Apellido y Nombres: ______________________

Carrera: ________ DNI: ______________________

[Llenar con letra mayúscula de imprenta GRANDE]

Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ingeniera y Ciencias Hdricas
Departamento de Informtica
Teora de la Computacin

Parcial 2, tema 2 [Sábado 30 de Mayo de 2009]

La evaluación dura 3 (tres) horas. Cada ejercicio debe sumar algún puntaje. Entregar en hojas separadas por ejercicio, numeradas, cada una con el Apellido en el Margen Superior Derecho. Entregar este enunciado. Respuestas incompletas reciben puntajes incompletos y cero si no justifica. No usar celulares, libros, ni apuntes.

1) Considere una cuadrícula G_1 de vértices $A(0,0)$, $B(m,0)$, $C(m,n)$ y $D(0,n)$, con $m,n \geq 0$, donde todos los puntos $P(i,j)$ tienen coordenadas enteras i,j, ver Fig. 1 (izq.). Interesa contar el número z de caminos para ir desde la esquina izquierda superior $D(0,n)$, hasta la esquina derecha inferior $B(m,0)$ si solo se puede ir hacia abajo o hacia la derecha:
   a) Justifique una solución combinatoria para tal conteo, usando los principios de la suma y/o del producto, cuando no se puede pasar por el vértice $H(r,s)$. Por ejemplo, con lados $(m,n) = (4,2)$ y bloqueo en $(r,s) = (2,1)$, quedan $z = 6$ caminos. Luego, escriba una Relac. de Recurr. (RR) para dicho conteo, incluyendo sus condic. iniciales;
   b) Escriba el algoritmo recursivo `int z=con_bloqueo(m,n,r,s,i,j)`, que devuelva el número z de caminos en las condiciones del inciso $1a$. Incluya otra función con la llamada semilla.

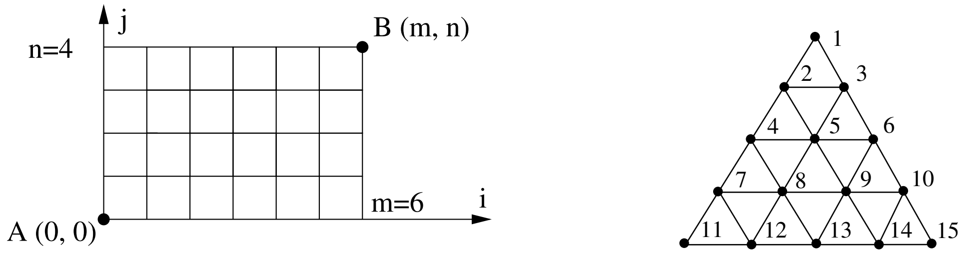

Figura 1: Cuadrícula G_1 para el inciso $1a$ (izq.). Triángulo T_4 para el inciso $2b$ (der.).

2) a) Defina grafo, aristas paralelas, vértice aislado, grafo simple, trayectoria, trayectoria simple, grafo conexo, ciclo, ciclo simple y ciclo de Euler. Muestre que el número máximo e de aristas en un grafo simple no-conexo con n vértices es $e = (n-1)(n-2)/2$.
   b) Sea el grafo T_n como el mostrado en la Fig. 1 (der.), donde n es el número de pisos. Se muestra T_4. Siguiendo la notación para los vértices indicada en la figura, para un n general, £qué números tienen asignados los nodos en la última línea horizontal de T_n ? Justifique si T_2 tiene (o no) un ciclo de Euler y en caso afirmativo, indique uno a partir del vértice 1, listando la trayectoria de vértices.

3) a) Determine la solución de la Relación de Recurrencia (RR) $2a_n = 8a_{n-1} - 6a_{n-2} + 5n$, con las condiciones iniciales $a_1 = 0$ y $a_2 = 1$. Verifique su solución. Clasifique la RR.
   b) Mediante un argumento combinatorio, demuestre que $\sum_{k=1}^{n} k\ C(n,k) = n2^{n-1}$. [*Ayuda*: Considere el problema de contar las formas de elegir una comisión y de elegir después el presidente de dicha comisión.]
   c) La ecuación diofántica $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21$, £cuántas soluciones en enteros no negativos tiene que satisfacen $1 \leq x_2 < 4$ y $x_3 \geq 15$?

4) a) Sea (x_i, y_i, z_i), con $1 \leq i \leq 9$, un conjunto de nueve puntos distintos del espacio con coordenadas enteras. Demuestre que, de entre los segmentos que unen cada pareja de ellos, hay, al menos, uno cuyo punto medio tiene coordenadas enteras.
   b) Suponga que n es par. Pruebe que

$$2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n/2} C(n, 2k-1)$$