

Parcial 1, tema 3 [Sábado 25 de Abril de 2009]

La evaluación dura 3 (tres) horas. Cada ejercicio debe sumar algún puntaje. Entregar en hojas separadas por ejercicio, numeradas, cada una con el Apellido en el Margen Superior Derecho. Entregar este enunciado. Respuestas incompletas reciben puntajes incompletos y cero si no justifica. No usar celulares, libros, ni apuntes.

- 1)
 - a) Defina partición S de un conjunto X . Demuestre que la relación R asociada a la partición S es reflexiva, simétrica y transitiva.
 - b) Dada la función proposicional $P(x, y)$ cuyo dominio de discurso es $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$, con $n = |D|$ y $x, y \in D$, escriba un algoritmo **boolean** `Paratodox_Paratodoy` (P, D, n) que devuelve *True* si $\forall x \forall y P(x, y)$ es verdadero y *False* en caso contrario;
 - c) Demuestre por inducción que $3^n + 7^n - 2$ es divisible por 8 para $n > 0$.
- 2)
 - a) Sea U un conjunto universal, y sean A, B y C subconjuntos de U . Enuncie cuatro propiedades de conjuntos.
 - b) Defina función, función inyectiva, función sobreyectiva y función biyectiva. Justifique un ejemplo de una función que no es sobreyectiva ni es inyectiva
 - c) Escriba un algoritmo **boolean** `es_biyectiva` (A, m, n), que devuelva *True* si la matriz $A \in \mathbb{J}^{m \times n}$ de una relación binaria R de X a Y representa una función biyectiva y *False* en caso contrario, donde $\mathbb{J} = \{0, 1\}$, con $m = |X|$ y $n = |Y|$.
 - d) Para el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, suponga que aRb significa que 3 divide a $a - b$. Listar los conjuntos $R, R^{-1}, R \circ R$. Usando notación de conjuntos, indicar si R es reflexiva, simétrica y/o transitiva.
- 3)
 - a) Demuestre que si z es irracional, entonces $1/z$ también lo es. [Ayuda: un número a es irracional cuando no puede escribirse como $a = p/q$, con $p, q \in \mathbb{Z}$].
 - b) Sea g una función definida del conjunto S al conjunto T y sean A y B subconjuntos de S . Demuestre que $g(A \cup B) = g(A) \cup g(B)$. Recuerde que cuando A es un conjunto, se define $g(A) = \{g(u) \mid u \in A\}$.
- 4)
 - a) Sean X el conjunto vacío y R una relación definida sobre X . Si $R = \emptyset$, es ésta una relación reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva y/o de equivalencia? Pruebe o desapruebe cuando corresponda.
 - b) Sea el conjunto $H = \{1, 2, 3\}$. Sobre el conjunto potencia $\mathcal{P}(H)$ se define la relación R con $A R B$ si y sólo si $|A| = |B|$. Entonces: (i) estudie qué propiedades cumple la relación; (ii) si la relación es de equivalencia, dé las clases de equivalencia.
- 5) Sea w la sucesión definida por

$$w_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \quad n \geq 1.$$

- a) Encuentre una fórmula sencilla para la sucesión d definida como $d_n = \sum_{k=1}^n w_k$, tal que no involucre sumatorias [Ayuda: calcule primero d_1, d_2, d_3 e infiera]
- b) Utilizando inducción matemática, demuestre que la fórmula hallada en el inciso anterior es válida para todo $n \geq 1$. En particular, utilice un método de demostración directo para probar el paso inductivo.