Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Departamento de Informática
Teoría de la Computación

Parcial 1, tema 3 [Viernes 13 de Abril de 2012]

La evaluación dura 3 (tres) horas. Cada ejercicio debe sumar algún puntaje. Entregar en hojas separadas por ejercicio, numeradas, cada una con el Apellido en el margen superior derecho. Entregar este enunciado. Respuestas incompletas reciben puntajes incompletos incluso cero si no justifica. No usar libros ni apuntes.

1) a) Encuentre una proposición compuesta en función de las proposiciones p, q y r que sea verdadera cuando exactamente dos cualesquiera de las proposiciones p, q y r sean verdaderas y que sea falsa en cualquier otro caso.

   b) Escriba la recíproca y la contrapositiva (o contrarecíproca) de la implicación: *si* n^2 *es impar, entonces* $(1-n)$ *es par*, y dé una demostración *directa* de la *contrapositiva.*

   c) Justifique si:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow (q \vee r) \\ p \vee \neg q \\ q \vee r \\ \hline \therefore q \end{array}$$

   es un argumento válido, donde p, q, r son proposiciones.

2) a) Determine si $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ y $\exists x (P(x) \wedge Q(x))$ son lógicamente equivalentes. Proporcione un ejemplo.

   b) Justifique el valor de verdad de la siguiente afirmación: $\forall x\ (x > 1 \rightarrow x/(x^2+1) < 1/3)$, donde $x \in \mathbb{R}$.

   c) Escriba un algoritmo que devuelva *True* cuando $\exists x \forall y\ P(x, y)$ lo es, y *False* en caso contrario, con x, y en un dado dominio de discurso D.

3) a) (i) Defina y simbolice la diferencia simétrica de los conjuntos A y B, represéntelo con un diagrama de Venn y dé un ejemplo; (ii) Demuestre $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

   b) Determine el conjunto de partes de: (i) $\emptyset$; (ii) $\{\emptyset\}$.

   c) Sean A y B conjuntos: (i) defina el complemento de A; (ii) Demuestre $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

4) a) Demuestre que si $3n + 2$ es un entero par, entonces $n + 5$ es un entero impar.

   b) (i) Defina y simbolice: función, función inyectiva y función sobreyectiva; (ii) Justifique un ejemplo de una función ni inyectiva ni sobreyectiva.

   c) Justifique si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función y si lo fuera, entonces dé el dominio, el codominio, la imagen, y determine si es inyectiva y/o sobreyectiva, en los siguientes casos: (i) $f(x) = x^3 + 1$; (ii) $f(x) = x^2 + 1$.

5) a) (i) Enuncie el principio de inducción matemática y expresarlo simbólicamente;
   (ii) Demuestre usando inducción que $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$ para todo entero n no-negativo.

   b) Demuestre usando inducción que $n^3 + 2n$ es divisible por 3, para todo entero n no-negativo.

   c) Demuestre usando inducción que $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, para $x \geq 1$ y enteros $n \geq 1$.