Mecánica de Sólidos

Guía N° 1: Tensores - Parte I

1. Sea det A el determinante de la matriz A= $[A_{ij}]$. Mostrar

$$\det \mathrm{A} = \varepsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3} = \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k} = \det \mathrm{A}^T \tag{1}$$

   Deducir luego

$$\varepsilon_{ijk} A_{ip} A_{jq} A_{kr} = (\det \mathrm{A}) \varepsilon_{pqr} \tag{2}$$

   y además

$$\det \mathrm{A} = \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} A_{ip} A_{jq} A_{kr}$$

2. Si A y B son matrices 3×3, usando (1) y (2) mostrar

$$\det \mathrm{AB} = (\det \mathrm{A})(\det \mathrm{B})$$

3. Escribir la matriz de rotación Q para

   a) rotación θ en torno a $\boldsymbol{e}_2$;

   b) rotación ϕ en torno a $\boldsymbol{e}_1$;

   c) rotación (b) seguida por (a).

4. Mostrar que

$$\mathrm{Q} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   es una matriz ortogonal impropia que representa un cambio de base equivalente a reflexión en el plano pasando por $\boldsymbol{e}_3$ e inclinado un ángulo θ respecto a $\boldsymbol{e}_1$.

5. Sean $\boldsymbol{S} \in \mathrm{CT}(3)$ y $\boldsymbol{T} \in \mathrm{CT}(2)$ de componentes S_{ijk} y T_{lm} en $\{\boldsymbol{e}_i\}$. Mostrar que $S_{ijk}T_{lm}$ son componentes de un CT(5). Deducir que $U_{ijk} = S_{ijp}T_{kp}$ y $v_i = S_{ijp}T_{jp}$ son componentes de un CT(3) y un CT(1).

6. Sea $\boldsymbol{T} \in \mathrm{CT}(2)$ tal que $\boldsymbol{Tn} = \boldsymbol{o}$ para todo $\boldsymbol{n} \in \mathbb{E}$. Mostrar que $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{0}$ (tensor nulo de segundo orden).

7. Sean $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T} \in \mathrm{CT(n)}$ y α, β escalares. Probar que $\alpha\boldsymbol{S} + \beta\boldsymbol{T} \in \mathrm{CT(n)}$ (o sea, tensores de un mismo orden pueden sumarse).

8. Probar que $A^{\pm}_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} \pm \delta_{il}\delta_{jk})$ son componentes de un CT(4), y que $A^{+}_{ijkk} = \delta_{ij}$ y $A^{-}_{ijkk} = 0$.