x1,y1});

% d2phi/dx2 (x1,y1) = dphixx_1
A(4,:) = subs(Cxx, {x,y}, {x1,y1});
% d2phi/dxdy (x1,y1) = dphixy_1
A(5,:) = subs(Cxy, {x,y}, {x1,y1});
% d2phi/dy2 (x1,y1) = dphiyy_1
A(6,:) = subs(Cyy, {x,y}, {x1,y1});

% NODO 2
A(7,:) = subs(C, {x,y}, {x2,y2});
A(8,:) = subs(Cx, {x,y}, {x2,y2});
A(9,:) = subs(Cy, {x,y}, {x2,y2});
A(10,:) = subs(Cxx, {x,y}, {x2,y2});
A(11,:) = subs(Cxy, {x,y}, {x2,y2});
A(12,:) = subs(Cyy, {x,y}, {x2,y2});

% NODO 3
A(13,:) = subs(C, {x,y}, {x3,y3});
A(14,:) = subs(Cx, {x,y}, {x3,y3});
A(15,:) = subs(Cy, {x,y}, {x3,y3});
A(16,:) = subs(Cxx, {x,y}, {x3,y3});
A(17,:) = subs(Cxy, {x,y}, {x3,y3});
A(18,:) = subs(Cyy, {x,y}, {x3,y3});
```

Tenemos hasta ahora 18 ecuaciones y 21 incógnitas:

$$\begin{bmatrix}
 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1^3 & x_1^2 y_1 & x_1 y_1^2 & y_1^3 & x_1^4 & x_1^3 y_1 & x_1^2 y_1^2 & x_1 y_1^3 & y_1^4 & x_1^5 & x_1^4 y_1 & x_1^3 y_1^2 & x_1^2 y_1^3 & x_1 y_1^4 & y_1^5 \\
 0 & 1 & 0 & 2x_1 & y_1 & 0 & 3x_1^2 & 2x_1 y_1 & y_1^2 & 0 & 4x_1^3 & 3x_1^2 y_1 & 2x_1 y_1^2 & y_1^3 & 0 & 5x_1^4 & 4x_1^3 y_1 & 3x_1^2 y_1^2 & 2x_1 y_1^3 & y_1^4 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & x_1 & 2y_1 & 0 & x_1^2 & 2x_1 y_1 & 3y_1^2 & 0 & x_1^3 & 2x_1^2 y_1 & 3x_1 y_1^2 & 4y_1^3 & 0 & x_1^4 & 2x_1^3 y_1 & 3x_1^2 y_1^2 & 4x_1 y_1^3 & 5y_1^4 \\
 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x_1 & 2y_1 & 0 & 0 & 12x_1^2 & 6x_1 y_1 & 2y_1^2 & 0 & 0 & 20x_1^3 & 12x_1^2 y_1 & 6x_1 y_1^2 & 2y_1^3 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2x_1 & 2y_1 & 0 & 0 & 3x_1^2 & 4x_1 y_1 & 3y_1^2 & 0 & 0 & 4x_1^3 & 6x_1^2 y_1 & 6x_1 y_1^2 & 4y_1^3 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x_1 & 6y_1 & 0 & 0 & 2x_1^2 & 6x_1 y_1 & 12y_1^2 & 0 & 0 & 2x_1^3 & 6x_1^2 y_1 & 12x_1 y_1^2 & 20y_1^3 \\
 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & x_2^3 & x_2^2 y_2 & x_2 y_2^2 & y_2^3 & x_2^4 & x_2^3 y_2 & x_2^2 y_2^2 & x_2 y_2^3 & y_2^4 & x_2^5 & x_2^4 y_2 & x_2^3 y_2^2 & x_2^2 y_2^3 & x_2 y_2^4 & y_2^5 \\
 0 & 1 & 0 & 2x_2 & y_2 & 0 & 3x_2^2 & 2x_2 y_2 & y_2^2 & 0 & 4x_2^3 & 3x_2^2 y_2 & 2x_2 y_2^2 & y_2^3 & 0 & 5x_2^4 & 4x_2^3 y_2 & 3x_2^2 y_2^2 & 2x_2 y_2^3 & y_2^4 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & x_2 & 2y_2 & 0 & x_2^2 & 2x_2 y_2 & 3y_2^2 & 0 & x_2^3 & 2x_2^2 y_2 & 3x_2 y_2^2 & 4y_2^3 & 0 & x_2^4 & 2x_2^3 y_2 & 3x_2^2 y_2^2 & 4x_2 y_2^3 & 5y_2^4 \\
 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x_2 & 2y_2 & 0 & 0 & 12x_2^2 & 6x_2 y_2 & 2y_2^2 & 0 & 0 & 20x_2^3 & 12x_2^2 y_2 & 6x_2 y_2^2 & 2y_2^3 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2x_2 & 2y_2 & 0 & 0 & 3x_2^2 & 4x_2 y_2 & 3y_2^2 & 0 & 0 & 4x_2^3 & 6x_2^2 y_2 & 6x_2 y_2^2 & 4y_2^3 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x_2 & 6y_2 & 0 & 0 & 2x_2^2 & 6x_2 y_2 & 12y_2^2 & 0 & 0 & 2x_2^3 & 6x_2^2 y_2 & 12x_2 y_2^2 & 20y_2^3 \\
 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 & x_3^3 & x_3^2 y_3 & x_3 y_3^2 & y_3^3 & x_3^4 & x_3^3 y_3 & x_3^2 y_3^2 & x_3 y_3^3 & y_3^4 & x_3^5 & x_3^4 y_3 & x_3^3 y_3^2 & x_3^2 y_3^3 & x_3 y_3^4 & y_3^5 \\
 0 & 1 & 0 & 2x_3 & y_3 & 0 & 3x_3^2 & 2x_3 y_3 & y_3^2 & 0 & 4x_3^3 & 3x_3^2 y_3 & 2x_3 y_3^2 & y_3^3 & 0 & 5x_3^4 & 4x_3^3 y_3 & 3x_3^2 y_3^2 & 2x_3 y_3^3 & y_3^4 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 & 2y_3 & 0 & x_3^2 & 2x_3 y_3 & 3y_3^2 & 0 & x_3^3 & 2x_3^2 y_3 & 3x_3 y_3^2 & 4y_3^3 & 0 & x_3^4 & 2x_3^3 y_3 & 3x_3^2 y_3^2 & 4x_3 y_3^3 & 5y_3^4 \\
 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x_3 & 2y_3 & 0 & 0 & 12x_3^2 & 6x_3 y_3 & 2y_3^2 & 0 & 0 & 20x_3^3 & 12x_3^2 y_3 & 6x_3 y_3^2 & 2y_3^3 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2x_3 & 2y_3 & 0 & 0 & 3x_3^2 & 4x_3 y_3 & 3y_3^2 & 0 & 0 & 4x_3^3 & 6x_3^2 y_3 & 6x_3 y_3^2 & 4y_3^3 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x_3 & 6y_3 & 0 & 0 & 2x_3^2 & 6x_3 y_3 & 12y_3^2 & 0 & 0 & 2x_3^3 & 6x_3^2 y_3 & 12x_3 y_3^2 & 20y_3^3
 \end{bmatrix}
 \mathbf{c} = \left\{ \begin{array}{l} \phi^1 \\ \phi_{,x}^1 \\ \phi_{,y}^1 \\ \phi_{,xx}^1 \\ \phi_{,xy}^1 \\ \phi_{,yy}^1 \\ \phi^2 \\ \phi_{,x}^2 \\ \phi_{,y}^2 \\ \phi_{,xx}^2 \\ \phi_{,xy}^2 \\ \phi_{,yy}^2 \\ \phi^3 \\ \phi_{,x}^3 \\ \phi_{,y}^3 \\ \phi_{,xx}^3 \\ \phi_{,xy}^3 \\ \phi_{,yy}^3 \end{array} \right.$$

Desarrollo del MEF para Stokes

Las tres últimas ecuaciones se obtienen calculando la derivada normal en los puntos medios de los lados:

$$\begin{bmatrix} n_{12,x} (0 & 1 & 0 & 2x_{12} & y_{12} & 0 & 3x_{12}^2 & 2x_{12}y_{12} & y_{12}^2 & 0 & 4x_{12}^3 & 3x_{12}^2y_{12} & 2x_{12}y_{12}^2 & y_{12}^3 & 0 & 5x_{12}^4 & 4x_{12}^3y_{12} & 3x_{12}^2y_{12}^2 & 2x_{12}y_{12}^3 & y_{12}^4 & 0) + \\ n_{12,y} (0 & 0 & 1 & 0 & x_{12} & 2y_{12} & 0 & x_{12}^2 & 2x_{12}y_{12} & 3y_{12}^2 & 0 & x_{12}^3 & 2x_{12}^2y_{12} & 3x_{12}y_{12}^2 & 4y_{12}^3 & 0 & x_{12}^4 & 2x_{12}^3y_{12} & 3x_{12}^2y_{12}^2 & 4x_{12}y_{12}^3 & 5y_{12}^4) \\ n_{23,x} (0 & 1 & 0 & 2x_{23} & y_{23} & 0 & 3x_{23}^2 & 2x_{23}y_{23} & y_{23}^2 & 0 & 4x_{23}^3 & 3x_{23}^2y_{23} & 2x_{23}y_{23}^2 & y_{23}^3 & 0 & 5x_{23}^4 & 4x_{23}^3y_{23} & 3x_{23}^2y_{23}^2 & 2x_{23}y_{23}^3 & y_{23}^4 & 0) + \\ n_{23,y} (0 & 0 & 1 & 0 & x_{23} & 2y_{23} & 0 & x_{23}^2 & 2x_{23}y_{23} & 3y_{23}^2 & 0 & x_{23}^3 & 2x_{23}^2y_{23} & 3x_{23}y_{23}^2 & 4y_{23}^3 & 0 & x_{23}^4 & 2x_{23}^3y_{23} & 3x_{23}^2y_{23}^2 & 4x_{23}y_{23}^3 & 5y_{23}^4) \\ n_{31,x} (0 & 1 & 0 & 2x_{31} & y_{31} & 0 & 3x_{31}^2 & 2x_{31}y_{31} & y_{31}^2 & 0 & 4x_{31}^3 & 3x_{31}^2y_{31} & 2x_{31}y_{31}^2 & y_{31}^3 & 0 & 5x_{31}^4 & 4x_{31}^3y_{31} & 3x_{31}^2y_{31}^2 & 2x_{31}y_{31}^3 & y_{31}^4 & 0) + \\ n_{31,y} (0 & 0 & 1 & 0 & x_{31} & 2y_{31} & 0 & x_{31}^2 & 2x_{31}y_{31} & 3y_{31}^2 & 0 & x_{31}^3 & 2x_{31}^2y_{31} & 3x_{31}y_{31}^2 & 4y_{31}^3 & 0 & x_{31}^4 & 2x_{31}^3y_{31} & 3x_{31}^2y_{31}^2 & 4x_{31}y_{31}^3 & 5y_{31}^4) \end{bmatrix} \mathbf{c} = \begin{Bmatrix} \varphi_{,n}^{12} \\ \varphi_{,n}^{23} \\ \varphi_{,n}^{31} \end{Bmatrix}$$

Matricialmente, el proceso realizado puede escribirse:

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{\Phi} \quad \rightarrow \quad \mathbf{c} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{\Phi}$$

$$\mathbf{\Phi}^T = \left[\varphi^1 \quad \varphi_{,x}^1 \quad \varphi_{,y}^1 \quad \varphi_{,xx}^1 \quad \varphi_{,xy}^1 \quad \varphi_{,yy}^1 \quad \varphi^2 \quad \varphi_{,x}^2 \quad \varphi_{,y}^2 \quad \varphi_{,xx}^2 \quad \varphi_{,xy}^2 \quad \varphi_{,yy}^2 \quad \varphi^3 \quad \varphi_{,x}^3 \quad \varphi_{,y}^3 \quad \varphi_{,xx}^3 \quad \varphi_{,xy}^3 \quad \varphi_{,yy}^3 \quad \varphi_{,n}^{12} \quad \varphi_{,n}^{23} \quad \varphi_{,n}^{31} \right]$$

$$\mathbf{c} = \left[c_{00} \quad c_{10} \quad c_{01} \quad c_{20} \quad c_{11} \quad c_{02} \quad c_{30} \quad c_{21} \quad c_{12} \quad c_{03} \quad c_{40} \quad c_{31} \quad c_{22} \quad c_{13} \quad \cdots \quad c_{23} \quad c_{14} \quad c_{05} \right]^T$$

Desarrollo del MEF para Stokes

$$\mu \int_{\Omega} \nabla v_i \cdot \nabla u_i \, dx = \int_{\Omega} v_i f_i \, dx$$

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{Bmatrix} \rightarrow$$

$$\nabla u_1 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \end{Bmatrix}$$

$$\nabla u_2 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$$

$$\varphi(x, y) = \sum_{0 \leq i+j \leq 5} c_{ij} x^i y^j = c_{00} + c_{10}x + c_{01}y + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2 + \dots = \mathbf{p}^T(x, y) \mathbf{c}, \quad \forall (x, y) \in \mathbf{K}.$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \sum i(i-1)c_{ij}x^{i-2}y^j = 2c_{20} + 6c_{30}x + 2c_{21}x^2y + \dots =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 & 12x^2 & 6xy & 2y^2 & 0 & 0 & 20x^3 & 12x^2y & 6xy^2 & 2y^3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{c} = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial x^2} \right)^T \mathbf{c}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2x & 2y & 0 & 0 & 3x^2 & 4xy & 3y^2 & 0 & 0 & 4x^3 & 6x^2y & 6xy^2 & 4y^3 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{c} = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial x \partial y} \right)^T \mathbf{c}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 0 & 2x^2 & 6xy & 12y^2 & 0 & 0 & 2x^3 & 6x^2y & 12xy^2 & 20y^3 \end{bmatrix} \mathbf{c} = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial y^2} \right)^T \mathbf{c}$$

Desarrollo del MEF para Stokes

$$\mu \int_{\Omega} \nabla v_i \cdot \nabla u_i \, dx = \mu \int_{\Omega} (\nabla v_1 \cdot \nabla u_1 + \nabla v_2 \cdot \nabla u_2) \, dx = \mu \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) dx \quad \forall \psi \in \mathbf{W}_h$$

Usando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \mathbf{c}^T \left(\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial x^2} \right) = \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{A}^{-T} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial x^2} \right) & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial x^2} \right)^T \mathbf{c} = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial x^2} \right)^T \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\Phi} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \mathbf{c}^T \left(\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial x \partial y} \right) = \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{A}^{-T} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial x \partial y} \right) & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} &= \left(\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial x \partial y} \right)^T \mathbf{c} = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial x \partial y} \right)^T \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\Phi} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \mathbf{c}^T \left(\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial y^2} \right) = \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{A}^{-T} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial y^2} \right) & \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= \left(\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial y^2} \right)^T \mathbf{c} = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial y^2} \right)^T \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\Phi} \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que los parámetros $\boldsymbol{\Psi}$ son arbitrarios, obtenemos:

$$\mathbf{K} = \mu \mathbf{A}^{-T} \underbrace{\int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \mathbf{p}^T}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \mathbf{p}^T}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \mathbf{p}^T}{\partial y^2} \right) dx}_{\text{no nulos últimos } 18 \times 18 \text{ (primeros tres términos, constante, lineal en } x, y, \text{ nulos)}} \mathbf{A}^{-1} = \mu \mathbf{A}^{-T} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P} \end{bmatrix} \mathbf{A}^{-1}$$

18×18

Desarrollo del MEF para Stokes

Si introducimos la hipótesis cinemática siguiente (cálculo de derivadas en el punto medio a partir de las derivadas en los nodos vértice):

$$\begin{Bmatrix} \varphi_{,n}^{12} \\ \varphi_{,n}^{23} \\ \varphi_{,n}^{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{n_{12x}}{2} \varphi_{,x}^1 + \frac{n_{12y}}{2} \varphi_{,y}^1 + \frac{n_{12x}}{2} \varphi_{,x}^2 + \frac{n_{12y}}{2} \varphi_{,y}^2 \\ \frac{n_{23x}}{2} \varphi_{,x}^2 + \frac{n_{23y}}{2} \varphi_{,y}^2 + \frac{n_{23x}}{2} \varphi_{,x}^3 + \frac{n_{23y}}{2} \varphi_{,y}^3 \\ \frac{n_{31x}}{2} \varphi_{,x}^3 + \frac{n_{31y}}{2} \varphi_{,y}^3 + \frac{n_{31x}}{2} \varphi_{,x}^1 + \frac{n_{31y}}{2} \varphi_{,y}^1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & n_{12x} & n_{12x} & 0 & n_{12y} & n_{12y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_{23x} & n_{23x} & 0 & n_{23y} & n_{23y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_{31x} & 0 & n_{31x} & n_{31y} & 0 & n_{31y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Phi_{1:18}$$

$$\begin{Bmatrix} \varphi_{,n}^{12} \\ \varphi_{,n}^{23} \\ \varphi_{,n}^{31} \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \Phi_{1:18}$$

podemos luego expresar la matriz de rigidez de 18x18 (con grados de libertad sólo en los vértices) como:

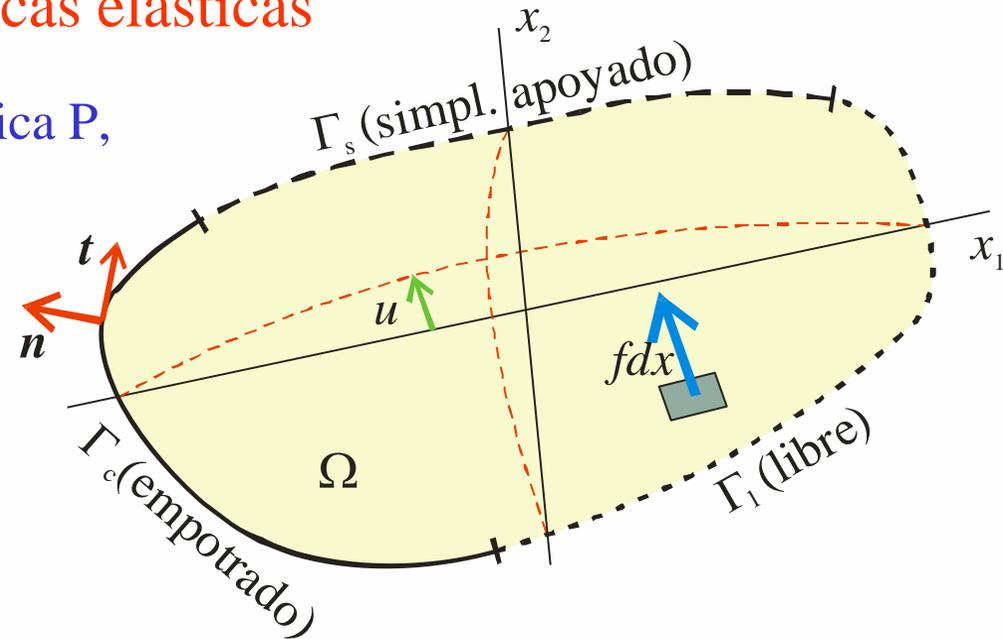
$$\mathbf{K} = \mu \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B}$$

siendo:

$$\mathbf{B}_{18 \times 18} \triangleq \left(\mathbf{A}^{-1} \right)_{(4:21,1:21)} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{18 \times 18} \\ \mathbf{D}_{3 \times 18} \end{bmatrix}$$

Flexión de placas elásticas

- Consideremos una delgada placa elástica P , cuya superficie media está dada por el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, sujeta a una carga transversal f .
- Se desea determinar
 - deflexión transversal u
 - momentos M_{ij} , $i, j=1, 2$.
- El problema está gobernado por



$$M_{ij,ij} = f \quad \text{en } \Omega \quad \text{Ecuación de equilibrio}$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_c \quad \text{CB empotrado}$$

$$u = M_{nn} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_s \quad \text{CB simpl. apoyado}$$

$$M_{nn} = Q(\mathbf{M}) = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_l \quad \text{CB libre}$$

$$Q(\mathbf{M}) = M_{ij,j} n_i + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} \quad \text{Fuerza de corte o transversal}$$

Flexión de placas elásticas (cont.)

- Ecuaciones de clausura
 - Asumiendo pequeñas deflexiones y material elástico lineal, la ecuación constitutiva (ley de Hooke) toma la forma

$$\sigma_{ij} = \lambda \Delta u \delta_{ij} + \mu \chi_{ij} \quad \left| \begin{array}{l} \lambda, \mu \in \mathbb{R}^+ \quad \text{constantes} \\ \chi_{ij} = u_{,ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{curvatura} \end{array} \right.$$

- Las constantes λ y μ dependen del módulo de elasticidad E y del coef. de Poisson ν , así como del espesor de la placa d , de acuerdo a

$$\lambda = \frac{Ed^3}{12(1+\nu)} \quad \mu = \frac{\nu Ed^3}{12(1-\nu^2)}$$

Formulación variacional del problema de flexión de placas elásticas

1. Adoptamos el espacio $V = \left\{ v : v \in H^2(\Omega), v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ en } \Gamma_c, v = 0 \text{ en } \Gamma_s \right\}$

2. Hacemos

$$\int_{\Omega} f v dx = \int_{\Omega} M_{ij,ij} v dx$$

$$\int_{\Omega} f v dx = - \int_{\Omega} M_{ij,j} v_{,i} dx + \int_{\Gamma} M_{ij,j} n_i v ds$$

$$\int_{\Omega} f v dx = \int_{\Omega} M_{ij} v_{,ij} dx - \int_{\Gamma} \overbrace{M_{ij} n_j v_{,i}} ds + \int_{\Gamma} M_{ij,j} n_i v ds$$

$$v_{,i} = \frac{\partial v}{\partial n} n_i + \frac{\partial v}{\partial t} t_i$$

$$M_{ij} n_j v_{,i} = M_{ij} n_i n_j \frac{\partial v}{\partial n} + M_{ij} t_i n_j \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$= M_{nn} \frac{\partial v}{\partial n} + M_{nt} \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\int_{\Omega} f v dx = \int_{\Omega} M_{ij} \chi_{ij}(v) dx - \int_{\Gamma} M_{nn} \frac{\partial v}{\partial n} ds - \int_{\Gamma} M_{nt} \frac{\partial v}{\partial t} ds + \int_{\Gamma} M_{ij,j} n_i v ds$$

$$\int_{\Omega} f v dx = \int_{\Omega} M_{ij} \chi_{ij}(v) dx - \int_{\Gamma} M_{nn} \frac{\partial v}{\partial n} ds + \int_{\Gamma} \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} v ds + \int_{\Gamma} M_{ij,j} n_i v ds$$

Integración por partes (con Γ suave)

$$\int_{\Omega} f v dx = \int_{\Omega} M_{ij} \chi_{ij}(v) dx - \underbrace{\int_{\Gamma} M_{nn} \frac{\partial v}{\partial n} ds}_{=0} + \underbrace{\int_{\Gamma} \left(M_{ij,j} n_i + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} \right) v ds}_{=0}$$

$$\int_{\Omega} f v dx = \int_{\Omega} (\lambda \Delta u \delta_{ij} + \mu \chi_{ij}) \chi_{ij}(v) dx = \int_{\Omega} [\lambda \Delta u \Delta v + \mu \chi_{ij}(u) \chi_{ij}(v)] dx$$

$L(v)$

$a(u, v)$

Formulación variacional del problema de flexión de placas elásticas (cont.)

- La forma variacional del problema de flexión de placas elásticas resulta

$$(V) \quad \text{Hallar } u \in V / a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V$$

$$\text{con: } a(u, v) = \int_{\Omega} \left[\lambda \Delta u \Delta v + \mu \chi_{ij}(u) \chi_{ij}(v) \right] dx$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f v dx$$

$$V = \left\{ v : v \in H^2(\Omega), v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ en } \Gamma_c, v = 0 \text{ en } \Gamma_s \right\}$$

- La forma bilineal $a(.,.)$ es en general simétrica y continua.
 - Además, $a(.,.)$ es V -elíptica si $\Gamma_c > 0$, i.e., si la placa está empotrada a lo largo de una parte de su borde.
 - La forma lineal $L(.)$ es continua.
- Ahora se puede formular el MEF para el problema de flexión de placas elásticas usando el elemento C^1 -continuo ya descrito.