Apellido y Nombres: ____________________

Carrera: ________ DNI: ____________________

[Llenar con letra mayúscula de imprenta GRANDE]

Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ingeniera y Ciencias Hdricas
Departamento de Informtica
Teora de la Computacin

Parcial 1, tema 1 [Sábado 25 de Abril de 2009]

La evaluación dura 3 (tres) horas. Cada ejercicio debe sumar algún puntaje. Entregar en hojas separadas por ejercicio, numeradas, cada una con el Apellido en el Margen Superior Derecho. Entregar este enunciado. Respuestas incompletas reciben puntajes incompletos y cero si no justifica. No usar celulares, libros, ni apuntes.

1) a) Enuncie las leyes de De Morgan generalizadas para la lógica y demuestre una de ellas.
   b) Dada la función proposicional $P(x, y)$ cuyo dominio de discurso es $D = \{d_1, d_2, ..., d_n\}$, con $n = |D|$ y $x, y \in D$, escriba un algoritmo `boolean Existex_Paratodoy (P,D,n)` que devuelve *True* si $\exists x \; \forall y \; P(x, y)$ es verdadero y *False* en caso contrario.
   c) Demuestre por inducción que cualquier tarifa postal de 12 o más centavos se puede cobrar usando sólo estampillas de 4 y 5 centavos.
2) a) Sea U un conjunto universal, y sean A, B y C subconjuntos de U. Enuncie cuatro propiedades de conjuntos.
   b) Defina función, función inyectiva, función sobreyectiva y función biyectiva. Justifique un ejemplo de una función que es inyectiva pero no es sobreyectiva.
   c) Escriba un algoritmo `boolean es_sobreyectiva (A,m,n)`, que devuelva *True* si la matriz $!A \in \mathbb{J}^{m\times n}$ de una relación binaria R de X a Y representa una función sobreyectiva y *False* en caso contrario, donde $\mathbb{J} = \{0, 1\}$, con $m = |X|$ y $n = |Y|$;
   d) Para el conjunto $X = \{2, 3, 4, 6, 12\}$, suponga que aRb significa que a es un divisor de b. Listar los conjuntos R, R^{-1}, $R \circ R$. Usando notación de conjuntos, indicar si R es reflexiva, simétrica y/o transitiva.
3) a) Demuestre que si x es racional y $x \neq 0$, entonces $1/x$ también es racional. [*Ayuda*: un número a es racional cuando puede escribirse como $a = p/q$, con p, $q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$];
   b) Sea f una función definida del conjunto A al conjunto B y sean S y T subconjuntos de A. Demuestre que $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$. Recuerde que cuando S es un conjunto, se define $f(S) = \{f(x)|x \in S\}$.
4) Sea w la sucesión definida por

$$w_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \quad n \geq 1.$$

   a) Encuentre una fórmula para la sucesión d definida como $d_n = \prod_{i=1}^{n} w_i$;
   b) Utilizando inducción matemática, demuestre que la fórmula hallada en el inciso anterior es válida para todo $n \geq 1$. En particular, utilice un método de demostración directo para probar el paso inductivo.
5) a) Sean X un conjunto no vacío y R una relación definida sobre X. Si $R = \emptyset$, es ésta una relación reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva y/o de equivalencia? Pruebe o desapruebe cuando corresponda.
   b) Sea el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Sobre el conjunto B que contiene los conjuntos potencia de todos los subconjuntos de A, es decir $B = \{\mathcal{P}(S)|S \subseteq A\}$, se define la relación: $X \, R \, Y$ si y sólo si $|X| = |Y|$. Entonces: (i) estudie qué propiedades cumple la relación; (ii) Si la relación es de equivalencia, dé las clases de equivalencia.