Introducción al Método de los Elementos Finitos
Guía Núm. 3

1. Sea Ω un cuadrado de lado unitario. Mostrar que

$$\int_\Omega v^2\,dx \le \int_\Omega |\nabla v|^2\,dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{1}$$

2. Dé una formulación variacional del problema de Neumann no homogéneo

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f, \quad \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g, \quad \text{sobre } \Gamma \end{aligned} \tag{2}$$

y verifique que se cumplen las cuatro condiciones requeridas en la formulación abstracta de problemas elípticos (simetría, continuidad, V-elipticidad de la forma bilineal y continuidad de la forma lineal).

3. Considere el problema variacional correspondiente a la transmisión de calor en un medio tridimensional con coeficientes variables en $\mathbb{R}^3$. Hallar $u \in V$ tal que

$$a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in V \tag{3}$$

donde

$$\begin{aligned} V &= \{v \in H^1(\Omega) : \quad v = 0 \text{ sobre } \Gamma_1\} \\ a(v,w) &= \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} k_i(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i}\,dx \\ L(v) &= \int_\Omega fv\,ds + \int_{\Gamma_2} gv\,ds \end{aligned} \tag{4}$$

Suponga que Ω está compuesto por dos partes Ω_1 y Ω_2 con frontera común S, y suponga que los coeficientes $k_i(x)$ están definidos en la forma

$$k_i(x) = \begin{cases} \kappa_1 & ; \quad \text{for } x \in \Omega_1 \\ \kappa_2 & ; \quad \text{for } x \in \Omega_2 \end{cases} \tag{5}$$

donde κ_i son constantes positivas. En este caso la formulación variacional (3) modela la conducción del calor estacionaria en un cuerpo isotrópico compuesto por dos materiales con coeficientes de conductividad κ_1 y κ_2 que ocupan las regiones Ω_1 y Ω_2 si y sólo si:

$$\begin{aligned} -\kappa_j \Delta u &= f, && \text{en } \Omega_j,\ j = 1,2 \\ u &= 0, && \text{sobre } \Gamma_1 \\ \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} &= g, && \text{sobre } \Gamma_2 \\ \kappa_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} &= \kappa_2 \frac{\partial u_2}{\partial n}, && \text{sobre } S \end{aligned} \tag{6}$$

donde $\frac{\partial u_j}{\partial n}$ indica la derivada de $u\big|_{\Omega_j}$ en la dirección $\boldsymbol{n}$ normal a S. Notar que la última ecuación representa el balance de calor en la frontera S entre Ω_1 y Ω_2. Observe que este balance está automáticamente incorporado en la formulación (3,4).

4. Mostrar que si u es la solución del problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, \quad \text{en } \Omega, \\ u &= 0, \quad \text{sobre } \Gamma, \end{aligned} \tag{7}$$

donde $f \in L_2(\Omega)$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, luego $p = \nabla u$ es la solución del problema de minimización

$$\min_{q \in H_f} \frac{1}{2} \int_\Omega |q|^2 \, dx, \tag{8}$$

donde

$$\begin{aligned} H_f &= \{q \in H : \quad \nabla \cdot \boldsymbol{q} + f = 0, \quad \text{en } \Omega\}, \\ H &= \{\boldsymbol{q} = (q_1, q_2) : \quad q_i \in L_2(\Omega)\}. \end{aligned} \tag{9}$$

El problema de minimización planteado corresponde al *"principio de energía complementaria mínima"* en mecánica. A partir de esta expresión si se reemplaza H_f por un subespacio de dimensión finita se pueden construir métodos de elementos finitos llamados de tipo *"equilibrio"* (en estos métodos la condición de equilibrio $\nabla \cdot \boldsymbol{q} + f = 0$ es satisfecha exactamente en el modelo discreto). Estos métodos pueden en ciertos casos tener ventajas respecto a los métodos convencionales llamados *"métodos en desplazamientos"* (en este tipo de métodos, la relación de compatibilidad $-q_i = k_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}$ es satisfecha automáticamente). *Sugerencia:* Mostrar primero que $p \in H_f$ es una solución de minimización si y sólo si

$$\int_\Omega \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q} \, dx = 0, \quad \forall \boldsymbol{q} \in H_0, \tag{10}$$

donde

$$H_0 = \{\boldsymbol{q} \in H : \nabla \cdot \boldsymbol{q} = 0, \quad \text{en } \Omega\} \tag{11}$$

5. Sea K un triángulo con vértices a^i y sean a^{ij} , $i < j$ los puntos medios de los lados de K. Mostrar que una función $v \in P_1(K)$ está determinada en forma única por los grados de libertad $v(a^{ij})$. Considere el espacio de elementos finitos correspondiente V_h. Es cierto que $V_h \in H^1(\Omega)$? Puede aplicarse en este caso la teoría del capítulo 2? (*Formulación abstracta del método de los elementos finitos para problemas elípticos*).