Introducción al Método de los Elementos Finitos
Guía Núm. 6

1. Formule el método de difusión por líneas de corriente para el problema unidimensional

$$-\varepsilon u_{xx} + u_x = 0, \qquad 0 < x < 1$$
$$u(0) = 1,\ u(1) = 0$$

Analizar los casos $\varepsilon = 0$ y $0 < \varepsilon \ll 1$. Determinar los esquemas de diferencias resultantes en el caso de funciones de prueba lineales por tramos y partición uniforme del dominio. Realice una comparación computacional con el método de Galerkin estándar.

2. Generalizar el método de difusión por líneas de corriente al problema con coeficientes variables:

$$-\varepsilon \Delta u + \operatorname{div}(\beta u) + \sigma u = f, \qquad \text{en } \Omega$$
$$u = 0 \qquad \text{sobre } \Gamma$$

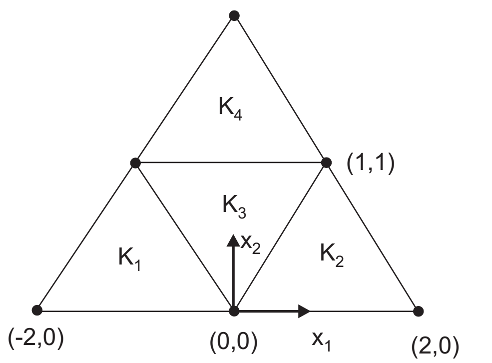
donde $\beta(x)$ y $\sigma(x)$ son coeficientes variables en el espacio. Sugerencia: usar la función de test $v + \delta \operatorname{div}(\beta v)$.

3. Determinar el esquema de diferencias correspondiente al método de Galerkin discontinuo, con funciones lineales, para el problema unidimensional del problema 1, caso $\varepsilon = 0$. Comparar computacionalmente con los resultados obtenidos en el problema 1.

4. Sea u^h la solución del método de Galerkin discontinuo con funciones lineales para el problema

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \qquad \text{en } \Omega \qquad\qquad u = g \qquad \text{sobre } \Gamma_-,$$

sobre la triangulación:



Suponga que u^h_- sobre $\partial K^1_- \bigcup \partial K^2_-$ está dado por

$$\begin{aligned} u^h_-(x_1,0) &= \alpha_1 + \beta_1 x_1, \qquad -2 < x_1 < 0 \\ u^h_-(x_1,0) &= \alpha_2 + \beta_2 x_1, \qquad 0 < x_1 < 2. \end{aligned} \tag{1}$$

Determine u_-^h sobre ∂K_-^4, por ejemplo, asumiendo que $u_-^h(x_1,1) = \alpha_4 + \beta_4 x_1$ para $-1 < x_1 < 1$, y calculando α_4 y β_4 en términos de $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$ y β_2.

Sugerencia: Pruebe primero que $\frac{\partial u^h}{\partial x_2} = 0$ sobre K_1 y K_2, y luego pruebe que:

$$\int_{-1}^{1} u_-^h(x_1,1) v \, dx_1 = \int_{-1}^{1} u_-^h(x_1,0) v \, dx_1 \qquad \text{para } v = 1, x_1.$$

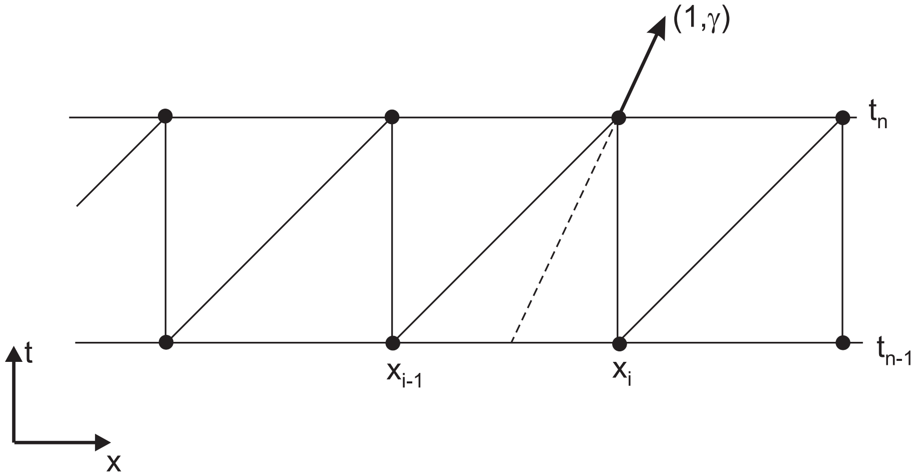
o sea, pruebe que $u_-^h(x_1,1)$, $-1 < x_1 < 1$ es la proyección L_2 sobre el espacio de funciones lineales en $(-1,1)$ de la función lineal por tramos $u_-^h(x_1,0)$ definida en la ecuación (1) para $-1 < x_1 < 1$.

5. Extienda el análisis del problema previo a la ecuación más general $u_\beta = 0$ con β elegido de manera que la frontera entrante sea $\Gamma_- = \partial K_-^1 \bigcup \partial K_-^2$. Basado en este análisis, haga una interpretación del método de Galerkin discontinuo para el problema $u_\beta = 0$ como un método compuesto de dos pasos: *transporte exacto* y *proyección*.

6. Considere el método de Galerkin discontinuo con funciones lineaes para el problema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \gamma \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \qquad & (x,t) &\in R \times R^+ \\ u(x,0) &= g(x) & x &\in R \end{aligned}$$

con $0 \leq \gamma \leq 1$. Use una triangulación uniforme del $R \times R^+$ de la forma:



donde $x_i = ih$, $t_n = nh$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Suponga que representamos la solución discreta $u_-^h(., t_n)$ en el intervalo (x_{i-1}, x_i) en la forma:

$$u_-^h(x, t_n) = U_i^n + \frac{1}{h}(x - x_i')V_i^n, \qquad x \in (x_{i-1}, x_i),$$

donde $x_i' = x_i - \frac{h}{2}$. Pruebe, usando los resultados del problema anterior, que el método de Galerkin discontinuo en este caso es equivalente al esquema explícito siguiente:

$$\begin{bmatrix} U_i^n \\ V_i^n \end{bmatrix} = (1-\gamma) \begin{bmatrix} 1 & -0{,}5\gamma \\ 6\gamma & 1 - 2\gamma - 2\gamma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i^{n-1} \\ V_i^{n-1} \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5(1-\gamma) \\ -6(1-\gamma) & -3 + 6\gamma - 2\gamma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{i-1}^{n-1} \\ V_{i-1}^{n-1} \end{bmatrix}$$

conectando los valores del vector (U, V) asociado con los puntos marcados $\bullet$ en la figura.