2 Leyes de conservación

2.1 Energía

En un sistema con s GDL, durante el movimiento las $2s$ cantidades $q_i, \dot{q}_i$ varían en el tiempo. Existen, sin embargo, funciones de $q_i, \dot{q}_i$ que permanecen constantes en el tiempo y sólo dependen de las condiciones iniciales. Estas funciones se llaman *integrales del movimiento*.

En un sistema cerrado con s GDL existen $(2s-1)$ integrales del movimiento. Esto es evidente si se tiene en cuenta que:

(i) La solución general de las ecuaciones de movimiento tiene $2s$ constantes arbitrarias.

(ii) La elección del origen es arbitraria, dado que el tiempo no aparece explícitamente, por lo que podemos eliminar una de las constantes asumiendo una constante t_0 aditiva.

$$\begin{aligned} q_i &= q_i\left(t+t_0, c_1, c_2, \ldots, c_{2s-1}\right) \\ \dot{q}_i &= \dot{q}_i\left(t+t_0, c_1, c_2, \ldots, c_{2s-1}\right) \end{aligned} \qquad (20)$$

(iii) De aquí, podemos expresar $c_1, c_2, \ldots, c_{2s-1}$ como $f(q_i, \dot{q}_i)$

No todas las integrales de movimiento tienen igual importancia. Algunas son más relevantes y se derivan de la homogeneidad e isotropía del espacio tiempo.

Decimos que estas cantidades se *conservan*, son *aditivas*.

Supongamos dos cuerpos que interactúan un cierto tiempo. Como tenemos las integrales aditivas antes y después, son iguales a la suma de las integrales de las partículas separadas. Por lo tanto, las leyes de conservación permiten sacar conclusiones sobre el estado luego de la interacción.

A partir de la *homogeneidad del tiempo* se deriva que el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo.

$$\frac{dL}{dt} = \sum \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \quad \Rightarrow \quad L = L(q_i, \dot{q}_i) \qquad (21)$$

De la ecuación de Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \quad \therefore \quad \frac{dL}{dt} = \sum \dot{q}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \sum \ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt}\sum\left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \qquad (21)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right) = 0 \quad \therefore \quad \boxed{E \triangleq \sum \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = cte} \qquad (22) \quad \textit{Energía del sistema}$$

$$\frac{dE}{dt} = 0 \qquad \textit{(23)}$$

La energía E es aditiva porque L es aditiva. Por lo tanto, la *ley de conservación de la energía* vale para sistemas cerrados y también para un sistema inmerso en un campo exterior constante, es decir, independiente de t. Son los denominados sistemas conservativos.

Para un sistema cerrado o bajo un campo exterior constante:

$$L = T(q, \dot q) - U(q) \qquad \textit{(24)}$$

$T(q, \dot q)$ es una función homogénea cuadrática en las velocidades ($T = a(q)\dot q^2$)

$$\sum \dot q_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = \sum \dot q_i \frac{\partial T}{\partial \dot q_i} = 2T \qquad \textit{(25)}$$ por ser homogénea de grado 2

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}(q)\dot q_i \dot q_k$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial \frac{1}{2}\left(\dot q^T \underline{\underline{A}}\dot q\right)}{\partial \dot q} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{A}}\,\dot q + \underline{\underline{A}}^T \dot q\right) = \underline{\underline{A}}\,\dot q$$ siendo $a_{ik} = a_{ki}$, es decir $\underline{\underline{A}}$ es simétrica

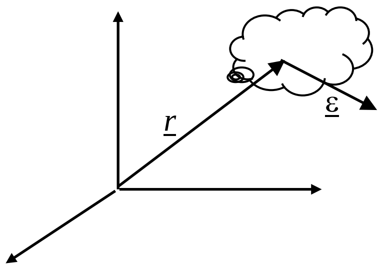
$$\therefore \sum \dot q_i \frac{\partial T}{\partial \dot q_i} = \dot q_i^{\,T} \underline{\underline{A}}\dot q_i = 2T$$

$$E = \sum \dot q_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - L = 2T - T + U = T + U \qquad \textit{(26)}$$

Por lo tanto, la energía total es la suma de la energía cinética más la energía potencial.

2.2 Cantidad de movimiento (momentum)

Debido a la *homogeneidad del espacio*, las propiedades del sistema no cambian cuando realizamos una traslación paralela de todo el sistema en el espacio.



El sistema sufre un desplazamiento infinitesimal $\underline{\varepsilon}$ arbitrario. Luego:

$$\underline{r} \rightarrow \underline{r} + \underline{\varepsilon}$$

El lagrangiano no se modifica por esta traslación:

$$\delta L = \sum \frac{\partial L}{\partial \underline{r}_a} \delta \underline{r}_a = \underline{\varepsilon} \cdot \sum \frac{\partial L}{\partial \underline{r}_a}$$

$$\therefore \quad \delta L = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sum \frac{\partial L}{\partial \underline{r}_a} = 0} \qquad (27)$$

Siendo $\dot{\underline{r}}_a = \underline{v}_a$, según la ecuación de Lagrange será:

$$\sum \frac{\partial L}{\partial \underline{r}_a} = \frac{d}{dt} \underbrace{\sum \frac{\partial L}{\partial \underline{v}_a}}_{cte} = 0 \qquad (28)$$

Donde: $\boxed{\underline{P} \triangleq \sum \frac{\partial L}{\partial \underline{v}_a}}$ *(29) cantidad de movimiento, impulso total, momento cinético, momentum o momento lineal.*

Puede escribirse:

$$L = \sum_a \frac{1}{2} m_a \underline{v}_a^2 - U(\underline{r}_1, \underline{r}_2, ...)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{v}_a} = m_a \underline{v}_a \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{P} = \sum m_a \underline{v}_a} \qquad (30)$$

(i) Es evidente la aditividad de $\underline{P}$, ya que $\underline{P} = \sum \underline{P}_a$, exista interacción o no entre las partículas.

(ii) Las 3 componentes de $\underline{P}$ se conservan en ausencia de campo externo. Si hubiera un campo externo independiente de ciertas direcciones, en dichas direcciones habrá conservación de $\underline{P}$.

(iii) $\frac{\partial L}{\partial \underline{r}_a} = \frac{\partial U}{\partial \underline{r}_a} = F_a$ es la fuerza que actúa sobre la partícula a-ésima. Deberá ser entonces $\sum \frac{\partial L}{\partial \underline{r}_a} = \sum \frac{\partial U}{\partial \underline{r}_a} = \sum F_a = 0$. *(31)*

Para un sistema de dos partículas será:

$$\boxed{\underline{F}_1 + \underline{F}_2 = 0}$$

principio de acción y reacción
3ra ley de Newton

Si el movimiento se describe en coordenadas generalizadas, será $\underline{r}_a = \Psi_a(q_i)$

Definimos: $\underline{p}_i \triangleq \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ *(32) momentum generalizado*

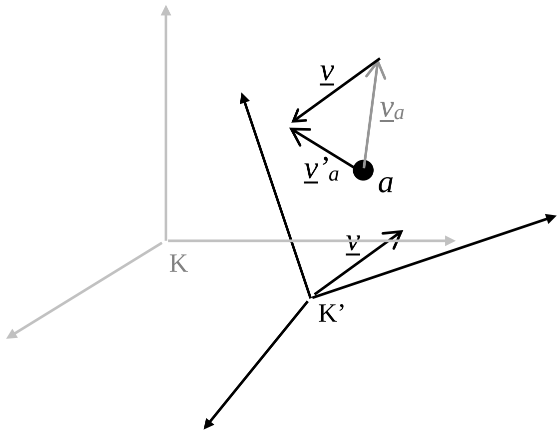
$\underline{F}_i \triangleq \frac{\partial L}{\partial q_i}$ *(33) fuerzas generalizadas*

De las ecuaciones de Lagrange:
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{\underline{p}}_i = \underline{F}_i} \qquad (34)$$

Las $\underline{p}_i$ son funciones lineales homogéneas en las velocidades $\dot{q}_i$

2.3 Centro de masas

La cantidad de movimiento de un sistema mecánico cerrado tiene valores diferentes en marcos de referencia inerciales distintos.



El MI K' se desplaza con $\underline{v}$ respecto a K. Luego, para una partícula a, será:

$$\underline{v}_a = \underline{v}'_a + \underline{v}$$

$$\underline{P} = \sum m_a \underline{v}_a = \underbrace{\sum m_a \underline{v}'_a}_{\underline{P}'} + \underline{v}\sum m_a = \qquad (35)$$
$$= \underline{P}' + \underline{v}\sum m_a$$

En particular, existe un MI para el cual $\underline{P}' = 0$

$$\therefore \underline{V} = \frac{\underline{P}}{\sum m_a} = \frac{\sum m_a \underline{v}_a}{\sum m_a} \qquad (36)$$

Si el momento lineal del sistema es cero, el sistema está en reposo en ese MI. Luego, $\underline{V}$ es la velocidad del "conjunto". Por *(36)*:

$$\underline{P} = \left(\sum m_a\right)\cdot \underline{V} = \mu \cdot \underline{V} \qquad (37)$$

donde μ es la *masa total del sistema*. Luego, en *(36)*:

$$\underline{V} = \frac{\underline{P}}{\sum m_a} = \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\sum m_a \underline{v}_a}{\sum m_a}\right)}_{\underline{R}} \qquad (38)$$

donde $\underline{R}$ es la posición del *centro de masas* del sistema.

La energía de un sistema mecánico en reposo (en conjunto) se llama *"energía interna, E_i"* . Esta incluye la energía cinética del movimiento relativo de las partículas, y la energía potencial de su interacción. La energía total de un sistema moviéndose como un todo será:

$$E = \frac{1}{2}\mu \cdot \underline{V}^2 + E_i \qquad (39)$$

$$E = \frac{1}{2}\sum m_a \underline{v}_a^2 + U = \frac{1}{2}\sum m_a \left(\underline{v}'_a + \underline{V}\right)^2 + U = \qquad (40)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\sum m_a \underline{V}^2}_{\frac{1}{2}\mu \underline{V}^2} + \underbrace{\underline{V} \cdot \sum m_a \underline{v}'_a}_{\underline{V} \cdot \underline{P}'} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum m_a \underline{v}_a^2 + U}_{E_i}$$

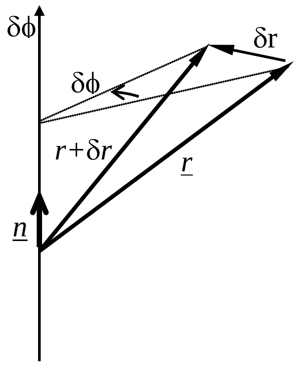
$$\therefore \qquad \boxed{E = \frac{1}{2}\mu \underline{V}^2 + \underline{V} \cdot \underline{P}' + E_i} \qquad (41)$$

Si el sistema está en reposo, será $\underline{P}' = 0$

2.4 Momentum angular

Esta ley de conservación se genera a partir de la *isotropía del espacio*. Las propiedades de un sistema cerrado son invariantes frente a rotaciones arbitrarias de todo el sistema en el espacio.

Consideraremos rotaciones infinitesimales:



$$\underline{\delta\phi} = \underline{n} \cdot \delta\phi \quad ; \quad \underline{\delta r} = \underline{\delta\phi} \cdot \underline{r} \quad ; \quad \underline{\delta v} = \underline{\delta\phi} \times \underline{v} \qquad (42)$$

donde:

$\delta\phi$: variación angular

$\underline{n}$: vector unitario

$\underline{\delta v}$: variación de la velocidad

$$\delta L = \sum_a \left(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \underline{r}_a}}_{\dot{\underline{P}}_a = \underline{F}_a} \delta \underline{r}_a + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \underline{v}_a}}_{\underline{P}_a} \delta \underline{v}_a \right) = 0 \qquad (43)$$

por ser δϕ arbitrario

$$\therefore \quad \delta L = \sum_a \left(\dot{\underline{P}}_a \cdot \underline{\delta\phi} \times \underline{r}_a + \underline{P}_a \cdot \underline{\delta\phi} \times \underline{v}_a \right) = \qquad (44)[1]$$

$$= \underline{\delta\phi} \cdot \sum_a \left(\underline{r}_a \times \dot{\underline{P}}_a + \underbrace{\underline{v}_a \times \underline{P}_a}_{= 0 \text{ por ser colineales}} \right) = \qquad (45)$$

[1] $\underline{a} \cdot \underline{b} \times \underline{c} = \underline{b} \cdot \underline{c} \times \underline{a}$ permutación cíclica de los productos

$$= \underline{\delta\phi} \cdot \frac{d}{dt}\sum_a \left(\underline{r}_a \times \underline{P}_a\right) = 0 \qquad \textit{(46)}$$

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dt}\underbrace{\sum_a \left(\underline{r}_a \times \underline{P}_a\right)}_{\underline{M}} = 0} \qquad \textit{(47)}$$

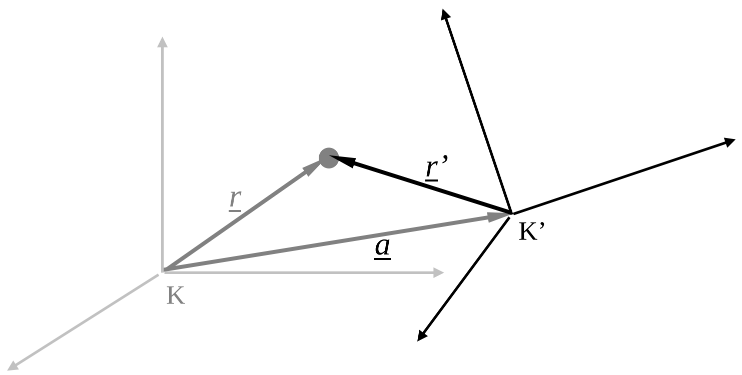
cantidad de movimiento angular o momentum angular o momento de momento = constante

Notar que por la definición $\underline{M} = \sum_a \underline{r}_a \times \underline{P}_a$; $\underline{M}$ es aditivo, independientemente de las interacciones entre las partículas.

Notar que no existen otras integrales del movimiento aditivas. Todo sistema cerrado tiene siete integrales del movimiento aditivas:

- ✓ 1 integral de energía (escalar)
- ✓ 3 integrales de momento lineal (vectorial)
- ✓ 3 integrales de momento angular (vectorial)

Notar:



$$\underline{M} = \sum \underline{r}_a \times \underline{P}_a \qquad \textit{(48)}$$

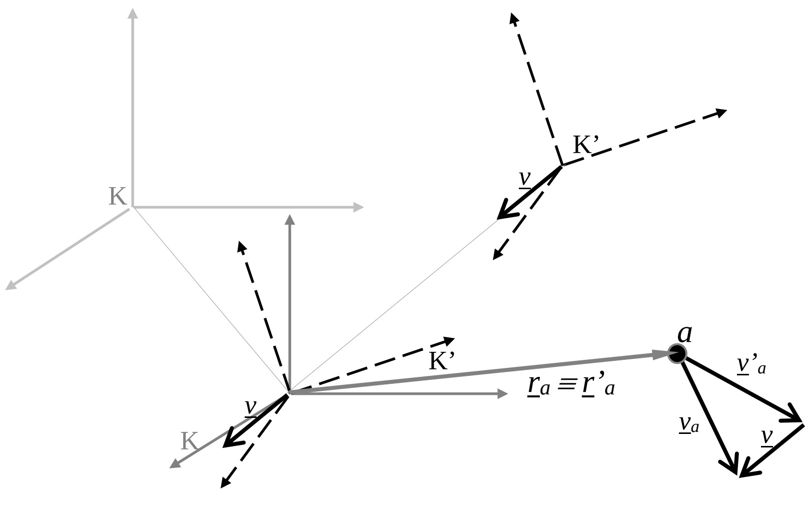
$$\underline{r}_a = \underline{a} + \underline{r}'_a$$

$$\underline{a} = cte.$$

$$\underline{M} = \sum \underline{r}'_a \times \underline{P}_a + \underline{a} \times \underbrace{\sum \underline{P}_a}_{\underline{P}}$$

$$\boxed{\underline{M} = \underline{M}' + \underline{a} \times \underline{P}} \qquad \textit{(49)}$$

Si tenemos dos MI que viajan a velocidades distintas:



En el momento en que estos marcos se cruzan, resulta $\underline{r}_a \equiv \underline{r}'_a$, entonces:

$$\underline{M} = \sum \underline{r}_a \times \underline{P}_a = \underbrace{\sum m_a \cdot \underline{r}_a \times \underline{v}'_a}_{\underline{M}'} + \underbrace{\left(\sum m_a \cdot \underline{r}_a\right)}_{\mu \cdot \underline{R}} \times \underline{V} \qquad (50)$$

$$\therefore \qquad \boxed{\underline{M} = \underline{M}' + \mu \cdot \underline{R} \times \underline{V}} \qquad (51)$$

Si el sistema está en reposo en $K' \Rightarrow \mu \cdot \underline{V} = \underline{P}$, además, será:

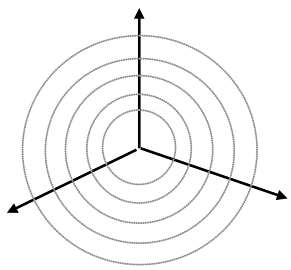
$$\underline{M} = \underline{M}' + \underline{R} \times \underline{P} \qquad (52)$$

Momento angular intrínseco — Momento angular del conjunto

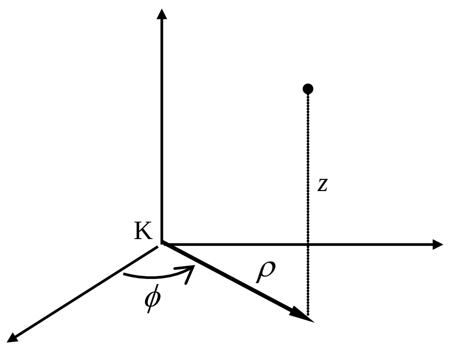
En un sistema cerrado con origen arbitrario, se conservan las tres componentes de $\underline{M}$. Si existe un campo externo, las leyes de conservación valen en forma restringida. Si tenemos un campo con simetría en torno a un eje, z por ejemplo, las propiedades mecánicas no varían por rotaciones arbitrarias en torno a ese eje, es decir, la componente Mz se conserva.

Distinguimos dos casos:

a) Campo simétrico central: La energía es función de la distancia a un punto particular (centro). Por lo tanto, existe simetría con respecto a cualquier eje que pase por el centro, y la componente del momento angular a lo largo de cualquier eje que pase por el centro se conserva.



b) Campo homogéneo en z, las equipotenciales son planos z = cte $\Rightarrow Mz$ = cte. Si usamos coordenadas cilíndricas:



$$\begin{aligned} x_a &= \underline{\rho}_a \cos\phi_a \\ y_a &= \underline{\rho}_a \sin\phi_a \\ z_a &= z_a \end{aligned} \qquad (53)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_a &= \dot{\underline{\rho}}_a \cos\phi_a - \underline{\rho}_a \dot{\phi}_a \sin\phi_a \\ \dot{y}_a &= \dot{\underline{\rho}}_a \sin\phi_a + \underline{\rho}_a \dot{\phi}_a \cos\phi_a \\ \dot{z}_a &= \dot{z}_a \end{aligned} \qquad (54)$$

$$T = \sum \frac{m_a}{2}\left(\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2\right) = \sum \frac{m_a}{2}\left(\dot{\rho}_a^2 + \rho_a^2\dot{\phi}_a^2 + \dot{z}_a^2\right) \qquad (55)$$

$$\underline{M} = \sum \underline{r}_a \times \underline{P}_a = \sum \begin{Bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{Bmatrix} \times m_a \begin{Bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{y}_a \\ \dot{z}_a \end{Bmatrix} \qquad (56)$$

$$\underline{\underline{Mz}} = \sum m_a \left(x_a \dot{y}_a - y_a \dot{x}_a \right) = \sum m_a \rho_a^2 \dot{\phi}_a \qquad (57)$$

Notar que:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_a} = m_a \rho_a^2 \dot{\phi}_a \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{Mz}} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_a} = cte \qquad (58)$$