

Mecánica de Sólidos

Guía N°7: Elasticidad

1. Sea \mathbf{A} el gradiente de deformación. Mostrar que

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} I_1(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = 2\mathbf{A}^T$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} I_2(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = 2 \{ I_1(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{I} - \mathbf{A}^T \mathbf{A} \} \mathbf{A}^T$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} I_3(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = 2I_3(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{B}^T$$

2. Sea ϕ una función objetiva del gradiente de deformación:

$$\phi(\mathbf{A}) = \phi(\mathbf{U})$$

Si ϕ es isotrópica, mostrar que $\phi(\mathbf{U}) = \phi(\mathbf{V})$ y

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{V}}$$

Confirmar este resultado para $\det \mathbf{A}$.

3. Sean I_1, I_2, I_3 los invariantes principales del tensor de stretch izquierdo \mathbf{V} . Sea $W(I_1, I_2, I_3)$ la energía de deformación de un sólido elástico isotrópico. Obtenga la representación

$$\mathbf{T} = \phi_0 \mathbf{I} + \phi_1 \mathbf{V} + \phi_2 \mathbf{V}^2$$

para el tensor de Cauchy, expresando ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 en términos de $I_1, I_2, I_3, \partial W / \partial I_1, \partial W / \partial I_2, \partial W / \partial I_3$. Deducir además que:

$$\frac{t_i - t_j}{\lambda_i - \lambda_j} = I_3^{-1} \frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_i^{-1} \lambda_j^{-1} \frac{\partial W}{\partial I_2}$$

con t_i, λ_i componentes principales de \mathbf{T}, \mathbf{V} , respectivamente.

4. Mostrar que para un material elástico de Green con energía de deformación $W(I_1, I_2, I_3)$, con I_1, I_2, I_3 los invariantes principales de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$, el tensor nominal de tensión está dado por

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{A}^T + 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \{ I_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}^T \mathbf{A} \} \mathbf{A}^T + 2 I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3} \mathbf{B}^T$$