Mecánica de Sólidos

Guía N^o 5: Deformación y movimiento - Parte II

1. Definimos una deformación pura:

$$\boldsymbol{A} = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_3$$

   con $\boldsymbol{e}_i$ vectores fijos mutuamente ortogonales. Si dos fibras están alineadas con $\boldsymbol{M} = \cos\phi \boldsymbol{e}_1 + \sin\phi \boldsymbol{e}_2$ y $\boldsymbol{M}' = -\sin\phi \boldsymbol{e}_1 + \cos\phi \boldsymbol{e}_2$ en la configuración de referencia, calcular el cambio de ángulo durante la deformación. Deducir que el máximo cambio entre todas las fibras posibles es

$$\sin^{-1}\left(\frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}\right)$$

2. Sea el corte simple de representación matricial

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Obtenga la descomposición polar A = RU escribiendo

$$\mathrm{U} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Use la identidad $\mathrm{A}^T\mathrm{A} = \mathrm{U}^2$ para mostrar que $\tan 2\theta = -2/\gamma$ y deduzca que

$$\mathrm{R} = (4+\gamma^2)^{-1/2} \begin{bmatrix} 2 & \gamma & 0 \\ -\gamma & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Dados los cortes simples:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{I} + \gamma \boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n} = 0,\ |\boldsymbol{m}| = |\boldsymbol{n}| = 1 \\ \bar{\boldsymbol{A}} &= \boldsymbol{I} + \bar{\gamma} \bar{\boldsymbol{m}} \otimes \bar{\boldsymbol{n}}, \quad \bar{\boldsymbol{m}} \cdot \bar{\boldsymbol{n}} = 0,\ |\bar{\boldsymbol{m}}| = |\bar{\boldsymbol{n}}| = 1 \end{aligned}$$

   Demostrar que $\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{A}}$ para $\bar{\boldsymbol{m}} = \pm\boldsymbol{m}$ es un corte simple de magnitud $\sqrt{\gamma^2 + \bar{\gamma}^2 \pm 2\gamma\bar{\gamma}\boldsymbol{n} \cdot \bar{\boldsymbol{n}}}$ en dirección $\bar{\boldsymbol{m}}$ con planos de deslizamiento normales a $\gamma\boldsymbol{n} \pm \bar{\gamma}\bar{\boldsymbol{n}}$.

   Demostrar que $\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{A}}$ para $\bar{\boldsymbol{n}} = \pm\boldsymbol{n}$ es un corte simple de magnitud $\sqrt{\gamma^2 + \bar{\gamma}^2 \pm 2\gamma\bar{\gamma}\boldsymbol{m} \cdot \bar{\boldsymbol{m}}}$ en dirección $\gamma\boldsymbol{m} \pm \bar{\gamma}\bar{\boldsymbol{m}}$ con planos de deslizamiento normales a $\bar{\boldsymbol{n}}$.

4. Si el gradiente de deformación $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}$ representa una rotación de un ángulo θ en la dirección del vector unitario $\boldsymbol{n}$, mostrar que el gradiente de desplazamiento $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}$ puede expresarse

$$-\boldsymbol{W} \sin\theta + \boldsymbol{W}^2(1 - \cos\theta)$$

donde $\boldsymbol{W}$ es el tensor antisimétrico de vector axial $\boldsymbol{n}$.

Deducir luego:

$$1 - \cos\theta = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{D}) \qquad \boldsymbol{W} \sin\theta = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}^T)$$

5. Si

$$\boldsymbol{U} = \lambda_1 \boldsymbol{u}^{(1)} \otimes \boldsymbol{u}^{(1)} + \lambda_1^{-1} \boldsymbol{u}^{(2)} \otimes \boldsymbol{u}^{(2)} + \boldsymbol{u}^{(3)} \otimes \boldsymbol{u}^{(3)}$$

donde $\boldsymbol{u}^{(i)}, i = 1, 2, 3$ son los ejes principales Lagrangianos, mostrar que $\boldsymbol{U}$ puede expresarse como $\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{A}$, con $\boldsymbol{R}$ una rotación y $\boldsymbol{A}$ un corte simple en el plano de $\boldsymbol{u}^{(1)}$ y $\boldsymbol{u}^{(2)}$.

6. Mostrar que la derivada temporal Lagrangiana del tensor de deformación $\frac{1}{2}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B})$ es $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{B}$.

7. Para el movimiento de cuerpo rígido

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{X}, t) \equiv \boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{X}$$

mostrar que la velocidad y aceleración pueden escribirse

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{\boldsymbol{c}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c})$$

y

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = \ddot{\boldsymbol{c}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}))$$

respectivamente, con $\boldsymbol{\omega}(t)$ el vector axial del antisimétrico $\dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^T$.

8. Si $J = \det \boldsymbol{A}$ y $\partial J/\partial \boldsymbol{A}$ es el tensor de segundo orden de componentes $(\partial J/\partial \boldsymbol{A})_{\alpha i} = \partial J/\partial A_{i\alpha}$, deducir del resultado del problema 1 de la Guía 1, que

$$\frac{\partial J}{\partial A_{j\beta}} = J B_{j\beta}$$

y en consecuencia:

$$\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{A}} = J\boldsymbol{B}^T$$

Luego, mostrar

$$\dot{\boldsymbol{A}}\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{A}} = J\boldsymbol{\Gamma}$$

y

$$\frac{\dot{J}}{J} = \operatorname{tr} \boldsymbol{\Gamma}$$

9. Si $\boldsymbol{E}$ es el campo de deformación de Green, mostrar que

$$\ddot{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{A}^T(\dot{\boldsymbol{\Sigma}} + \boldsymbol{\Gamma}^T\boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Gamma})\boldsymbol{A}$$

   y deducir que $\dot{\boldsymbol{\Sigma}}+\boldsymbol{\Gamma}^T\boldsymbol{\Sigma}+\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Gamma}$ es un campo tensorial Euleriano objetivo.