Apellido y Nombres: ______________________

Carrera: ________ DNI: ______________________

[Llenar con letra mayúscula de imprenta GRANDE]

Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Departamento de Informática
Teoría de la Computación

Examen final [Jueves 17 de Febrero de 2011]

La evaluación dura tres horas. TODOS los ejercicios deben sumar algún puntaje. NO se asignan puntos a las respuestas aún correctas pero sin justificación o desarrollo. Respuestas incompletas reciben puntajes incompletos. Entregar en hojas Separadas por Ejercicio, numeradas, cada una con Apellido en el margen Superior Derecho .

1) a) Justifique el valor de verdad de $\exists x\ \forall y\ (x < y) \rightarrow (x^2 < y^2)$, y escriba su negación, donde $x, y \in \mathbb{R}$.

   b) Dé una definición recursiva de la sucesión de Fibonacci $\{f_n\}$, y demuestre por inducción que $f_n > (3/2)^{n-1}$ para todo entero $n \geq 6$.

   c) Demuestre la ley asociativa $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ para todo conjunto A, B y C.

2) a) Sea f la función de $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ en X definida por $f(x) = 4x \bmod 5$. Escriba f como un conjunto de pares ordenados, trace el diagrama de flechas de f y justifique si es inyectiva, sobreyectiva y/o biyectiva. [Ayuda: recordar que $c = a \bmod$ b es el resto (o residuo) obtenido al dividir a con b, donde b es un entero positivo, por lo que $0 \leq c < b$].

   b) Sea R y S relaciones sobre un conjunto X. Justifique o dar un contrajemplo: si R y S son reflexivas, entonces $R \cap S$ es reflexiva.

   c) Sea A la matriz de m filas y n columnas de una relación R relativa a un orden dado, con $m \neq n$. Indique todas las condiciones a chequear en A para poder concluir que R es una función inyectiva e incluya un ejemplo.

3) a) Dar un ejemplo de una relación en un conjunto que: (i) sea simétrica y antisimétrica; (ii) no sea simétrica ni antisimétrica.

   b) Justifique de cuántas maneras pueden sentarse 5 varones y 8 mujeres en una mesa circular, si 2 varones no pueden sentarse juntos.

   c) Considere la expresión $(x+y+z)^7$. Usando los principios de conteo encuentre el número de términos de su expansión.

4) a) En el grafo G_1 de la Fig. 1 (izq.): (i) Encuentre un árbol de expansión T_1 mediante búsqueda en profundidad usando el orden alfabético; (ii) Listar T_1 en preorden y en posorden. ¿Es T_1 un árbol binario completo?

   b) En el grafo ponderado G_2 de la Fig. 1 (centro): utilice el algoritmo de Dijkstra para hallar una trayectoria de longitud mín. desde el vértice p al a, trácela e indique su longitud.

   c) En el grafo ponderado G_3 de la Fig. 1 (der.): (i) Encuentre un árbol de expansión de peso mínimo T_3 usando el algoritmo de Prim desde el vértice a ¿Por qué, en general, no hay unicidad?; (ii) Dibuje T_3 aparte indicando: raíz, hojas, nivel de cada vértice, altura, antecesores, descendientes y hermanos de g.

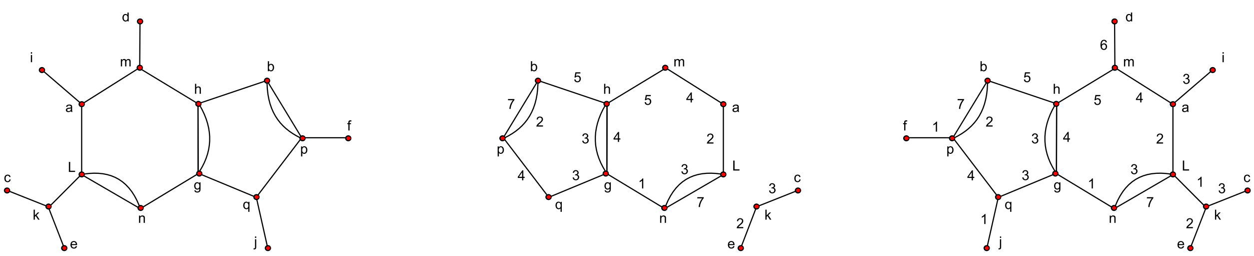

Figura 1: grafo G_1 (izq.) y grafos ponderados G_2 (centro) y G_3 (der.) para los incisos $4a$-$4c$.