Apellido y Nombres: ________________________________

Carrera: ________ DNI: ____________________________

[Llenar con letra mayúscula de imprenta GRANDE]

Globalizador, tema 2 [Viernes 02 de Julio de 2010]

Instrucciones: **la evaluación dura 3 hs (tres horas). NO se asignan puntos a las respuestas aún correctas pero sin justificación o desarrollo. Respuestas incompletas reciben puntajes incompletos. entregar en hojas SEPARADAS por EJERCICIO, numeradas, cada una con APELLIDO en el margen SUPERIOR DERECHO**.

1) a) (i) Defina proposición recíproca, contrarrecíproca e inversa, dé un ejemplo de cada una y justifique cuáles de ellas son lógicamente equivalentes entre sí; (ii) Enuncie las leyes de De Morgan generalizadas para la lógica y demuestre una de ellas.

   b) (i) Justifique un ejemplo de una función de Z_0^+ en Z_0^+ que sea inyectiva pero no-sobreyectiva, donde Z_0^+ es el conjunto de los números enteros no-negativos; (ii) Justifique si $g(u) = -\sqrt{u}$, de $\mathbb{R}_0^+$ en $\mathbb{R}$, es una función (o no). Si lo fuera justifique si es inyectiva, sobreyectiva y/o biyectiva.

2) a) Justifique: (i) Si $\emptyset \subseteq A$ y si $A \subseteq A$, para cualquier conjunto A; (ii) Si fuera verdad que $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$.

   b) (i) Determine el valor de verdad de $\exists x \in \mathbb{R}\ (x^2 = x)$.

3) a) Justifique de cuántas formas pueden colorearse las caras de un tetraedro con dos colores cuando: (i) sus caras son distinguibles; (ii) cuando sus caras no-son distinguibles.

   b) Justifique el número de soluciones de la ecuación diofántica $x_1 + x_2 + x_3 \leq 11$, con $x_2 \geq 2$, $2 \leq x_3 \leq 5$, utilizando el principio de inclusión-exclusión cuando fuera posible.

4) a) (i) Demuestre el teorema binomial $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\ a^{n-k}b^k$ usando inducción sobre n; (ii) Demuestre que $f_n > (3/2)^n$ para todo entero $n \geq 5$, donde f_n está dada por $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, cuando $n \geq 3$, con $f_1 = 1$ y $f_2 = 2$.

   b) Suponga las funciones $g : A \to B$ y $f : B \to C$. Probar que (i) Si f y g son inyectivas, entonces $f \circ g$ también lo es; (ii) Si f y g son sobreyectivas, entonces $f \circ g$ también lo es.

5) a) Dibuje un árbol T con n vértices y las siguientes propiedades o justifique por qué no es posible: (i) $n = 7$, vértices de grados 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3; (ii) $n = 20$, todos de grado 2; (iii) $n = 20$ y 21 aristas.

   b) Escriba un algoritmo recursivo `int binomial (a,b)` que calcule $C(a,b)$ con a y b enteros no-negativos. *Restricción: no puede utilizar la función factorial.*

6) a) (i) Defina r-permutación, expréselo en símbolos y, usando los principios de conteo, demuestre una fórmula para calcularlo; (ii) Usando los principios de conteo justifique el número de relaciones R en un conjunto A de n elementos tales que son simétricas.

   b) (i) Enuncie y simbolice las tres propiedades que caracterizan la partición de un conjunto A; (ii) Sea R una relación de equivalencia en un conjunto A, demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes: aRb, $[a] = [b]$ y $[a] \cap [b] \neq \emptyset$.