

Introducción al Método de los Elementos Finitos.
Flujo incompresible.

Mario Storti <mstorti@intec.unl.edu.ar>
Centro Internacional de métodos Computacionales en Ingeniería
<http://venus.arcride.edu.ar/CIMEC>

20 de septiembre de 2002

Índice General

Capítulo 1

Flujo incompresible

1.1 Definición de flujo incompresible

Un flujo incompresible es aquel donde el fluido no se comprime, como es típicamente el caso de los líquidos, pero también puede pasar que bajo ciertas condiciones un fluido que es compresible (como los gases en general) no manifiesta efectos de compresibilidad para un patrón o régimen de flujo en particular. En ese caso se le asigna a la propiedad de flujo compresible o incompresible al patrón de flujo. Para los fluidos compresibles, puede demostrarse que los efectos compresibles van con el número de Mach al cuadrado, es decir que la variación relativa de la densidad

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = O(M^2) \quad (1.1)$$

donde

$$M = \frac{u}{c} \quad (1.2)$$

es el número de Mach, u es la velocidad del fluido y c es la velocidad del sonido. Podemos decir entonces que el flujo es compresible si el número de Mach es menor que un cierto valor, digamos 0.1. Por ejemplo, un auto a 100 Km/h en atmósfera estándar posee un Mach de approx. 0.1, con lo cual en esas condiciones podemos considerar que el flujo es incompresible.

Es de notar que si las variaciones de densidad son provocadas por otros efectos que no sean la presión mecánica como la dilatación térmica, expansión solutal (p.ej. salinidad), etc... entonces el patrón de flujo puede considerarse (con respecto a los efectos sobre los algoritmos numéricos) incompresible, aún si la densidad resulta no ser constante ni espacialmente ni en el tiempo. El término compresible/incompresible se aplica a las variaciones de densidad producidas exclusivamente por efecto de la presión.

Si bien en principio uno podría pensar que la incompresibilidad es una ventaja, ya que permite eliminar (en muchos casos) una variable (la densidad), desde el punto de vista numérico suele traer más problemas que soluciones.

1.2 Ecuaciones de Navier-Stokes incompresible

Las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles son

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.4)$$

La primera es la “*ecuación de momento*”, mientras que la segunda es la “*ecuación de continuidad*” o “*balance de masa*”. Es importante notar que en el límite de “*flujo reptante*” o “*flujo de Stokes*” (es decir, despreciando el término convectivo), las ecuaciones resultantes son exactamente iguales a las de elasticidad lineal incompresible isotrópica, si reemplazamos el vector de velocidad por el de desplazamiento y la viscosidad por el módulo de elasticidad.

Las siguientes observaciones nos permiten adelantar el problema ocasionado por la incompresibilidad:

- **La condición de incompresibilidad no tiene un término temporal:** Esto quiere decir que “la presión no tiene historia”. El estado del fluido sólo está dado por la velocidad. También podemos decir que la ecuación de continuidad aparece como una restricción, más que como una ecuación de evolución. La presión, pasa a ser el multiplicador de Lagrange asociado.
- **Las ecuaciones son no locales:** Esto es más fácil de ver en el caso de elasticidad. Se sabe bien que en el caso de elasticidad compresible el problema es elíptico, de manera que hay una cierta localidad de los efectos. Esto se pierde en el caso incompresible. Por ejemplo, consideremos un sólido incompresible que ocupa una región Ω (ver figura ??). Las condiciones son de desplazamiento nulo en toda la frontera, menos en una cierta parte Γ_1 donde se aplica un cierto desplazamiento uniforme, y otra cierta parte Γ_2 donde las condiciones son libres, es decir tracción nula. En el caso compresible, el operador es elíptico, local, y la influencia del desplazamiento impuesto sobre el dominio Γ_1 en el dominio Γ_2 dependerá de la distancia entre ambas regiones, sus tamaños relativos, etc... Si el tamaño de ambas regiones es similar y muy pequeños con respecto a la distancia que los separa, entonces los desplazamientos en Γ_2 serán despreciables. Por el contrario, en el caso incompresible, el cambio de volumen total en Γ_2 debe ser igual al impuesto en Γ_1 , por lo tanto los desplazamientos en Γ_2 serán del mismo orden que aquellos impuestos en Γ_1 (asumiendo que ambas regiones de la frontera tienen dimensiones similares).
- **Cambia el carácter matemático de las ecuaciones:** También en el caso elástico, estacionario las ecuaciones dejan de ser elípticas al pasar al caso incompresible. Esto se debe a que la ecuación de continuidad “*no tiene término en derivadas segundas*”.
- **La ecuación de la energía se desacopla de la de momento y continuidad:** El campo de temperaturas se puede obtener a posteriori a partir de el campo de velocidades obtenido.

1.3 Formulación vorticidad-función de corriente

La vorticidad se define como

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{u} \quad (1.5)$$

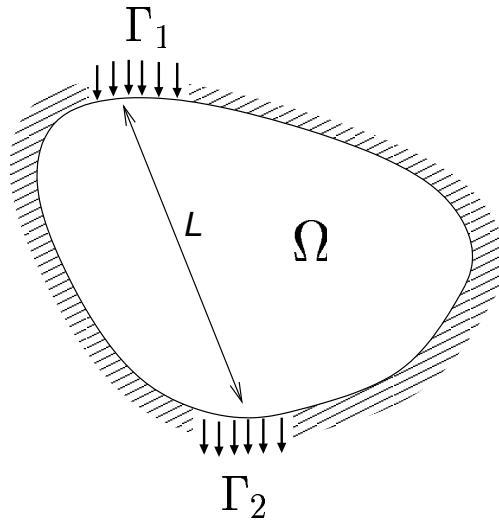


Figura 1.1: No localidad en elasticidad incompresible.

el cual, para un flujo bidimensional se reduce a

$$\Omega = \Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.6)$$

En 2D se puede encontrar una función de corriente ψ tal que

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (1.7)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.8)$$

Tomando rotor de (??) se llega, después de un cierto trabajo algebraico, a

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \Omega - (\Omega \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nu \Delta \Omega \quad (1.9)$$

pero (sólo en 2D!) el tercer término es nulo, ya que $\nabla \mathbf{u}$ debe estar en el plano y Ω está fuera del plano, de manera que la ecuación se reduce a una ecuación de advección-difusión para la vorticidad

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \Omega = \nu \Delta \Omega \quad (1.10)$$

Por otra parte, recomblando (??) con (??) se llega a una ecuación de Poisson para la función de corriente:

$$\Delta \psi = -\Omega \quad (1.11)$$

La “formulación vorticidad/función de corriente” consiste en resolver (??) y (??) en forma acoplada.

Las ventajas y desventajas de la formulación, con respecto a la formulación en variables primitivas (??-??) son

- La extensión a 3D de la formulación vorticidad/función de corriente es muy compleja.
- La formulación vorticidad/función de corriente tiene un grado de libertad menos por nodo.
- Las condiciones de contorno para la presión son desconocidas para la formulación en variables primitivas.
- Las condiciones de contorno para la vorticidad son desconocidas para la formulación vorticidad/función de corriente .
- La formulación vorticidad/función de corriente requiere de cierto cuidado en cuanto a la discretización.

1.4 Discretización en variables primitivas

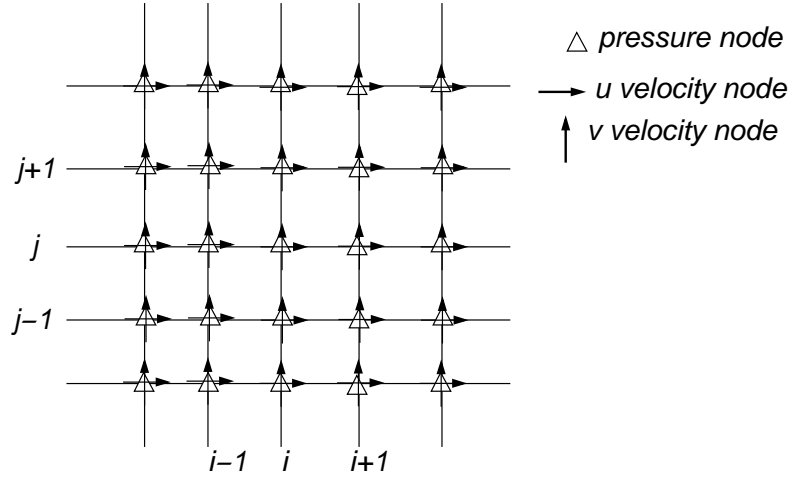


Figura 1.2: Grilla estándar (no staggered) usada para flujo incompresible en variables primitivas.

Si despreciamos el término convectivo (problema de Stokes) y consideramos el caso estacionario en una malla de paso homogéneo h , la siguiente discretización (espacial) de segundo orden parece ser un buen punto de partida (ver figura ??) :

$$\begin{aligned}
 \nu(\Delta_h u)_{ij} - \frac{p_{i+1,j} - p_{i-1,j}}{2\rho h} &= 0 \\
 \nu(\Delta_h v)_{ij} - \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j-1}}{2\rho h} &= 0 \\
 \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2h} &= 0
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

donde Δ_h representa el operador de Laplace discreto estándar de 5 puntos

$$(\Delta_h u)_{ij} = \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{ij}}{h^2} \tag{1.13}$$

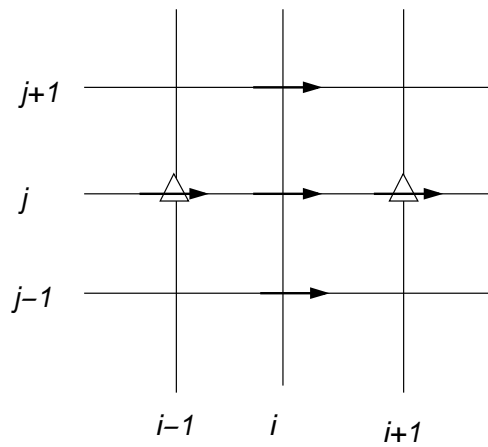


Figura 1.3: Grilla no staggered. Stencil para la ecuación de momento según x

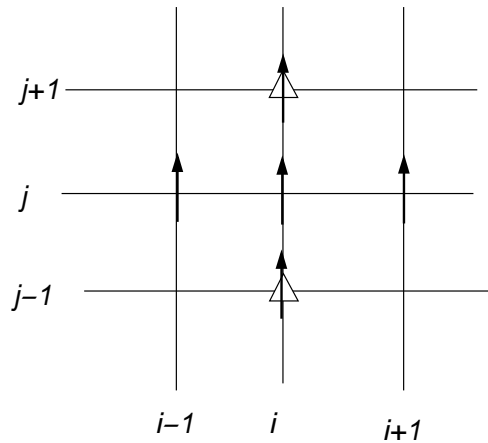


Figura 1.4: Grilla no staggered. Stencil para la ecuación de momento según y

En las figuras ??, ?? y ?? pueden verse los stencils usados para cada una de las ecuaciones. Pero resulta ser que las presiones en los nodos impares se desacopla de los pares dando lugar a modos “*checkerboard*” en la presión. Las formas des resolver esto es

- Resolver una ecuación alternativa para la presión llamada PPE (Poisson Pressure Equation).
- Usar mallas “staggered” (en español “desparramadas” (??))
- Usar métodos de compresibilidad artificial.

Discutiremos a continuación el uso de mallas staggered.

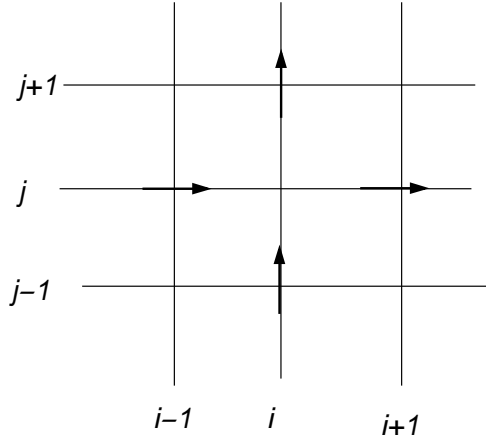


Figura 1.5: Grilla no staggered. Stencil para la ecuación de continuidad

1.5 Uso de mallas staggered

Si consideramos la ecuación de momento según x , entonces vemos que lo ideal sería tener una malla para los nodos de velocidad x desplazada en $h/2$ con respecto a la malla de los nodos de presión, en ese caso podríamos tener una ecuación de la forma (ver figura ??)

$$\nu(\Delta_h u)_{i+1/2,j} - \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\rho h} = 0 \quad (1.14)$$

Similarmente, para la ecuación de momento según y tenemos (ver figura ??)

$$\nu(\Delta_h v)_{i,j+1/2} - \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\rho h} = 0 \quad (1.15)$$

Esto evita el desacoplamiento de las presiones entre nodos pares e impares. Entonces tenemos 3 redes “staggered” a saber (ver figura ??)

- Los nodos de presión: $p_{ij} \approx p(ih, jh)$
- Los nodos de velocidad x : $u_{i+1/2,j} \approx u((i + 1/2)h, jh)$
- Los nodos de velocidad y : $v_{i,j+1/2} \approx v(ih, (j + 1/2)h)$

con i, j enteros. Por otra parte, la ecuación de continuidad también queda en un stencil más compacto, si lo imponemos sobre los nodos de presión (ver figura ??)

$$\frac{u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j}}{h} + \frac{v_{i,j+1/2} - v_{i,j-1/2}}{h} = 0 \quad (1.16)$$

Por otra parte, las condiciones de contorno también se simplifican algo, en cuanto a las condiciones sobre la presión, ya que utilizando sólo contornos que coinciden con líneas semienteras ($i, j = \text{entero} + 1/2$).

El método de mallas staggered es probablemente el más robusto y prolijo para tratar flujo incompresible por diferencias finitas.

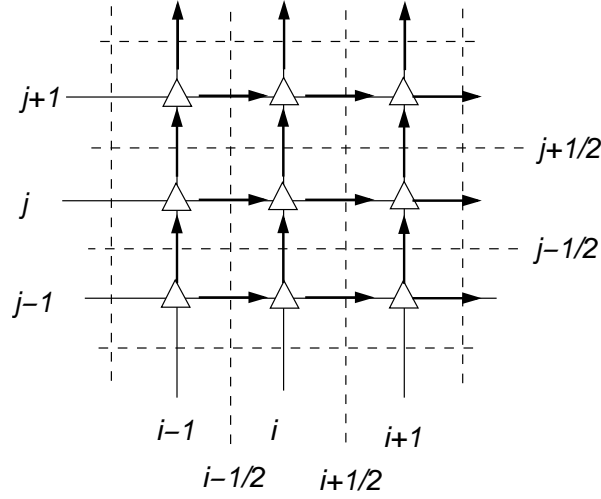


Figura 1.6: Grilla staggered usada para flujo incompresible en variables primitivas.

1.6 Discretización por elementos finitos

Considerando el caso estacionario, flujo reptante, un término forzante \mathbf{f} y condiciones de contorno Dirichlet, las ecuaciones de gobierno son

$$\nu \Delta \mathbf{u} - \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega \quad (1.17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (1.18)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, \quad \text{en } \Gamma \quad (1.19)$$

y espacios de interpolación

$$X_h = \text{span}\{N_{p\mu}, \mu = 1 \dots N\} \quad (1.20)$$

$$V_h = \text{span}\{N_{u\mu}, \mu = 1 \dots N\} \quad (1.21)$$

La formulación débil Galerkin se obtiene pesando la ecuación de momento por una función de interpolación de velocidad y pesando la ecuación de continuidad con las funciones de interpolación de presión.

$$\int_{\Omega} \phi (\nabla \cdot \mathbf{u}) \, d\Omega = 0, \quad \forall \phi \in X_h \quad (1.22)$$

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \phi) p \, d\Omega + \int_{\Omega} \nu (\nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{u}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma, \quad \forall \mathbf{v} \in V_h \quad (1.23)$$

Notar que, como no aparecen derivadas de p ni ϕ entonces es posible utilizar aproximaciones discontinuas para p .

El sistema al que se llega es;

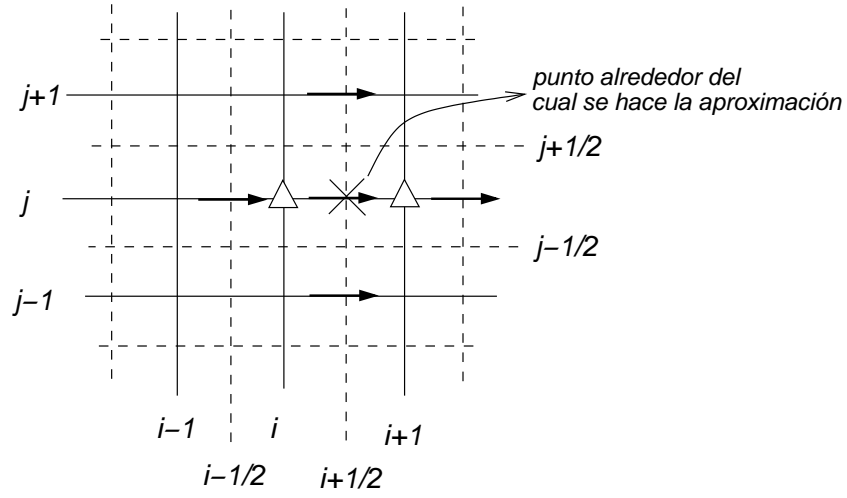


Figura 1.7: Grilla staggered. Stencil para la ecuación de momento según x

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{Q}^T \\ -\mathbf{Q} & \nu\mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F} \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

o

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B} \quad (1.25)$$

donde

$$p_h = \sum_{\mu} p_{\mu} N_{p\mu} \quad (1.26)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_N \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

$$u_h = \sum_{\mu} u_{\mu} N_{u\mu} \quad (1.28)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

$$Q_{\mu k \nu} = \int_{\Omega} N_{u\mu, k} N_{p\nu} \, d\Omega \quad (1.30)$$

$$K_{i\mu j\nu} = \int_{\Omega} N_{u\mu, k} \delta_{ij} N_{u\nu, k} \, d\Omega \quad (1.31)$$

Nótese que la matriz \mathbf{K} es simétrica y definida positiva, mientras que la matriz total \mathbf{A} sólo es

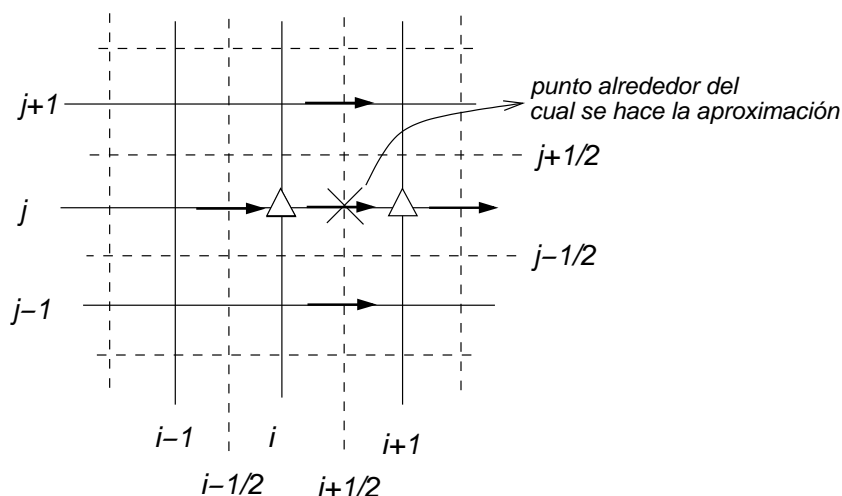


Figura 1.8: Grilla staggered. Stencil para la ecuación de momento según y

simétrica y de hecho no puede ser definida positiva ya que tiene elementos diagonales (en el bloque $\mathbf{0}$) nulos.

Como K es no-singular podemos eliminar \mathbf{U} de la ecuación de momento e insertarla en la ecuación de continuidad obteniendo una ecuación para \mathbf{P} de la forma

$$\mathbf{H}\mathbf{P} = (\mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q}) \mathbf{P} = -\mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} \quad (1.32)$$

La matriz \mathbf{H} es simétrica y semidefinida positiva. Para que el problema este bien planteado debemos al menos exigir que la matriz sea no-singular. Podemos ver que esto ocurre si y sólo si \mathbf{Q} tiene rango de filas (el número de filas linealmente independiente) N_p (el número de grados de libertad de presión). Efectivamente, si \mathbf{Q} tiene rango menor que N_p entonces existe algún vector \mathbf{P} tal que $\mathbf{Q}\mathbf{P} = \mathbf{0}$ y entonces $\mathbf{H}\mathbf{P} = \mathbf{0}$. Por otra parte, si \mathbf{Q} tiene rango igual a N_p entonces para todo $\mathbf{P} \neq \mathbf{0}$ vale que $\mathbf{u} = \mathbf{Q}\mathbf{P} \neq \mathbf{0}$ y entonces

$$\mathbf{P}^T (\mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q}) \mathbf{P} = \mathbf{u}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u} > 0 \quad (1.33)$$

con lo cual \mathbf{H} resulta ser definida positiva y por lo tanto no-singular.

1.7 El test de la parcela

Ahora bien \mathbf{Q} es de dimensión $N_u \times N_p$, de manera que, para que \mathbf{Q} sea no singular debemos pedir que al menos $N_u \geq N_p$. Si bien esto parece un requerimiento bastante simple, en realidad sirve para descartar toda una serie de familias de interpolación y da lugar al famoso “*test de la parcela*” (“*patch test*”).

Consideremos por ejemplo la interpolación más simple que se nos pueda ocurrir es $P1/P0$ para triángulos, es decir velocidades lineales continuas y presiones constantes por elemento (ver figura ??). (La convención aquí es poner primero el espacio de interpolación para velocidades y después el que se usa para presiones. En general, a menos que se mencione lo contrario el espacio para velocidades se

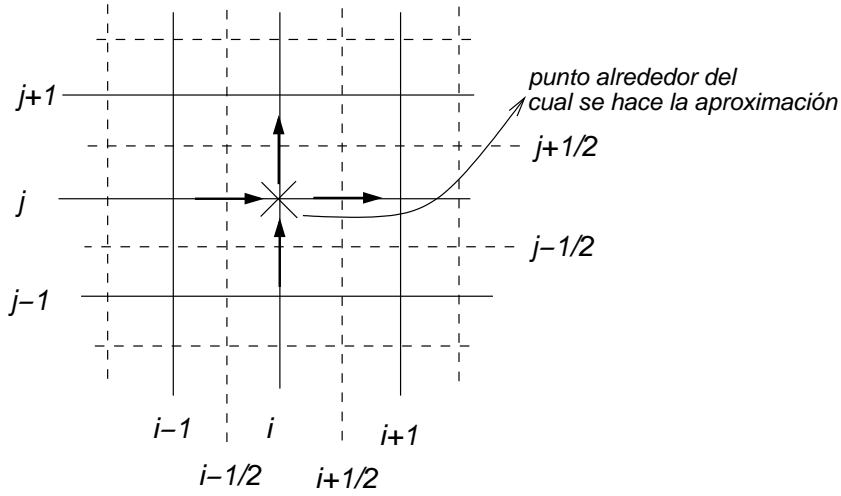


Figura 1.9: Grilla staggered. Stencil para la ecuación de continuidad.

asume continuo y el de presiones discontinuo. P_n denota el espacio de funciones que es polinomial de grado n por elemento, mientras que Q_n denota el espacio de funciones bilineales (trilineales en 3D) de grado n .) En una malla estructurada de cuadrángulos, donde dividimos cada cuadrángulo en dos triángulos, tenemos (para una malla suficientemente grande) $N_p=2$ grados de libertad de presión por cada cuadrángulo y un nodo de velocidad (es decir $N_u = 2$), por lo tanto no se satisface el test de la parcela y la aproximación es inestable. Si tomamos parcelas más pequeñas la situación es peor, ya que el N_u es mayor o igual al N_u asintótico pero imponiendo las condiciones de contorno “*más inestables posibles*”, es decir todo el contorno de la parcela con velocidades impuestas el N_u resulta ser

$$\begin{aligned}
 N_u &= (N_u \text{ por elemento}) \times (\text{número de elementos}) \\
 &\quad + (\text{número de nodos adicionales de contorno}) \\
 &\quad - (\text{número de condiciones de contorno}) \\
 &\leq (N_u \text{ por elemento}) \times (\text{número de elementos}) = (N_u \text{ asintótico})
 \end{aligned}
 \tag{1.34}$$

Entonces, si bien el test de la parcela asintótico permite descartar una serie de familias de interpolación, el test aplicado sobre parcelas más pequeño resulta ser más restrictivo. Por ejemplo para la interpolación $Q1/P0$ el análisis asintótico da N_u por celda = 2, N_p por celda = 1 lo cual en principio está bien, pero cuando vamos a una parcela de $2 \times 2 = 4$ elementos cuadrangulares tenemos $N_u = 2$ (sólo el nodo de velocidad del medio está libre), $N_p = 3$ (uno de los nodos de presión siempre está restringido) lo cual está mal.

Sin embargo, puede verse que un macroelemento triangular formado por 3 elementos $Q1/P0$ es estable.

La relación asintótica más apropiada parece ser $N_u = 2N_p$.

1.8 La condición de Brezzi-Babůska

Si bien el test de la parcela es muy útil para descartar posibles familias de interpolaci3n, no es suficiente para asegurar la convergencia. Rıos de tinta han corrido en cuanto a cual es la condici3n para asegurar convergencia en problemas de este tipo y la respuesta es la conocida “condici3n de Brezzi-Babůska” tambien conocida como condici3n “inf-sup”.

$$\inf_{q_h \in X_h - 0} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h - 0} \frac{\int_{\Omega} q_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h \, d\Omega}{\left(\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}_h|^2 \, d\Omega\right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |q_h|^2 \, d\Omega\right)^{1/2}} = \overline{BB} \geq C \neq C(h) \quad (1.35)$$

Trabajando un poco esta ecuaci3n puede llegarse a la conclusi3n de que

$$\overline{BB} = \text{mínimo autovalor de } \{\mathbf{Q}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{M}_p^{-1}\} \quad (1.36)$$

donde M_p es la “matriz de masa” de las funciones de presi3n es decir

$$M_{p\mu\nu} = \int_{\Omega} N_{p\mu} N_{p\nu} \, d\Omega \quad (1.37)$$

Como M_p es una “matriz de masa”, tiene un número de condici3n muy bajo y no afecta mucho la expresi3n anterior, de manera que podemos tomar también

$$\overline{BB} = \text{mínimo autovalor de } \{\mathbf{Q}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{Q}^T\} \quad (1.38)$$

Notemos que la matriz en cuesti3n es la misma que se obtiene si condensamos el sistema total en el vector de presiones, ec. (??). De manera que el criterio de BB parece relacionar la convergencia del espacio de interpolaci3n con el comportamiento de los autovalores para $h \rightarrow 0$.

1.9 Métodos FEM estabilizados

Podemos modificar el sistema de ecuaciones a resolver si agregamos a la ecuaci3n de momento un término de estabilizaci3n que proviene de tomar el gradiente de la ecuaci3n de continuidad y otro proporcional a la divergencia de la ecuaci3n de momento a la ecuaci3n de continuidad. El sistema modificado es

$$\nu \Delta \mathbf{u} - \nabla p - \beta \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{f} \quad (1.39)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} - \alpha \Delta p = -\alpha (\nabla \cdot \mathbf{f}) \quad (1.40)$$

El sistema de ecuaciones es

$$\begin{bmatrix} -\alpha \mathbf{L} & -\mathbf{Q}^T \\ -\mathbf{Q} & \nu \mathbf{K} + \beta \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha \mathbf{S} \\ \mathbf{F} \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

donde

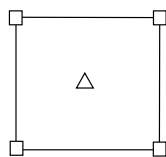
$$H_{\mu\nu} = \int N_{p\mu,k} N_{p\nu,k} \, d\Omega \quad (1.42)$$

$$G_{i\mu,j\nu} = \int N_{u\mu,i} N_{u\nu,j} \, d\Omega \quad (1.43)$$

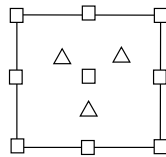
son aproximaciones a los operadores de Laplace (vectorial) y “*grad-div*”.

Notar que con el agregado de estos términos de estabilización ahora el bloque que antes era nulo ya no lo es. Por otra parte el sistema es ahora elíptico, con lo cual deberían imponerse también condiciones de contorno sobre la presión. (Lo cual no es trivial). En la práctica “*se deja la presión libre*” lo cual es equivalente a imponer derivada normal de la presión nula ($\frac{\partial p}{\partial n} = 0$) lo cual **no es cierto** pero se absorbe en una capa límite de espesor h .

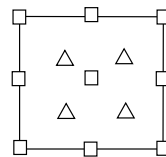
\triangle *nodo de presión*
 \square *nodo de velocidad*



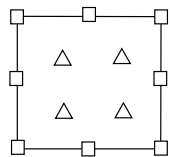
Q1/P0
inestable



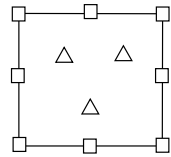
Q2/P1
estable



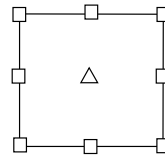
Q2/Q1
inestable



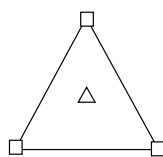
Q2(s)/Q1
inestable



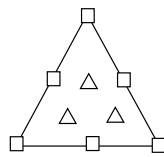
Q2(s)/P1
inestable



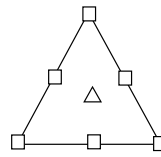
Q2(s)/P0
estable



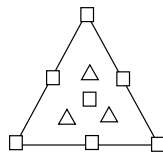
P1/P0
inestable



P2/P1
inestable



P2/P0
estable



P2+/P1
estable

Figura 1.10: Combinaciones de espacios de interpolación de elementos finitos. Velocidades continuas, presiones discontinuas.

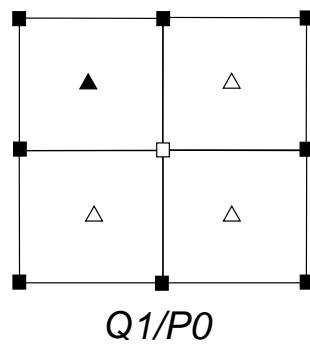


Figura 1.11: Parcela de 2×2 elementos cuadrangulares. Nodos pintados de negro indican grados de libertad restringidos.