Apellido y Nombres: ____________________________

Carrera: ________ DNI: ____________________________

[Llenar con letra mayúscula de imprenta GRANDE]

Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Departamento de Informática
Teoría de la Computación

Examen final [Jueves 22 de Diciembre de 2011]

Instrucciones: **La evaluación dura 3 (tres) horas. Todos los ejercicios deben sumar algún puntaje. Entregar en hojas separadas por ejercicio, numeradas, cada una con apellido en el margen superior derecho. Entregar este enunciado. Puntaje nulo a las respuestas aún correctas pero sin justificación o desarrollo. Respuestas incompletas reciben puntajes incompletos. No usar libros ni apuntes**.

1) a) Defina equivalencia lógica, y determine si $P \equiv Q$ cuando $P \equiv (p \to r) \wedge (q \to r)$ y $Q \equiv (p \vee q) \to r$, donde p, q, r son proposiciones.

   b) Escriba la recíproca y la contrapositiva de la implicación: *si* n^2 *es impar, entonces* $(1-n)$ *es par*, y dé una demostración *directa* de la *contrapositiva*.

   c) Determine el valor de verdad de $\forall x \forall y\ (x^2 < y+1)$ con $x, y \in \mathbb{R}$.

2) a) Demuestre la ley asociativa (con y sin diagramas de Venn), $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ para todo conjunto A, B y C.

   b) Sea la función $f(x) = x^3 + 1$ de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. ¿Es inyectiva, sobreyectiva y/o biyectiva?

   c) (i) Demuestre que $C(n,k) = C(n, n-k)$; (ii) Clasifique y resuelva la Relación de Recurrencia (RR) $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ para enteros $n \geq 2$ cuando $a_0 = 5$ y $a_1 = 7$.

3) a) Sean R y S relaciones sobre un conjunto X, demuestre o dé un contraejemplo: si R y S son simétricas, entonces $R \cup S$ es simétrica.

   b) En el conjunto $A = \{a, b, c\}$ justifique un ejemplo de una relación que sea reflexiva, no-simétrica, antisimétrica y transitiva ¿Es la única posible? ¿por qué?

   c) Un conjunto de libros: 5 de Compiladores, 3 de Redes, y 2 de Programación, todos diferentes. De cuántas maneras pueden colocarse en una repisa: (i) sin restricciones; (ii) los 5 libros de Compiladores van a la derecha en cualquier orden.

4) *Nota: No es estrictamente necesario construir una tabla, en su lugar pueden dibujarse los grafos intermedios que resulten del uso de cada algoritmo.*

   a) En el grafo G_1 de la Fig. 1 (izq.) trace un ciclo de Euler y un ciclo de Hamilton o justifique que no es posible.

   b) En el grafo G_2 de la Fig. 1 (centro) encuentre un árbol de expansión T_2 mediante búsqueda en profundidad usando el orden alfabético.

   c) (i) En el grafo G_3 de la Fig. 1 (der.) utilice el algoritmo de Kruskal, para hallar un árbol de expansión mínimo T_3, mostrando todos los pasos intermedios e indicando el peso mínimo hallado. ¿Podría existir otro de peso aún menor? ¿por qué? Justifique cuidadosamente. (ii) Dibujar T_3 como un árbol con raíz, indicar hojas, niveles y altura de T_3, los hermanos y antecesores de D, y recórralo en posorden.

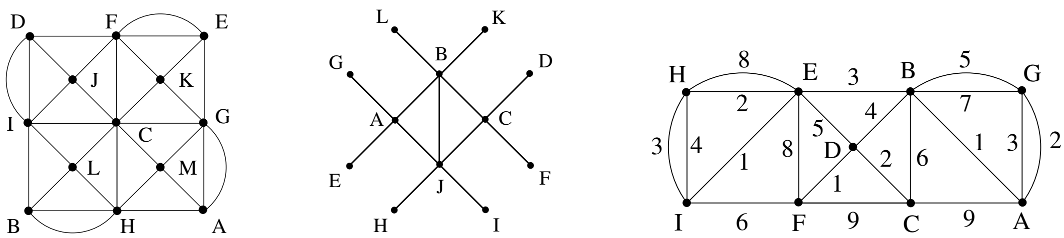

Figura 1: Grafos G_1 (izq.), G_2 (cent.) y G_3 (der.) para los incisos $4a$, $4b$ y $4c$.