

# EJERCICIOS PROPUESTOS

Norberto Marcelo Nigro <sup>a,1</sup> Gerardo Franck <sup>a,2</sup>

<sup>a</sup> *Facultad de Ingenieria y Ciencias Hidricas de la Universidad Nacional del Litoral (FICH-UNL), Ciudad Universitaria, 3000 Santa Fe, ARGENTINA*

---

## 1 OBSERVACIONES PRELIMINARES

Este informe presenta algunos ejemplos que recorren aproximadamente todos los contenidos de la materia **Métodos Numéricos y Simulación**.

En todos los ejercicios asumiremos el módulo de Young  $E = 10^8 N/m^2$  y el módulo de rigidez a la flexión  $G = 10^8 N/radian$

## 2 EJERCICIO # 1 : Elasticidad lineal en 1D

Analizar una barra de sección variable con un area dada por la expresión  $A = A_0 e^{-x/L}$  con  $A_0$  el area de la sección en el extremo empotrado (el izquierdo) y  $L$  la longitud de la barra. La barra esta sometida a una fuerza libre en el extremo opuesto (el derecho) de valor  $F = 100 Newtons$ .

Calcular la solución exacta al problema partiendo de la definición de la tensión  $\sigma = \frac{F}{A}$ , de la relación constitutiva entre tensión y deformación para el caso de barras sometidas a sollicitaciones axiales  $\sigma = E\epsilon$  y finalmente de la definición de deformación en términos de sus desplazamientos  $\epsilon = \frac{du(x)}{dx}$ .

A continuación discretice el dominio en 1,2 y 4 elementos y calcule la solución numérica.

Luego establezca alguna medida del error de cada una de las 3 soluciones y finalmente aplique alguna extrapolación para poder inferir a partir de las

---

<sup>1</sup> e-mail nnigro@intec.unl.edu.ar

<sup>2</sup> e-mail gerardofranck@yahoo.com.ar

3 soluciones anteriores una solución con mayor precisión y compárela con la exacta.

### **3 EJERCICIO # 2 : Elasticidad lineal en 1D con elementos de mayor orden**

Repita el ejercicio anterior pero ahora usando elementos cuadráticos y cúbicos para la malla de 2 elementos y compare estos resultados con la solución exacta y con los numéricos obtenidos en el ejercicio anterior.

### **4 EJERCICIO # 3 : Elasticidad lineal en 1D con elementos de mayor orden usando integración numérica**

Repita el ejercicio anterior pero usando integración numérica con varios puntos de Gauss para establecer la relación entre la cantidad de puntos usados y la precisión del problema.

### **5 EJERCICIO # 4 : Elasticidad lineal en 1D con elementos de mayor orden. Criterio de la parcela o *patch test***

Demuestre que el elemento 1D cúbico satisface el criterio de la parcela para los casos de movimiento rígido y deformación constante.

### **6 EJERCICIO # 5 : Elasticidad lineal en 1D. Estimación del error**

Utilizando el ejercicio 1 demuestre la siguiente expresión, muchas veces utilizada para estimar el error

$$e(\text{error}) = u_{\text{aprox}} - u_{\text{exacta}} \leq Ch^{p+1} \max \left\| \frac{\partial u_{\text{exacta}}^{p+1}}{\partial x^{p+1}} \right\| \quad (1)$$

donde  $h$  es el tamaño del elemento,  $p$  es el orden de la aproximación usada,  $p = 1$  para lineal,  $p = 2$  para cuadráticos,  $C$  es una constante a ser ajustada. Tomando todas las soluciones anteriores confeccione una tabla donde se puede ver si esta expresión se satisface y con que grado de precisión.

## 7 EJERCICIO # 6 : Elasticidad lineal en 1D. Adaptatividad

Usando la expresión del estimador de error anterior 1, calcule el error que se comete al resolver el problema del ejercicio 1 con 4 elementos lineales y realice un segundo cálculo refinando el 50 % de los elementos con mayor nivel de error. Vuelva a chequear el error y estime si esta estrategia ha tratado de equiparar la distribución del error o no.

## 8 EJERCICIO # 7 : Flexión de vigas según la teoría de Euler-Bernoulli usando elementos de Hermite

Tome una viga simplemente apoyada, es decir con restricciones sobre los dos desplazamientos en el extremo izquierdo y una restricción del desplazamiento vertical en el extremo derecho. Aplique una carga  $P = 100\text{Newtons}$  en su centro en dirección vertical. Establezca la solución para una discretización de dos elementos de Hermite, en particular la flecha o desplazamiento vertical en el centro, el giro de los 2 extremos y al reacción de los apoyos.

## 9 EJERCICIO # 8 : Flexión de una viga empotrada usando Euler-Bernoulli

Considere una viga empotrada en el extremo izquierdo y con una carga distribuida de  $q = 100\text{Newtons/metro}$ . Calcule para una discretización de 1,2 y 4 elementos de Hermite la flecha y el giro en el extremo derecho y las reacciones en el extremo izquierdo.

## 10 EJERCICIO # 9 : Flexión de una viga de Timoshenko empotrada

Resuelva usando la teoría de flexión de vigas de Timoshenko con 1,2 y 4 elementos el caso de una viga empotrada sometida a una carga concentrada de  $P = 100\text{Newtons}$  en el extremo derecho. Considere que el momento de inercia se calcula asumiendo que la sección de la barra es rectangular de ancho 1 cm y alto 2 cm y la viga mide 2 metros de longitud. Calcule los desplazamientos y giros en los nodos de la malla.

### 11 EJERCICIO # 10 : Flexión de una viga de Timoshenko. Influencia del esfuerzo cortante

Estudie la influencia que tiene el esfuerzo cortante sobre la solución numérica que se obtiene usando la teoría de Timoshenko para vigas.

### 12 EJERCICIO # 11 : Advección difusión en 1D

Calcule la solución numérica a un problema de advección difusión en 1D usando elementos lineales con una aproximación Galerkin para distintos valores de Peclet de la malla, por ejemplo :  $Pe = 0.1, 0.5, 1, 2, 10$ . Saque conclusiones acerca de los resultados obtenidos. El problema consiste de un flujo que ingresa por el extremo derecho y se dirige hacia el izquierdo y donde se usan como condiciones de contorno ambas del tipo Dirichlet con un valor de 0 a la derecha y 1 a la izquierda. Compare con la solución analítica.

### 13 EJERCICIO # 12 : Advección difusión en 1D

Repita el ejercicio anterior pero ahora usando una formulación por elementos finitos del tipo *SUPG* y posteriormente una del tipo *Galerkin Least Square*

### 14 EJERCICIO # 13 : Reacción difusión en 1D

Estudie un problema de reacción difusión en 1D usando diferentes números de reacción  $\theta = 0.1, 1, 10, 100, 1000$ , imponiendo condiciones de contorno Dirichlet en ambos extremos de valor nulo y una fuente adicional constante en todo el dominio de valor unitario. Compare con la solución analítica.

### 15 EJERCICIO # 14 : Advección difusión en 2D

Escriba la matriz y el residuo elemental para un problema de advección difusión en función del número de Peclet para elementos triangulares lineales y para elementos cuadrangulares usando mapeo isoparamétrico y una formulación Galerkin.

Agrégueme a lo anterior los términos provenientes de una estabilización del tipo *SUPG*.

### **16 EJERCICIO # 15 : Advección difusión reacción en 2D**

Repita lo mismo que en el ejemplo anterior pero ahora usando una formulación que incluya términos reactivos lineales. En este caso use *SUPG* y *Galerkin Least Square (GLS)*.

### **17 EJERCICIO # 16 : Advección difusión en 2D**

Como puede comprobar que el método *SUPG* efectivamente introduce difusión numérica solo según las líneas de corriente ?

### **18 EJERCICIO # 17 : Advección difusión no estacionaria en 1D**

Escriba el stencil que produce elementos finitos para la ecuación de advección difusión no estacionaria en 1D usando un esquema explícito y posteriormente uno implícito de primero y segundo orden.

### **19 EJERCICIO # 18 : Advección difusión en 1D**

Analice el orden de aproximación al que se arriba al resolver por elementos finitos la ecuación de advección difusión en 1D usando un esquema estabilizado del tipo *SUPG*.