Teoría de la Computación

Notas de Práctica: Demostraciones por reducción al absurdo

Autor: Sergio Yapur

Introducción

Las demostraciones por reducción al absurdo pueden al principio causar un poco de confusión, debido a que nos ofrece mayor libertad que otras técnicas que tienen un formalismo más obvio, como ser la demostración directa, la indirecta, por casos, etc. En esas técnicas, el formalismo queda perfectamente definido en términos de las hipótesis y la conclusión a la que queremos llegar. Esto no significa que la demostración por reducción al absurdo no tenga un formalismo bien definido, sino simplemente que es un formalismo más flexible, y debido a esa flexibilidad constituye uno de los métodos más poderosos de demostración. Para entenderlo, profundicemos un poco en esta técnica.

Formalismo

Para demostrar una proposición de la forma

$$p \to q \tag{1}$$

Mediante la técnica por reducción al absurdo, es necesario poder construir una contradicción en el cuerpo de la demostración. Recordemos que una contradicción es una proposición que resulta siempre falsa, independientemente del valor de verdad de las proposiciones que la componen. Llamemos a esta contradicción con la letra C. Esta contradicción puede lograrse de varias formas. Enumeremos algunos ejemplos posibles:

- Un número que sea positivo y negativo a la vez
- Un número real que sea la raíz cuadrada de un número negativo
- Una matriz que sea invertible pero que tenga determinante nulo
- Una función derivable en todos lados, pero que no sea continua en un punto

En su forma más simple, la contradicción suele expresarse como $C = w \wedge -w$, que claramente es falsa independientemente de qué valor de verdad tome la proposición w. Pero tengamos en mente que no es la única forma posible (por ejemplo, pueden haber varias proposiciones involucradas). Solo importa que C sea una contradicción.

Ahora bien, ¿cómo se vincula esta contradicción con lo que queremos demostrar? Observemos la siguiente definición

$$R \equiv p \wedge (p \rightarrow q) \qquad (2)$$

Vemos que esta proposición es verdadera si vale la hipótesis y la implicación que tratamos de demostrar. O sea que (2) es lo que tratamos de demostrar. Desarrollémoslo

$$p \wedge (p \rightarrow q) \equiv p \wedge (-p \vee q) \equiv (p \wedge -p) \vee (p \wedge q) \equiv \mathbf{F} \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge q \qquad (3)$$

Por otro lado, observemos la siguiente construcción

$$-R \rightarrow C \qquad (4)$$

Como C es una contradicción, $C \equiv \mathbf{F}$, por lo que la implicación solo es verdadera[1] si $-R \equiv \mathbf{F}$, es decir, $R \equiv \mathbf{V}$. Como vimos en la ecuación (3), esto ocurre si ambos p y q son verdaderos, y por tanto, $p \rightarrow q$ es verdadero.

¿Qué significa todo esto? Que si negamos R y llegamos a una contradicción, la única posibilidad "viable" de acuerdo a (2) es que la implicación $p \rightarrow q$ sea verdadera. Hablamos de posibilidad viable porque en términos lógicos, también podría ocurrir que la hipótesis p sea falsa, pero este caso no nos interesa, ya que nos desvincula del teorema o resultado que queremos demostrar. Dicho de otra forma, si no vale la hipótesis p, no estamos demostrando el teorema en absoluto.

Ejemplo

Demostrar que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Antes de proceder con la demostración, pensemos por qué otros medios de demostración pueden ser más difíciles de implementar. Por ejemplo, el método directo no parece tan directo como su nombre lo dice, pues para ver que $\sqrt{2}$ no es racional, tenemos que ver como no se puede escribir como una fracción a/b para ninguna de las infinitas fracciones posibles.

Por otro lado, tampoco es claro cómo aplicar el método de demostración indirecta, ya que para cualquier número es racional, deberíamos poder deducir que este número no puede ser $\sqrt{2}$. Nuevamente, tenemos infinitos números racionales posibles para elegir…

Ahora bien, usando reducción al absurdo, podemos suponer que $\sqrt{2}$ es un número racional, y llegar a una contradicción a partir de esa suposición. Entonces, existen números enteros a, b con $b \neq 0$, tales que

[1] La implicación en este caso representa nuestro proceso de demostración, donde pasamos de una expresión a otra equivalente, y asumimos que no hay errores. Por lo tanto la implicación es verdadera.

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \tag{5}$$

Además, supongamos que a y b no tienen factores en común (si no fuera así, podemos simplificar la fracción hasta hacerla irreducible y de ahí obtener a y b) Elevando al cuadrado y reordenando, queda

$$a^2 = 2b^2$$

Esto implica que a^2 es un número par, por lo que a es un número par. Es decir, existe un k tal que $a = 2k$. O sea que

$$a^2 = 4k^2 = 2b^2$$

Simplificando la última igualdad, obtenemos $b^2 = 2k^2$. Por lo tanto, b^2 es par, por lo tanto b es par.

Resumiendo, a partir de (5) dedujimos que ambos, a y b son pares, pero esto es una contradicción con respecto a la suposición de que no tenían factores en común (pues si ambos son pares, 2 es un factor común). Como llegamos a una contradicción, la única posibilidad restante es que $\sqrt{2}$ sea un número irracional.

En la nomenclatura que usamos antes, la contradicción es:

C: "a/b es una fracción irreducible" $\wedge$ "a y b tienen un factor común"

Mientras que las proposiciones son:

p: "un número es $\sqrt{2}$"

q: "el número es irracional"

Entonces, como vimos en (4), se demostró que $-R \rightarrow C$, y esto equivale a decir $p \rightarrow q$.