Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Departamento de Informática
Teoría de la Computación

Globalizador, tema 1 [Viernes 02 de Julio de 2010]

Instrucciones: **la evaluación dura 3 hs (tres horas). NO se asignan puntos a las respuestas aún correctas pero sin justificación o desarrollo. Respuestas incompletas reciben puntajes incompletos. entregar en hojas SEPARADAS por EJERCICIO, numeradas, cada una con APELLIDO en el margen SUPERIOR DERECHO**.

1) a) (i) Defina tautología, contradicción y contingencia, y dé un ejemplo de cada una; (ii) En una implicación, indique cuál es la condición necesaria, cuál es la condición suficiente y dé un ejemplo.

   b) (i) Justifique un ejemplo de una función de Z_0^+ en Z_0^+ que sea sobreyectiva pero no-inyectiva, donde Z_0^+ es el conjunto de los números enteros no-negativos; (ii) Justifique si $f(x) = \log_2(x)$, de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$, es una función (o no). Si lo fuera justifique si es inyectiva, sobreyectiva y/o biyectiva.

2) a) (i) Justifique cuál es el conjunto de partes del conjunto vacío $\emptyset$ y cuál es el conjunto de partes del conjunto $\{\emptyset\}$; (ii) Justifique si $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

   b) (i) Determine el valor de verdad de $\forall x \in \mathbb{R}\ (x^2 \neq -1)$.

3) a) Justifique de cuántas formas pueden colorearse las caras de un cubo con dos colores cuando: (i) sus caras son distinguibles; (ii) cuando sus caras no-son distinguibles.

   b) Justifique el número de soluciones de la ecuación diofántica $x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$, con $x_1 \geq 2$, $2 \leq x_2 \leq 5$, utilizando el principio de inclusión-exclusión cuando fuera posible.

4) a) (i) Demuestre el teorema binomial $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\ a^{n-k} b^k$ usando inducción sobre n; (ii) Demuestre que $f_n > (3/2)^n$ para todo entero $n \geq 5$, donde f_n está dada por $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, cuando $n \geq 3$, con $f_1 = 1$ y $f_2 = 2$.

   b) Suponga las funciones $g : A \to B$ y $f : B \to C$. Probar que: (i) Si f y g son inyectivas, entonces $f \circ g$ también lo es; (ii) Si f y g son sobreyectivas, entonces $f \circ g$ también lo es.

5) a) Dibuje un árbol T con n vértices y las siguientes propiedades o justifique por qué no es posible: (i) $n = 7$, vértices de grados 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3; (ii) $n = 20$, todos de grado 2; (iii) $n = 20$ y 21 aristas.

   b) Escriba un algoritmo recursivo `int binomial (a,b)` que calcule $C(a,b)$ con a y b enteros no-negativos. *Restricción: no puede utilizar la función factorial.*

6) a) (i) Defina r-combinación, expréselo en símbolos y, usando los principios de conteo, demuestre una fórmula para calcularlo; (ii) Usando los principios de conteo justifique el número de relaciones R en un conjunto A de n elementos tales que son antisimétricas.

   b) Sea el grafo $G = (V, E)$ posiblemente multiconexo y sea $\boldsymbol{A}$ su matriz de adyacencias con respecto al orden de los vértices $v_1, v_2, ..., v_n$. Demuestre que el número de caminos distintos de longitud r entre v_i y v_j, con $r > 0$, es igual a la entrada i, j de $\boldsymbol{A}^r$.