Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Departamento de Informática
Teoría de la Computación

Examen final [Lunes 12 de Diciembre de 2011]

La evaluación dura 3 (tres) horas. Entregar en hojas separadas por ejercicio, numeradas, cada una con apellido en el margen superior derecho. Entregar este enunciado. Puntaje nulo a las respuestas aún correctas pero sin justificación o desarrollo. Respuestas incompletas reciben puntajes incompletos. No usar libros ni apuntes.

1) a) Justifique el valor de verdad de $\forall x \forall y\ (x^2 < y + 1)$, donde el dominio de discurso es el conjunto de los números reales.

   b) Escriba la recíproca y la contrapositiva de la implicación: *si* $(1 - n)$ *es par, entonces* n^3 *es impar*, y dé una demostración *directa* de la implicación dada.

   c) Demuestre usando inducción que $n! < n^n$ para todo entero $n > 1$.

2) a) Demuestre la ley asociativa (con y sin diagramas de Venn), $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ para todo conjunto A, B y C.

   b) Sean R y S relaciones sobre un conjunto X, demuestre o dé un contrajemplo: si R y S son simétricas, entonces $R \cap S$ es simétrica.

   c) En el conjunto $A = \{a, b, c\}$ justifique un ejemplo de una relación que sea reflexiva, no-simétrica, no-antisimétrica y no-transitiva. ¿Es la única posible?

3) a) Considere los conjuntos: $A = \{1\}$, $B = \{a, b, c\}$ y $C = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, y las funciones $g = \{(1, b)\}$ y $f = \{(a, \beta), (b, \beta), (c, \alpha)\}$. Obtenga la composición $f \circ g$.

   b) Sea la función $f(x) = x^2 + 1$ de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. ¿Es inyectiva, sobreyectiva y/o biyectiva?

   c) Considere las letras $ABCDEF$. Justifique cuántas cadenas de longitud $n = 6$, sin elementos repetidos, se pueden formar bajo las siguientes condiciones: (i) A aparece después que D; (ii) No contienen las subcadenas BA ni EB. (iii) A aparece después que DEF.

4) *Nota: No es estrictamente necesario construir una tabla, en su lugar pueden dibujarse los grafos intermedios (debidamente trazados) que resulten del uso de cada algoritmo.*

   a) Dado el grafo G_1 de la Fig. 1 (izq.), encuentre un circuito hamiltoniano y un circuito euleriano, o justifique que no-existen.

   b) En el grafo G_2 de la Fig. 1 (centr.) utilice el algoritmo de Prim, o bien el de Kruskal, para hallar un árbol de expansión mínimo, *mostrando los pasos intermedios* e indicando el peso mínimo hallado. ¿Podría existir otro de peso aún menor? ¿Por qué?

   c) Dado el grafo G_2 de la Fig. 1 (der.) y usando el orden alfabético (i) Encuentre un árbol de expansión T mediante búsqueda *en profundidad*, indicando el orden en que se van agregando las aristas; (ii) Dibujar T como un árbol con raíz, indicar hojas, niveles y altura de T, los hermanos y antecesores de B, y recórralo en posorden.

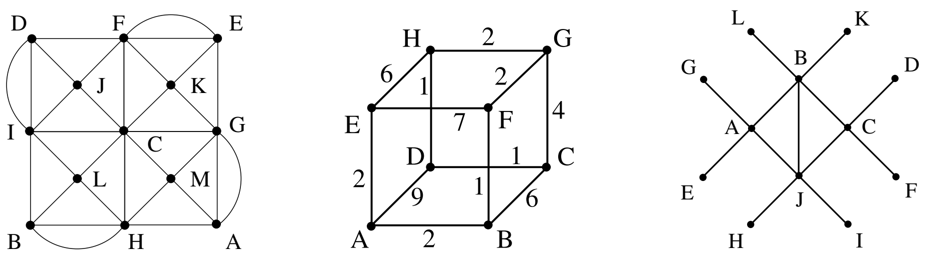

Figura 1: Grafos G_1 (izq.), G_2 (cent.) y G_3 (der.) para los incisos $4a$, $4b$ y $4c$.