

## Métodos Numéricos para Flujos en Cavidades Cerradas

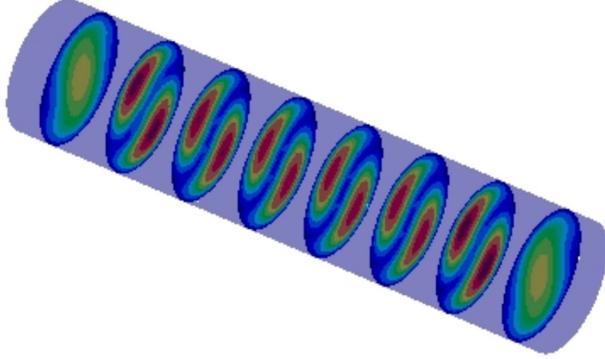
J. D'Elía, M.A. Storti, N.M. Nigro

Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería CIMEC/INTEC

UNL/CONICET, Güemes 3450, 3000-Santa Fe, Argentina

e-mail: [cimec@ceride.edu.ar](mailto:cimec@ceride.edu.ar), <http://venus.ceride.gov.ar/cimec>

MECOM 2002, October 28-31, 2002, Santa Fe-Paraná - Argentina



**PERFIL DE LA PRESENTACION**

- código PETSC-FEM (<http://minerva.arcrde.edu.ar/petscfem>), bajo GPL: por elementos finitos, multifísica, para cálculo distribuido (C++/PETSC/MPI)
- Ejemplo 1: ondas inerciales (Kudlick/Greenspan)
  - ▷ ondas inerciales axisimétricas dentro de una esfera con un fluido incompresible rotando con velocidad angular  $\hat{\Omega} = \Omega + \varepsilon\omega \cos(\omega t)$
  - ▷ Poincaré (invíscido): sol. semi-analít.; Navier-Stokes (viscoso): PETSC-FEM
- Ejemplo 2: cilindro en rotación excéntrica (Vaughn/Oberkampf/Wolfe)
  - ▷ cilindro lleno con un fluido incompresible y viscoso, que gira estacionariamente con un movimiento combinado de espín y de nutación
  - ▷ típico en propulsores estabilizados por movimiento rápido de espín cuando su eje de rotación instantánea no coincide con el de simetría axisimétrica
  - ▷ terna no inercial “aerobalística”: acompaña al cilindro en su nutación  $\omega_n$  pero no en su espín  $\omega_s$

### Ondas inerciales en una esfera rotante perturbada

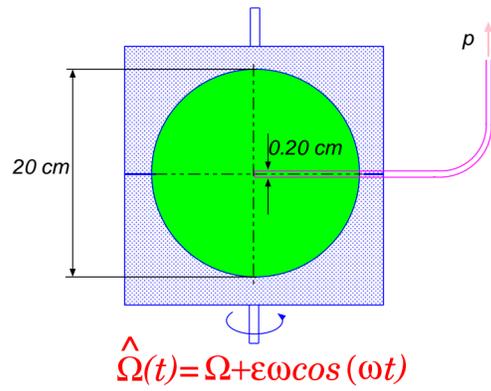


Figura 1: Una disposición experimental para excitar oscilaciones inerciales axisimétricas dentro de una esfera llena con un líquido viscoso, rotando alrededor del eje vertical con velocidad angular variable  $\hat{\Omega} = \Omega + \epsilon\omega \cos(\omega t)$ , donde  $\epsilon = 8^0$ . Los picos de presión son medidos en el centro de la esfera, del contenedor esférico y de la probeta de presión. Ref.: "Axisymmetric inertial oscillations of a fluid in a rotating spherical container", Aldridge / Toomre, JFM, 1969, vol. 37, pp. 307-323

**Caso invíscido: ecuación de Poincaré (Kudlick/Greenspan)**

Las soluciones para la velocidad  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  y la presión  $p(\mathbf{r}, t)$  se representan mediante superposición de sus respectivos modos naturales

$$\mathbf{u} = \sum_m \mathbf{U}_m e^{i\lambda_m t} \quad ; \quad p = \sum_m P_m e^{i\lambda_m t} \quad (1)$$

$$\nabla^2 P_m - \frac{4}{\lambda_m^2} (\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 P_m = 0 \quad \text{en } \Gamma \quad (2)$$

$$\mathbf{n} \cdot \left[ \nabla P_m - \frac{2}{i\lambda_m} (\mathbf{z} \times \nabla P_m) - \frac{4}{\lambda_m^2} (\mathbf{z} \cdot \nabla P_m) \mathbf{z} \right] = 0 \quad \text{en } \partial\Gamma \quad (3)$$

- una dificultad distintiva es que el autovalor  $\lambda_m$  aparece tanto en la ecuación diferencial como en su condición de borde
- ecuación elíptica cuando  $|\lambda_m| > 4$  e hiperbólica cuando  $|\lambda_m| < 4$ , i.e. las oscilaciones inerciales sólo aparecen cuando la perturbación es  $|\lambda_m/\Omega| < 2$
- los autovalores  $\lambda_m$  son reales y con módulo  $|\lambda_m| < 2$

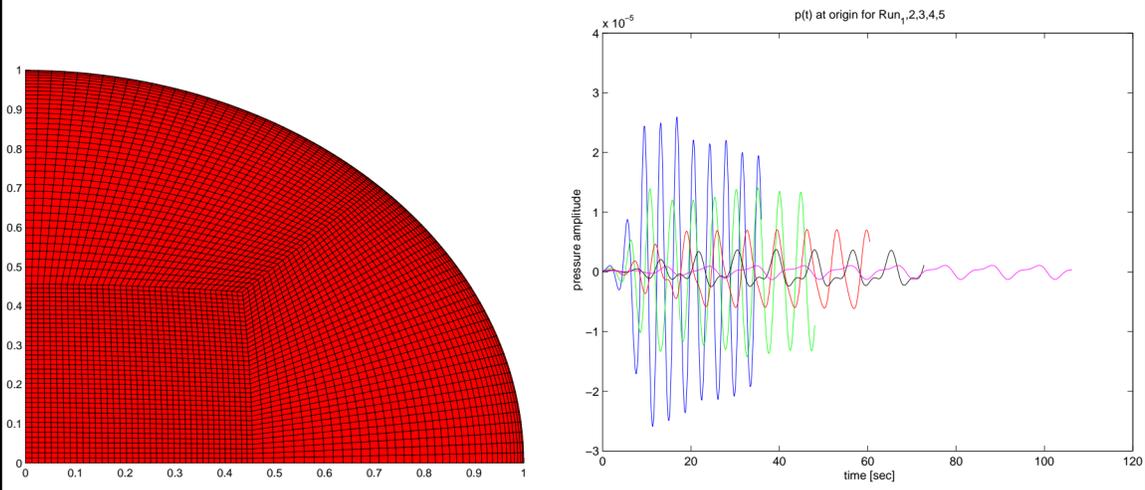
**Caso viscoso: solución numérica por PETSC-FEM**

Figura 2: Izq.: vista  $xy$  de la malla de elementos finitos para la esfera. Der.: respuesta temporal de la presión en el nodo vecino al origen por el eje de revolución

**Caso viscoso: solución numérica por PETSC-FEM**

Parámetros corrida PETSC-FEM	notación	valor
rapidez angular base	$\Omega$	1.00
amplitud de la perturbación	$\varepsilon_{om}$	0.15
paso de tiempo	$\Delta t$	$2\pi/\omega/32$
número de pasos de tiempo	$n_{step}$	320
número de Reynolds	Re	5000

corrida	$\omega$	$\Omega/\omega$	número de vórtices
1	1.75000	0.5714	> 1
2	1.30890	0.7640	1 vórtice dominante
3	0.93810	1.0660	2 vórtices dominantes
4	0.72622	1.3770	3 vórtices dominantes
5	0.59137	1.6910	4 vórtices dominantes

Tabla 1: Número de vórtices observados en las simulaciones numéricas

### Caso viscoso: solución numérica por PETSC-FEM

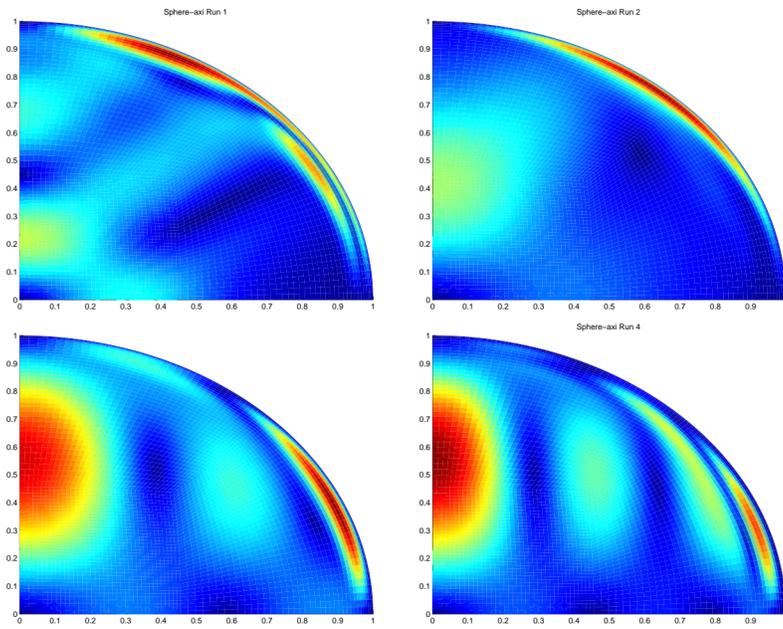


Figura 3: Isocurvas del módulo de la velocidad para algunos de los modos simétricos con respecto al ecuador (descontada la rotación rígida)

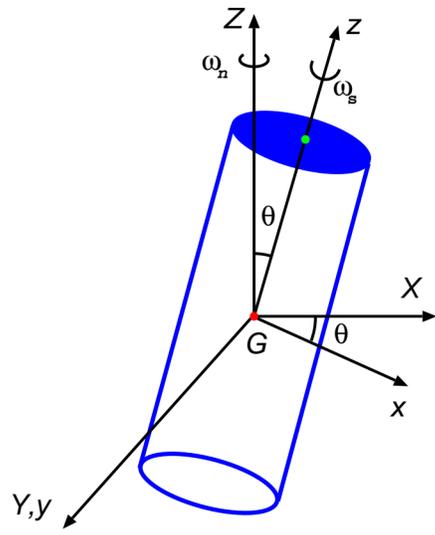
**Flujo en un cilindro bajo espín y nutación**

Figura 4: Ternas inercial  $(X, Y, Z)$  y aerobalística  $(x, y, z)$ , donde  $(x, y, z)$  acompaña al cilindro sólo en su movimiento de nutación  $\omega_n$  a ángulo  $\theta$  pero no en su espín  $\omega_s$

**Flujo en un cilindro bajo espín y nutación**

- Por experimentos y fotografías con cilindros parcialmente llenos rotantes:
  - ▷ Re bajos: momento de frenado  $M_z \propto Re$  y la burbuja es paralela al eje  $z$ , i.e. el movimiento del fluido es independiente de la coordenada axial excepto en los entornos de las paredes
  - ▷ Re intermedios:  $M_z$  alcanza un máximo y la presencia de una distorsión ondulante de la burbuja sugiere una estructura celular por inestabilidad hidrodinámica del flujo base frente a perturbaciones periódicas axiales
  - ▷ Re altos:  $M_z$  decreciente de un modo poco claro pero las observaciones sugieren un movimiento turbulento
- la presencia de un ángulo de nutación  $\theta$  hace que las ecuaciones se desvíen de la rotación rígida, en donde la misma nutación es un término forzante
- cuando  $\omega_s \gg \omega_n$  la burbuja queda muy cerca del eje del cilindro y sugiere un campo de velocidad prácticamente estacionario en la terna aerobalística

## Flujo en un cilindro bajo espín y nutación: cálculo PETSC-FEM

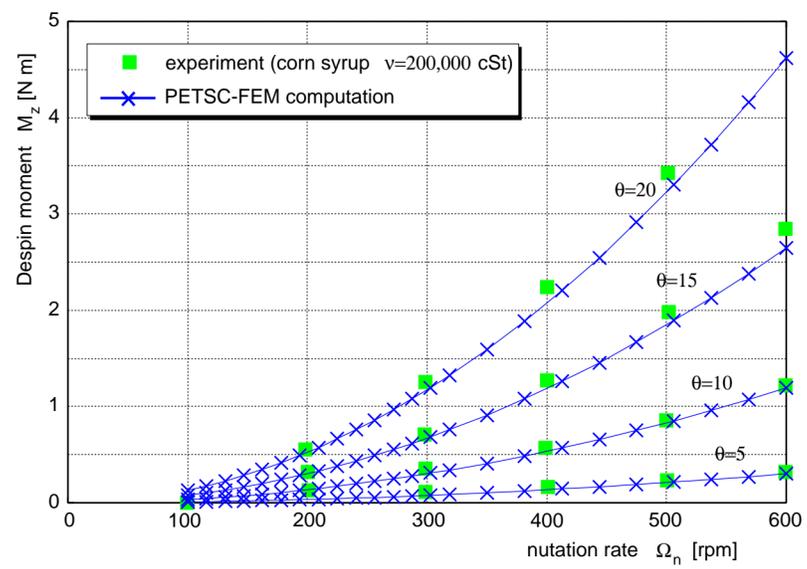


Figura 5: Momento de frenado  $M_z$  en función de la velocidad y ángulo de nutación  $\omega_n$  y  $\theta$ , para velocidad de espín  $\omega_s = 3000$  [rpm]. Ref.: Vaughn/Oberkampf/Wolfe, "Fluid motion inside a spinning nutating cylinder", J. Fluid Mech., 1985, vol. 150, pp. 121-138

## Flujo en un cilindro bajo espín y nutación: cálculo PETSC-FEM

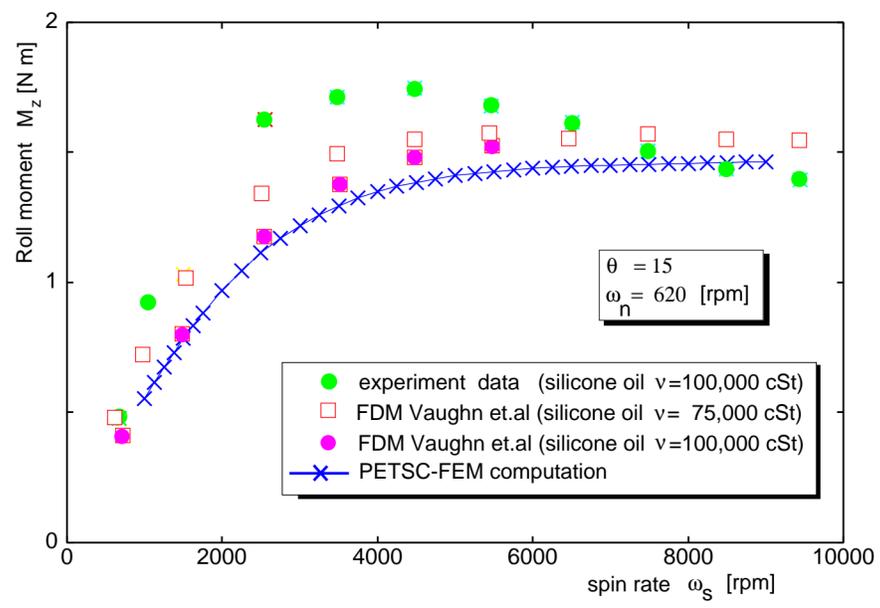
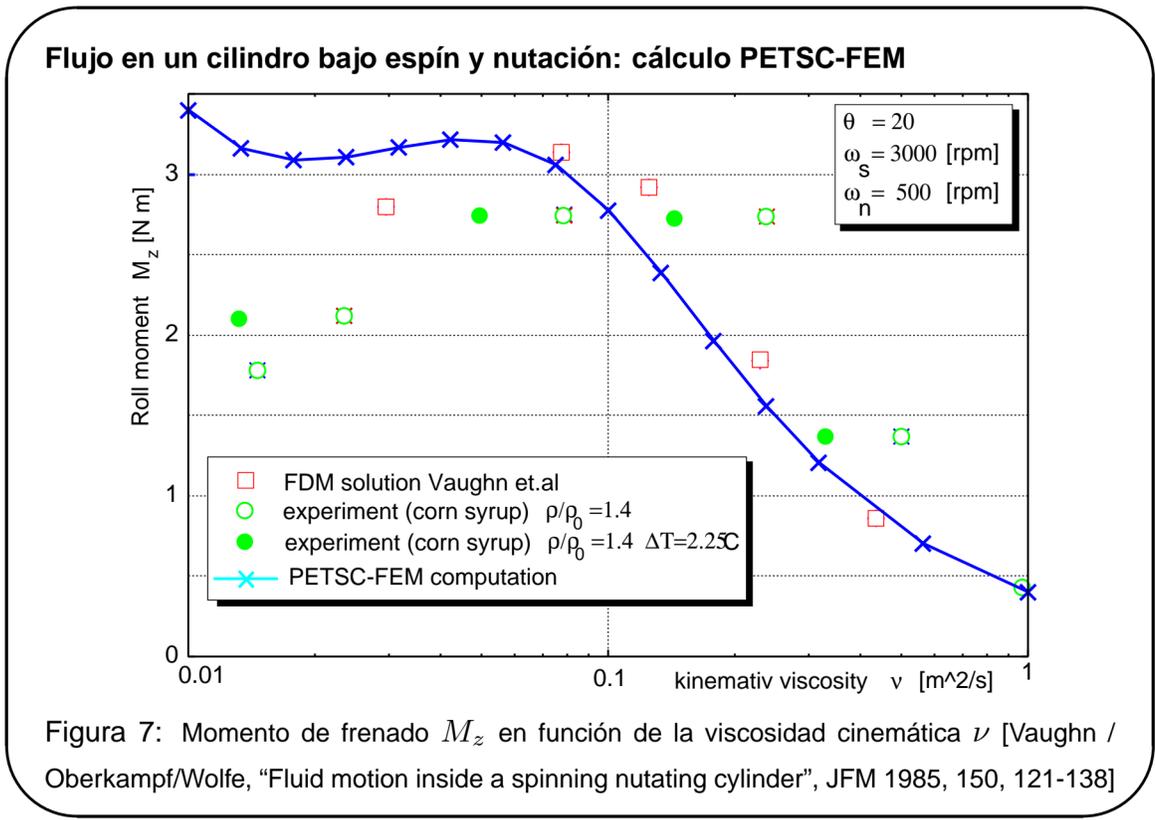


Figura 6: Momento de frenado  $M_z$  en función la velocidad de espín  $\omega_s$  [Vaughn/Oberkampf /Wolfe, "Fluid motion inside a spinning nutating cylinder", JFM, 1985, 150, pp. 121-138]



### Flujo en un cilindro bajo espín y nutación: cálculo PETSC-FEM

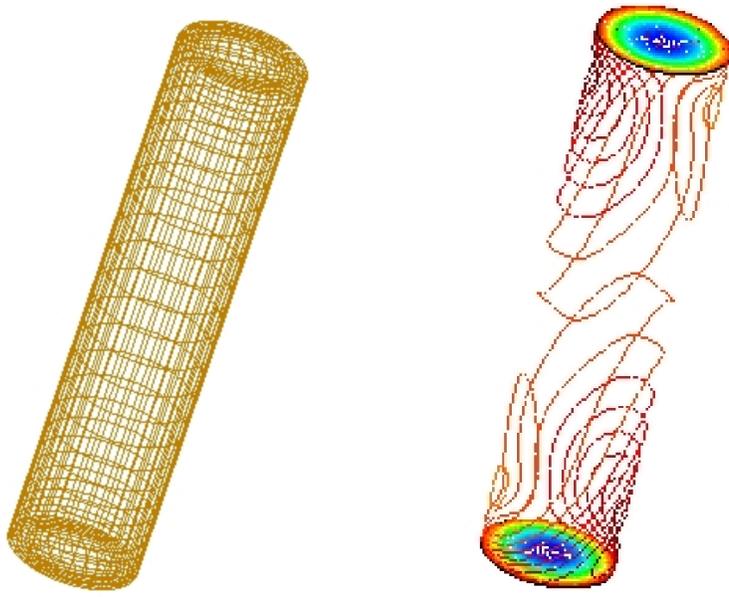


Figura 8: Izq.: vista parcial de la malla de elementos finitos. Der.: líneas de contorno de presión

**Flujo en un cilindro bajo espín y nutación: cálculo PETSC-FEM**

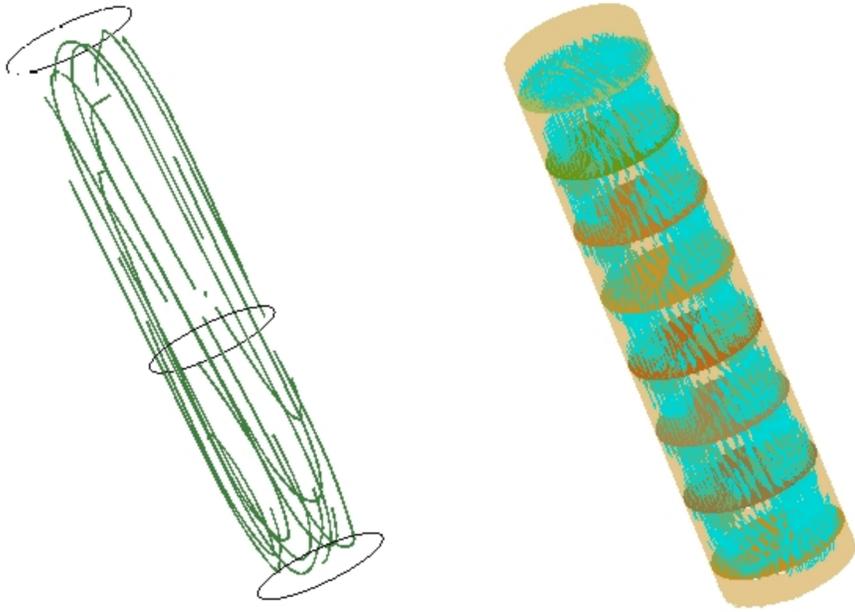


Figura 9: Izq.: vista en perspectiva de las líneas de corriente. Der.: vista en perspectiva del campo de velocidad diferencial

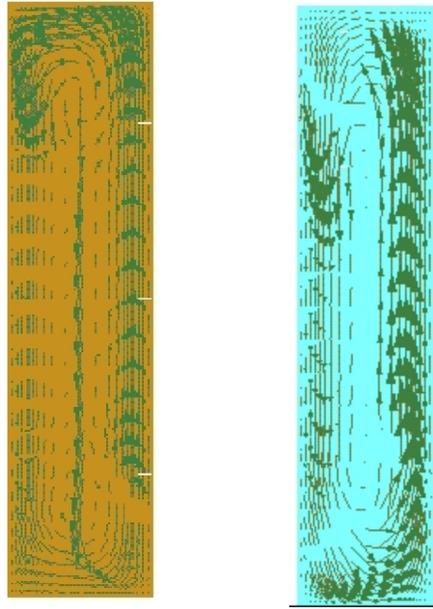
**Flujo en un cilindro bajo espín y nutación: cálculo PETSC-FEM**

Figura 10: Campos de velocidades diferenciales según dos planos axi-simétricos perpendiculares entre sí:  $yz$  (izq.) y  $xz$  (der.)

**Conclusiones**

- Ondas inerciales en una esfera rotante perturbada: el número de vórtices observados concuerdan, en general, con los reportados en el trabajo experimental-analítico de Aldridge/Toomre
- Flujo en un cilindro bajo un movimiento combinado de espín y de nutación: ecuaciones de Navier-Stokes en la terna aerobalística (acompaña sólo la nutación del cilindro pero no sigue su espín). Hay acuerdo general con los resultados de Vaughn *et al.* en las dependencias del momento de frenado  $M_z$  con: la viscosidad cinemática  $\nu$ , la velocidad de espín  $\omega_s$ , la velocidad de nutación  $\omega_n$  y el ángulo de nutación  $\theta$

**Agradecimientos**

- CONICET PIP 198/98 *Germen-CFD*, SECyT-FONCyT-PICT 6973 *PROA*, SECyT-PID 99/74 *FLAGS* y CAI+D UNL-PIP 02552-2000
- *SO GNU/Linux, Octave, Xfig, Tgif, GMV*. Procesador *GiD* (CIMNE, Barcelona)