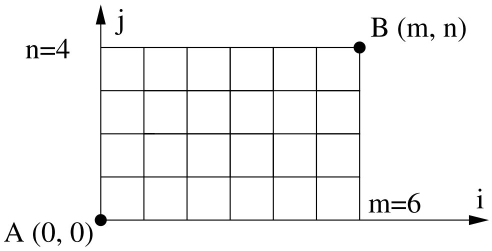
Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ingeniera y Ciencias Hdricas
Departamento de Informtica
Teora de la Computacin

Parcial 2, tema 1 [Sábado 30 de Mayo de 2009]

La evaluación dura 3 (tres) horas. Cada ejercicio debe sumar algún puntaje. Entregar en hojas separadas por ejercicio, numeradas, cada una con el Apellido en el Margen Superior Derecho. Entregar este enunciado. Respuestas incompletas reciben puntajes incompletos y cero si no justifica. No usar celulares, libros, ni apuntes.

1) Considere una cuadrícula G_1 de vértices $A(0,0)$, $B(m,0)$, $C(m,n)$ y $D(0,n)$, con $m,n \geq 0$, donde todos los puntos $P(i,j)$ tienen coordenadas enteras i,j, ver Fig. 1 (izq.). Interesa contar el número z de caminos para ir desde la esquina derecha inferior $B(m,0)$, hasta la esquina izquierda superior $D(0,n)$ si solo se puede ir hacia arriba o hacia la izquierda:
   a) Justifique una solución combinatoria para tal conteo, usando los principios de la suma y/o del producto. Por ejemplo, con lados $(m,n)=(4,2)$ hay $z=15$ caminos. Luego, escriba una Relación de Recurrencia (RR) para dicho conteo, incluyendo sus condiciones iniciales;
   b) Escriba el algoritmo recursivo `int z=caminos (m,n,i,j)`, que devuelva el número z en las condiciones del inciso $1a$. Incluya otra función con la llamada semilla.



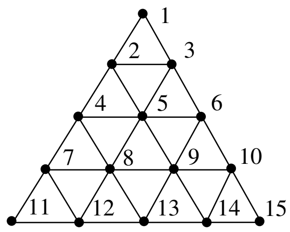


Figura 1: Cuadrícula G_1 para el inciso $1a$ (izq.). Triángulo T_4 para el inciso $2b$ (der.).

2) a) Defina grafo, aristas paralelas, vértice aislado, grafo simple, trayectoria, trayectoria simple, grafo conexo, ciclo, ciclo simple y ciclo de Euler. Demuestre que el número máximo e de aristas en un grafo simple conexo con n vértices es $e=n(n-1)/2$.
   b) Sea el grafo T_n como el mostrado en la Fig. 1 (der.), donde n es el número de pisos. Se muestra T_4. Siguiendo la notación para los vértices indicada en la figura, para un n general, £qué números tienen asignados los nodos en la última línea horizontal de T_n ? Justifique si T_2 tiene (o no) un ciclo de Euler y en caso afirmativo, indique uno a partir del vértice 1, listando la trayectoria de vértices.

3) a) Determine la solución de la Relación de Recurrencia (RR) $a_n = -5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 42 \cdot 4^n$, con las condiciones iniciales $a_1 = 56$ y $a_2 = 278$. **Verifique** su solución. Clasifique **exhaustivamente** la RR.
   b) Demuestre que $\sum_{k=1}^{n} k\ [C(n,k)]^2 = nC(2n-1, n-1)$ usando un argumento combinatorio. [*Ayuda*: Considere el problema de contar las formas de elegir de entre n profesores de informática y n profesores de matemáticas una comisión de n miembros y de elegir después un presidente para dicha comisión que sea profesor de informática.]
   c) La ecuación diofántica $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=29$ £cuántas soluciones tiene en enteros no negativos que satisfacen $x_1 < 8$, $x_2 > 8$ y $x_3 > 5$?

4) a) Demuestre que si se seleccionan cinco puntos en el interior de un cuadrado de lado 2, al menos dos de ellos están a distancia menor o igual que $\sqrt{2}$.
   b) Suponga que n es par. Pruebe que

$$2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n/2} C(n,2k)$$