Curso: Métodos Iterativos para la Solución de Grandes Sistemas de Ecuaciones Lineales y No Lineales

Guía Nro 1. Métodos iterativos estacionarios

Rodrigo Paz, Mario Storti
Centro Internacional de métodos Computacionales en Ingeniería

17 de abril de 2007

1. **Aplicación del Método de Richardson sobre-relajado a sistemas simétricos, definidos positivos (*spd*)**:

   a) Generar aleatoriamente una matriz simétrica y positiva definida A y un miembro derecho b con
   ```
   n=5; c=1;
   a=rand(n);
   a=(a+a');
   a=expm(c*a);
   b=rand(n,1);
   ```
   Porqué es esta matriz spd?

   b) Determinar para qué valores del parámetro de relajación ω el esquema de Richardson es convergente. Determinar la tasa de convergencia.

   $$x_{k+1} = x_k + \omega\,(b - Ax_k) \tag{1}$$

   c) Observar el comportamiento de una componente dada en función de las iteraciones (Graficar curvas de $(xk)_i$ en función de k. Que se observa para $\omega = \omega_{\mathrm{opt}}$? Explicar.

2. **Ecuación de Poisson 1D:** Consideremos la ecuación de Poisson 1-dimensional en un dominio $0 < x < 1$ con condiciones Dirichlet en $x = 0, 1$:

   $$\phi'' = -f \tag{2}$$

   Consideramos una discretización por diferencias finitas de paso constante $h = 1/N$. Los nodos son $x_j = jh$, $j = 0, \ldots, N$ y las ecuaciones para los nodos interiores $1 < j < N - 1$ son

   $$h^{-2}(-\phi_{j+1} + 2\phi_j - \phi_{j-1}) = f_j \tag{3}$$

   ϕ_0 y ϕ_N son datos dados por las condiciones de contorno Dirichlet. El sistema puede ponerse de la forma $Ax = b$ con

   $$A = h^{-2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix} \tag{4}$$

a) Verificar que A es simétrica y definida positiva.

b) Calcular los autovalores de A y el número de condición de A, para $N = 10, 30, 100$.

c) Verificar que el número de condición de A se comporta de la forma $\mathrm{cond}(A) \sim N^2 = 1/h^2$, al refinar.

d) Graficar las autofunciones de A para los autovalores más bajos y para los más altos.

e) Verificar cuán buena es la aproximación de $\|A\|$ al radio espectral de A.

f) Efectuar experimentos numéricos con $\omega = \omega_{\rm opt}, 0{,}7\omega_{\rm opt}$, etc... como antes.

g) Evaluar las tasas de convergencia en forma experimental y teórica.

3. **Ecuación de Laplace 2-dimensional:** Lo mismo que en el ejercicio anterior pero en 2D en el dominio $0 < x, y < 1$ con condiciones dirichlet homogéneas en todo el contorno y $f = 1$. Una ventaja de los métodos iterativos es que no es necesario armar la matriz del sistema. En efecto, sólo necesitamos poder calcular el residuo r_k a partir del vector de estado x_k. Estudiar la implementación que se provee a través del script `poisson.m` que llama sucesivamente a la función `laplacian.m`. En `poisson.m` el vector de estado es de tamaño $(N-1)^2$ donde hemos puesto todos los valores de ϕ encolumnados. La función `laplacian(phi)` calcula el laplaciano del vector de iteración ϕ. El laplaciano es calculado convirtiendo primero el vector de entrada a una matriz cuadrada de $(N-1) \times (N-1)$ y despues se evalúa la aproximación estándar de 5 puntos al laplaciano

$$(\Delta\phi)_{ij} = h^{-2}(\phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} + \phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} - 4\phi_{ij}) \tag{5}$$

   a) Estimar el autovalor máximo con la norma 1 de A.

   b) Efectuar experimentos numéricos con varios valores de ω. Evaluar tasas de convergencia en forma experimental.

4. **Analogía entre el método de Richardson relajado y la solución seudo-temporal.** Consideremos el sistema ODE's

$$\frac{dx}{dt} = -Ax + b \tag{6}$$

   Entonces si A tiene autovalores con parte real positiva, la solución $x(t)$ tiende a la la solución de $Ax = b$ para $t \to \infty$. Entonces podemos generar métodos iterativos integrando este sistema en forma numérica. *Consigna:* Demostrar que aplicar el método de forward Euler a esta ecuación ($dx/dt \approx (x_{k+1} - x_k)/\Delta t$) equivale al método de Richardson, donde el paso de tiempo equivale al factor de relajación ω.

((document-version "texstuff-1.0.4-1-gef8d6f8")
(document-date "Tue Apr 17 09:50:47 2007 -0300")
(processed-date "Tue Apr 17 12:52:05 2007 UTC"))