Examen final [Jueves 18 de Febrero de 2010]

La evaluación dura tres horas. TODOS los ejercicios deben sumar algún puntaje. NO se asignan puntos a las respuestas aún correctas pero sin justificación o desarrollo. Respuestas incompletas reciben puntajes incompletos. Entregar en hojas separadas por ejercicio, numeradas, cada una con apellido en el margen superior derecho.

1) a) Se arroja diez veces una moneda: (i) ¿cuántos resultados posibles tienen exactamente 3 caras? (ii) ¿cuántos resultados tienen, a lo más, 3 caras? (iii) ¿cuántos resultados tienen 1 cara en el quinto lanzamiento?

b) De cuántas maneras se pueden repartir 22 libros diferentes entre 5 estudiantes de manera que 2 reciban 5 libros cada uno y los otros 3 reciban 4 libros cada uno.

c) Justifique si es posible (o no) conectar 5 computadoras de manera que al menos dos de ellas tengan conexión directa a un número idéntico de computadoras.

2) a) Dado el grafo G_1 de la Fig. 1 (izq.): (i) encuentre un árbol generador T mediante un algoritmo de Búsqueda en Profundidad (BP) usando el orden $lkjihgfedcba$; (ii) dibujar T como un árbol con raíz, indicar el nivel de cada vértice y la altura de T; (iii) Dado que T en este caso también es un árbol binario, listar sus vértices en posorden; (iv) Escriba un algoritmo recursivo `posorden (n)` que recorra los vértices de T usando el recorrido en posorden, en donde n es un vértice genérico de T.

b) Sea el grafo T_n como el mostrado en la Fig. 1 (der.), donde n es el número de pisos. Se muestra T_4. (i) Siguiendo la notación para los vértices indicada en la figura, para un n general, ¿qué números tienen asignados los nodos en la última línea horizontal de T_n ? (ii) Justifique si T_2 tiene (o no) un ciclo de Euler y en caso afirmativo, indique uno a partir del vértice 1, listando la trayectoria de vértices.

c) Sea un conjunto A con $n = |A|$ elementos. Demostrar que $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$, donde $\mathcal{P}(A)$ es el conjunto de partes (o conjunto potencia), usando (i) inducción, (ii) un argumento combinatorio.

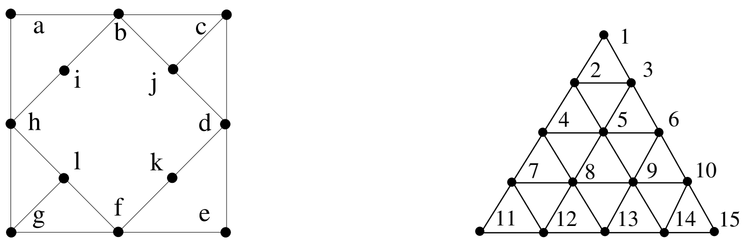

Figura 1: Grafos G_1 (inciso $2a$, izq.) y T_4 (inciso $2b$, der.).

3) a) Jutifique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

i) Si R y S son relaciones simétricas, entonces $R \cup S$ lo es.

ii) Si la relación R es un orden parcial, entonces también es una relación de equivalencia.

iii) Si R y S son relaciones antisimétricas, entonces $R \circ S$ también lo es.

b) En un conjunto finito X de n elementos utilice los principios de conteo para deducir una fórmula que cuente el número de relaciones simétricas en X.

c) Para la sucesión $\{r_n\}$ definida por $r_n = (2 + n)3^n$, con $n > 0$,

i) Determine una fórmula para r_{n-1} y r_{n-2}.

ii) Muestre que $\{r_n\}$ satisface $r_n = 6r_{n-1} - 9r_{n-2}$ para $n \geq 2$.