

Examen final [Jueves 10 de Diciembre de 2009]

Instrucciones: la evaluación dura 3 hs (tres horas). NO se asignan puntos a las respuestas aún correctas pero sin justificación o desarrollo. Respuestas incompletas reciben puntajes incompletos. Entregar en hojas separadas por ejercicio, numeradas, cada una con apellido en el margen superior derecho.

- 1) Se reparten caramelos a un grupo de niños de la siguiente manera: se entrega 1 caramelo al primer niño, 2 al segundo, 3 al tercero, 4 al cuarto, y así sucesivamente.
 - a) Justifique cuántos caramelos en total se reparten si hay 12 niños;
 - b) Si la misma cantidad de caramelos se hubiesen repartido en forma *arbitraria*, ¿cuántos niños deben escogerse para obtener *deliberadamente* al menos 13 caramelos entre ellos?
 - c) ¿De cuántas maneras se puede redistribuir esa misma cantidad entre todos los niños? ¿De cuántas maneras se puede hacer dicha redistribución si a cada uno le corresponde al menos 2 caramelos?
- 2)
 - a) Dada la expresión $(x + (x + 5y)/3y - 4) + (x/(y + 2x)) - ((x + 5 - y)/(y + 5 - x))$, represéntela como un árbol binario y obtenga las notaciones prefija y posfija.
 - b) Dado el grafo G_1 de la Fig. 1 (izq.) encuentre un árbol generador mediante un algoritmo de Búsqueda en Profundidad (BP). ¿Cuántas maneras de elegir la raíz existen?
 - c) Dado el grafo ponderado G_2 de la Fig. 1 (der.) encuentre un Arbol de Expansión Mínimo (AEM) mediante el algoritmo de Prim, teniendo al vértice a como raíz.

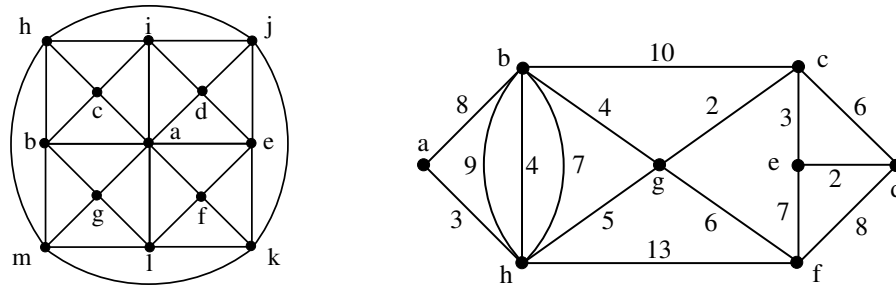


Figura 1: Grafo G_1 (inciso 2a, izq.) y grafo ponderado G_2 (incisos 2b y 2c, der.).

- 3)
 - a) Sea el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y considere el conjunto potencia $B = \mathcal{P}(A)$. Se define la relación: $X R Y$ si y sólo si $|X| = |Y|$, para todo $X, Y \in B$. Entonces: (i) estudie qué propiedades cumple R ; (ii) Si la relación es de equivalencia, dé las clases de equivalencia.
 - b) Suponga que existen tres pilas de pelotas rojas, verdes y amarillas, y que cada pila contiene al menos 7 pelotas. ¿De cuántas maneras se pueden elegir 7 pelotas? ¿Y si al menos debe haber una de cada color?
 - c) Una encuesta con 151 personas sobre 3 programas de televisión A : “Desastres aéreos”, B : “Cazadores de mitos”, C : “TN Ciencia”, encontró que 68 ven A , 61 ven B , 52 ven C , 16 ven tanto A como B , 25 ven tanto A como C , 19 ven tanto B como C , y que 26 no miran ninguno de estos programas. ¿Cuántas personas ven los tres programas?
- 4)
 - a) Demuestre usando inducción que $1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = n(3n - 1)/2$ para $n \geq 1$.
 - b) Justifique si la proposición $\forall x \in \mathbb{Z}: |x| \geq 2 \rightarrow x^2/(x + 1) > 0$ es verdadera o falsa.
 - c) Dar una definición, notación y un ejemplo de: función, función inyectiva y función sobreyectiva. Dar un ejemplo de una función que sea sobreyectiva pero no-inyectiva.