

3 Integración de las ecuaciones del movimiento

3.1 Movimiento en una dimensión

Sea un sistema de 1 GDL. Las expresiones de su lagrangiano en coordenadas generalizadas y cartesianas, respectivamente, serán:

$$L = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 - U(q) \quad (59)$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - U(x)$$

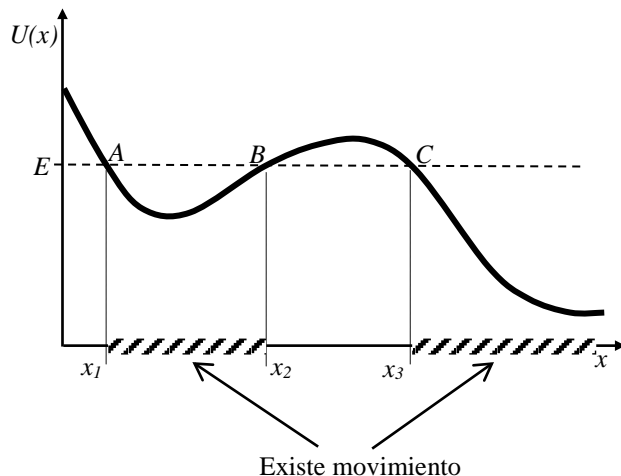
Estas ecuaciones pueden integrarse en forma general sin escribir las ecuaciones del movimiento. Siendo:

$$E = \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{x}^2}_{\geq 0} + U(x) \quad (60)$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x))} \quad (61)$$

$$t = \int dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\underbrace{E}_{cte} - U(x)}} + \underbrace{C}_{cte} \quad (62)$$

Como $T \geq 0$, el movimiento sólo tiene lugar en las regiones donde $E \geq U(x)$. Los puntos donde $U(x)=E$ se denominan "turning points". En dichos puntos, se cumple que $\dot{x} = 0$.



En la región A, B hay dos *turning points*. Cuando se da esta condición se dice que es un *movimiento finito*.

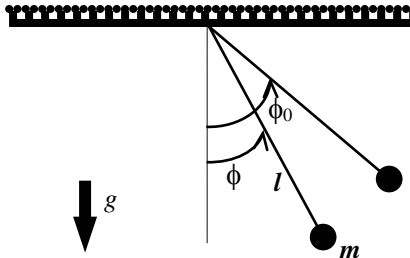
La región C,∞, en cambio, tiene sólo un *turning point*. Podríamos tener también casos sin puntos límites. Estos casos se conocen como de *movimiento infinito*.

En general nos interesa el primer caso. Un movimiento finito en una dimensión es *oscilatorio*, la partícula se mueve en uno y otro sentido entre los dos puntos límites. El tiempo que tarda en ir y volver entre x_1 y x_2 se denomina *período*.

$$T(E) = \sqrt{2m} \cdot \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \quad (63)$$

Los puntos x_1 y x_2 son raíces de $U(x) = E$

Ejemplo: péndulo simple



$$T(E) = 2\sqrt{2m} \cdot \int_0^{\phi_0} \frac{l \cdot d\phi}{\sqrt{mg(\cos \phi - \cos \phi_0)}} \quad (64)$$

$$U(\phi) = mgl \cos \phi \quad ; \quad K = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\phi}^2 \quad (65)$$

$$x \doteq l\phi \quad (66)$$

$$T(E) = 2\sqrt{2 \frac{l}{g}} \cdot \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos \phi - \cos \phi_0}} = 2\sqrt{2 \frac{l}{g}} \cdot \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{2 \left(\sin^2 \frac{\phi_0}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2} \right)}} \quad (67)^1$$

se define ξ tal que $\sin \xi = \frac{\sin \frac{\phi}{2}}{\sin \frac{\phi_0}{2}} \Rightarrow \cos \xi d\xi = \frac{\frac{1}{2} \cos \frac{\phi}{2}}{\sin \frac{\phi_0}{2}} d\phi$ (68)

$$d\phi = 2 \sin \frac{\phi_0}{2} \frac{\cos \xi}{\cos \frac{\phi}{2}} d\xi \quad \therefore \quad \begin{cases} \phi = 0 \Rightarrow \xi = 0 \\ \phi = \phi_0 \Rightarrow \xi = \pi/2 \end{cases}$$

$$\therefore \sqrt{\left(\sin^2 \frac{\phi_0}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2} \right)} = \sin \frac{\phi_0}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \xi} = \sin \frac{\phi_0}{2} \cos \xi \quad (69)$$

$$T(E) = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{2d\xi}{\cos \frac{\phi}{2}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{2d\xi}{\underbrace{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\phi}{2}}}_{1 - \sin^2 \frac{\phi_0}{2} \sin^2 \xi}} = \quad (70)$$

$$= 4\sqrt{\frac{l}{g}} K \left(\sin \frac{\phi_0}{2} \right) \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha - \cos \beta &= \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \left(\cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2} \right) = 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \left(1 - 2\sin^2 \frac{\beta}{2} \right) = \\ &= 2 \left(\sin^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \end{aligned}$$

donde:
$$K(k) = \int \frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \xi}} \quad (72)$$

es una integral elíptica completa de 1ª especie.

∴
$$T(\phi_0) = 4\sqrt{\frac{l}{g}} K\left(\sin \frac{\phi_0}{2}\right) \quad (73)$$

para amplitudes pequeñas, $\sin \frac{\phi_0}{2} \approx \frac{\phi_0}{2} \ll 1$

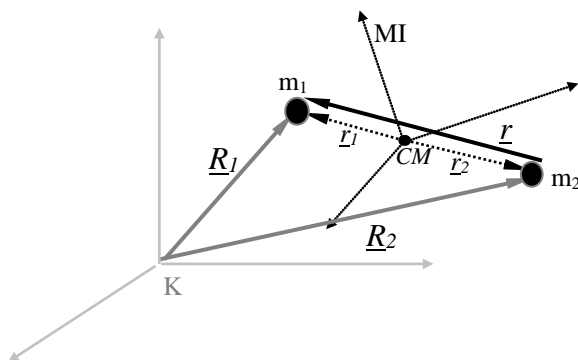
Luego, expandiendo K :
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \frac{\phi_0^2}{16} + \dots \right] \quad (74)$$

ϕ_0	$k = \sin \phi_0/2$	<i>Elliptic</i> (k)	$\frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\phi_0^2}{16} + \dots \right)$
0,1	0,05	1,5718	1,5718
0,2	0,0998	1,5747	1,5747
0,3	0,1494	1,5797	1,5796
0,4	0,1987	1,5866	1,5865

3.2 Masa reducida

Puede obtenerse una solución general para el denominado *problema de los dos cuerpos*, en el cual dos partículas interactúan.

En primer lugar, se descompone el movimiento del sistema en el movimiento del centro de masas (CM) y los movimientos relativos de las partículas con respecto a dicho centro de masas.



$$r \triangleq r_1 - r_2 = R_1 - R_2 \quad (75)$$

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{r}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}_2^2 - U(|r_1 - r_2|) =$$

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{r}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}_2^2 - U(|r|) \quad (76)$$

Consideramos un MI solidario con el CM. Definimos los $r_1; r_2$ en este MI. Luego, en CM será: $m_1 r_1 + m_2 r_2 = 0$

$$\therefore r = r_1 + \frac{m_1}{m_2} r_2 \Rightarrow r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \wedge r_2 = \frac{-m_1}{m_1 + m_2} r \quad (77)$$

$$\therefore L = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{r}^2 - U(|r|) \quad (78)$$

$$\therefore L = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}_{m: \text{ masa reducida}} \dot{r}^2 - U(|r|) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - U(|r|) \quad (79)$$

$$\underline{R}_1 = \underline{R} + \underline{r}_1 = \underline{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \underline{r} \quad ; \quad \underline{R}_2 = \underline{R} + \underline{r}_2 = \underline{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \underline{r} \quad (80)$$

La expresión (80) es equivalente al lagrangiano de una partícula que se mueve en un campo central, simétrico en origen, que analizaremos en el punto siguiente.

3.3 Movimiento de una partícula en un campo central

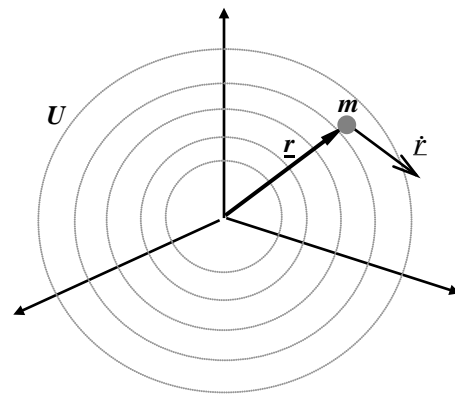
Determinaremos ahora el movimiento de una partícula en un campo externo cuya energía potencial dependa solamente de la distancia r a un punto fijo. Un campo de este tipo se denomina *campo central*.

Sobre la partícula actúa una fuerza debida al campo:

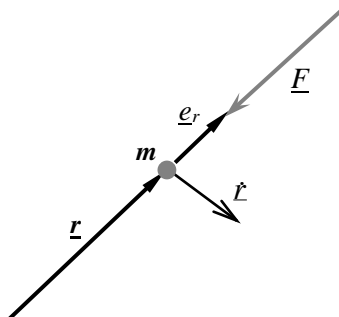
$$\underline{F} = - \frac{\partial U(|r|)}{\partial \underline{r}} = - \frac{dU}{dr} \frac{\partial r}{\partial \underline{r}} \quad (81)$$

donde:

$$r \triangleq |r| \quad ; \quad r = \sqrt{\underline{r} \cdot \underline{r}} \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial \underline{r}} = \frac{\underline{r}}{r} \therefore \quad (82)$$



es un vector unitario \underline{e}_r

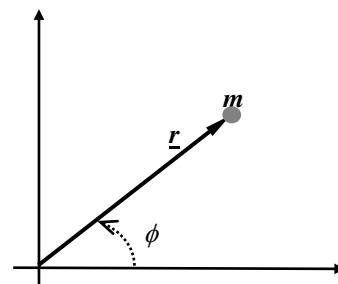


La fuerza \underline{F} es un vector que apunta al centro del campo. Además, los momentos lineal y angular serán:

$$\underline{P} = m \cdot \dot{\underline{r}} \quad ; \quad \underline{M} = \underline{r} \times \underline{P} = cte$$

El momento angular \underline{M} es constante según (47) y normal a \underline{r} en el origen, por lo tanto, el movimiento transcurre en un plano normal a \underline{M} . Si representamos ese plano, y usando coordenadas polares, se puede escribir el lagrangiano del sistema:

$$L = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + (r\dot{\phi})^2] - U(r) \quad (83)$$



Se aprecia que L es independiente de ϕ , dependiendo en cambio de su derivada. Por lo tanto:

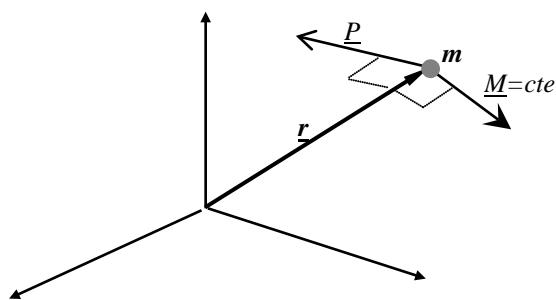
Definición:

Coordenada cíclica: se denomina así a toda coordenada generalizada q_i que no entra en forma explícita en el lagrangiano.

Notar que si tenemos una coordenada cíclica, $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ (84)

$\therefore p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = cte$ (85) es una integral de movimiento.

Esta característica permite simplificar considerablemente los problemas en los que existen coordenadas cíclicas.



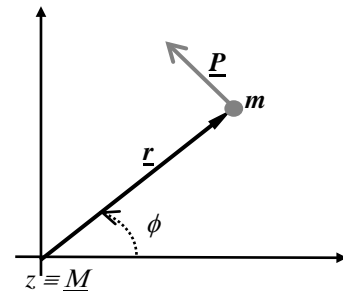
En este caso, será:

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m r^2 \dot{\phi}$$

constante, equivale al momento angular $M_z = \underline{M}$, y regresamos a la ley de conservación del momento angular.

Si se representa en el plano, será:

$$r = \begin{Bmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \\ 0 \end{Bmatrix} ; v = \dot{r} = \begin{Bmatrix} \dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi \\ \dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (86)$$



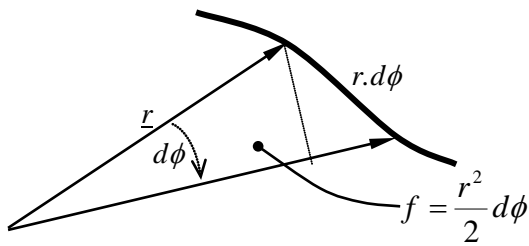
$$\underline{M} = r \times P = r \times m \dot{r} = r \times m v$$

$$\therefore \underline{M} = m \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \underbrace{r \dot{r} \cos \phi \sin \phi + r^2 \dot{\phi} \cos^2 \phi - r \dot{r} \cos \phi \sin \phi + r^2 \dot{\phi} \sin^2 \phi}_{r^2 \dot{\phi}} \end{Bmatrix} \quad (87)$$

$$\therefore \dot{\phi} = \frac{M_z}{m r^2} \quad (88)$$

$$\therefore E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{M^2}{m r^2}}_{U_{eff}(r)} + U(r) = E(r) \quad (89)$$

$\frac{1}{2} \frac{M^2}{mr^2}$ se denomina *energía centrífuga*.



$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = \frac{r^2}{2} \frac{d\phi}{dt} \Rightarrow M_z = 2m\dot{f} = cte \quad (90)$$

\dot{f} : Velocidad sectorial o areal.

$$\therefore \text{si } M_z = cte \Rightarrow \dot{f} = cte$$

Por lo tanto, en tiempos iguales, el radio vector de la partícula describe áreas iguales. Esta es la conocida *Segunda ley de Kepler*.

$$\dot{\phi} = \frac{M}{mr^2} \quad ; \quad d\phi = \frac{M}{mr^2} dt \quad (91)$$

$$\therefore E = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + U(r) = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{M^2}{mr^2}}_{U_{eff}(r)} + U(r) \quad (92)$$

$$\therefore \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{M^2}{m^2 r^2}} \quad (93)$$

$$\therefore t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{M^2}{m^2 r^2}}} + C$$

(94) Ecuación para $\underline{r}(t)$

$$\therefore \phi = \int \frac{M}{mr^2 \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{M^2}{m^2 r^2}}} dr + C$$

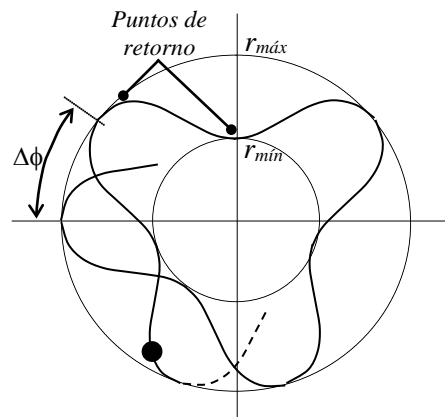
(95) Ecuación de la trayectoria

\underline{M} se conserva, luego, si $\dot{\phi} > 0 \Rightarrow$ se conserva el signo de $\dot{\phi} \Rightarrow$ el movimiento es monótono en ϕ .

Si $E = U_{eff} = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}$ en estos puntos

será $\frac{dr}{dt} = 0$; por lo tanto tendremos r_{min} y r_{max} . En general la curva no es cerrada, por lo tanto existirá un $\Delta\phi = \frac{2\pi n}{n}$.

Existen dos tipos de campos centrales donde los caminos son cerrados, aquellos en que $U \propto 1/r$ y aquellos en que $U \propto r^2$.



$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{M^2}{m^2 r^2}} = 0 \quad (96) \text{ Condición de punto de retorno}$$

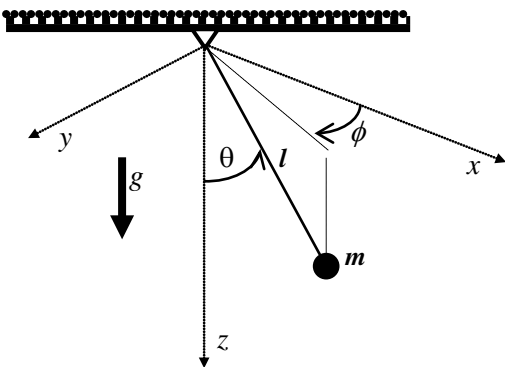
$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{M^2}{m^2 r^2}}} + C \quad (97)$$

$$\phi = \int \frac{M/r^2}{\sqrt{2m(E - U(r)) - \frac{M^2}{r^2}}} dr + C \quad (98)$$

Notar que los integrandos de las expresiones (97) y (98) cambian de signo en los puntos de retorno, hecho que debe ser tenido en cuenta para su resolución numérica. Además, la curva es simétrica con respecto a los puntos de retorno, por lo que basta con resolver una sola vez desde r_{\min} hasta r_{\max} .

Notar que debido a que $\frac{1}{2} \frac{M^2}{mr^2} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty$ la partícula no puede alcanzar el centro del campo $U(r)$, aún cuando este sea atractivo. La única posibilidad es que $U(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty$ más rápido que la energía centrífuga $\frac{1}{2} \frac{M^2}{mr^2}$.

Ejemplo: péndulo esférico



$$r = \begin{cases} l \sin \theta \cos \phi \\ l \sin \theta \sin \phi \\ l \cos \theta \end{cases}$$

El lagrangiano del sistema es:

$$L = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + gml \cos \theta \quad (99)$$

Se observa que ϕ no aparece en forma explícita en L , por lo que es una coordenada cíclica. Por lo tanto:

$$\therefore P_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = ml^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta = cte = Mz \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{Mz}{ml^2 \sin^2 \theta} \quad (100)$$

Se observa que el signo no cambia.

La expresión de la energía será:

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - mgl \cos \theta = \\
 &= \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{M_z^2}{ml^2 \sin^2 \theta} - mgl \cos \theta}_{U_{eff}(\theta)}
 \end{aligned} \tag{101}$$

La expresión (101) es equivalente a la (65) del péndulo simple, pero con $U_{eff}(\theta)$.

$$t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{ml^2} (E - U_{eff})}} \quad ; \quad \phi = \frac{M_z^2}{l\sqrt{2m}} \int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta \sqrt{E - U_{eff}}} \tag{102}$$

Las expresiones (102) pueden también ser llevadas a la forma de integrales elípticas de 1° y 3° especie, respectivamente. La componente M_z se conserva. El movimiento ocurre cuando $E > U_{eff}$.

$$E = U_{eff} \Rightarrow E = \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{ml^2 \sin^2 \theta} - mgl \cos \theta = \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{ml^2 (1 - \cos^2 \theta)} - mgl \cos \theta \tag{103}$$

$$E - E \cos^2 \theta - \frac{M_z^2}{2ml^2} + mgl \cos \theta - mgl \cos^3 \theta = 0 \tag{104}$$

La expresión (104) es una ecuación cúbica en $\cos \theta$, que tendrá dos soluciones entre +1 y -1.

3.4 El problema de Kepler

Tiene gran importancia el estudio de problemas en un campo central cuya energía potencial es inversamente proporcional a r , y la fuerza correspondiente es inversamente proporcional a r^2 . En esta categoría cae el campo gravitatorio newtoniano y la interacción electrostática de Coulomb.

Se podrá escribir entonces:

$$U \propto 1/r \quad ; \quad F \propto 1/r^2 \tag{105}$$

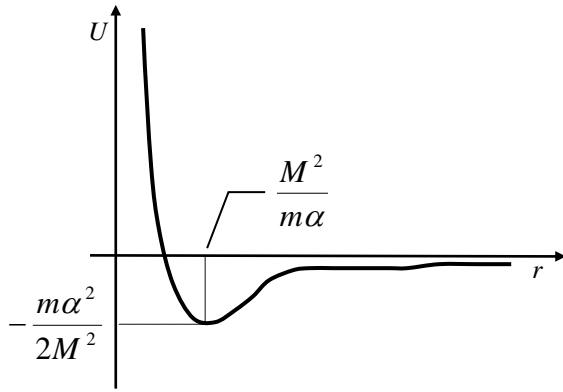
Consideraremos en primer lugar un campo atractivo. Luego:

$$U = -\alpha/r \quad ; \quad \alpha > 0; \text{cte}$$

$$\text{La energía potencial efectiva será: } U_{eff} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} \tag{110}$$

$$r \longrightarrow 0 \Rightarrow U_{eff} \longrightarrow \infty$$

$$r \longrightarrow \infty \Rightarrow U_{eff} \longrightarrow 0$$



La energía potencial efectiva tiene un mínimo en $r = \frac{M^2}{m\alpha}$. En dicho punto

$$\text{será } U_{\text{eff, min}} = -\frac{m\alpha^2}{2M^2}$$

Según el nivel de energía E se determinará la forma de la trayectoria de la oscilación, pudiendo ser distintos tipos de cónicas. Para determinar la trayectoria, a partir de la ec. (95), será:

$$\phi = \int \frac{\frac{M}{r^2}}{r^2 \sqrt{2mE + \frac{2m\alpha}{r} - \frac{M^2}{r^2}}} dr + C \quad (111)$$

Integrando:

$$\phi = \cos^{-1} \left(\frac{\frac{M}{r} + \frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M^2}}} \right) + C \quad (112)$$

Si $E < 0$, la excentricidad e de la cónica será menor que uno, y por lo tanto la curva será una elipse. Si $E > 0$, será $e > 1$, y la curva corresponderá a una hipérbola. El tercer caso es $E = 0$, correspondiente a una partícula que parte desde el reposo en el infinito. La trayectoria será una parábola con $e = 1$.