Apellido y Nombres: ____________________

Carrera: ________ DNI: ____________________

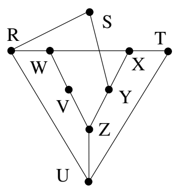
[Llenar con letra mayúscula de imprenta GRANDE]

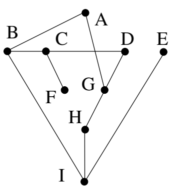
Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Departamento de Informática
Teoría de la Computación

Examen final [Jueves 26 de Julio de 2012]

La evaluación dura 3 (tres) horas. Cada ejercicio debe sumar algún puntaje. Entregar en hojas separadas por ejercicio, numeradas, cada una con apellido en el margen superior derecho. Entregar este enunciado. Respuestas incompletas reciben puntajes incompletos incluso cero si no justifica. No usar libros ni apuntes.

1) a) Escriba y demuestre 4 equivalencias lógicas con 2 variables lógicas p y q simultáneamente.
   b) Considere $q \wedge (\neg r \vee p)$ y $q \vee (r \wedge \neg p)$ Determine si son lógicamente equivalentes, y justifique si cada una es una tautología, contradicción, o contingencia.
   c) Escriba la contrapositiva de "si $3n$ es par, entonces n es par", para todo entero n, y demuestre una de ellas. ¿Por qué es suficiente demostrar una sola?
2) a) Justifique la veracidad (o no) de: $\forall x \exists y : (x + y = y)$, con $x, y \in \mathbb{R}$.
   b) Enuncie y represente con diagramas de Venn cuatro *identidades* (propiedades o leyes) de conjuntos, distintas de la ley conmutativa, y demuestre una.
   c) Demuestre usando inducción que $B \cap \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k=1}^{n} (B \cap A_k)$, para todo entero $n \geq 2$, donde $A_1, A_2, ..., A_n$ y B son conjuntos.
3) a) (i) Defina y simbolice cuando una relación R en un conjunto X es transitiva, y dé un ejemplo distinto de la relación identidad; (ii) Escriba un algoritmo `es_simetrica (A)` que devuelva *True* si la matriz $\boldsymbol{A}$ de una relación R en un conjunto Y con n elementos es simétrica y *False* en caso contrario.
   b) Escriba y demuestre una fórmula para contar el número de permutaciones diferentes de n elementos con n_1 elementos idénticos de tipo 1, n_2 elementos idénticos de tipo 2, ..., n_t elementos idénticos de tipo t, y dé un ejemplo de su uso.
   c) Considere la relación de recurrencia (RR): $a_n = 2a_{n-1} + 2^n$ con enteros $n \geq 0$: (i) Clasifiquela exhaustivamente; (ii) Demuestre que $a_n = n2^n$ es una solución; (iii) Encuentre la solución cuando $a_0 = 1$.
4) *Nota: No es estrictamente necesario construir una tabla, en su lugar pueden dibujarse los grafos intermedios que resulten del uso de cada algoritmo.*
   a) En el grafo G_1 de la Fig. **??** (izq.): (i) Trace un ciclo de Euler y uno de Hamilton o justifique que no es posible; (ii) ¿Se cumple en G_1 el teorema que establece que en todo grafo existe un número par de vértices de grado impar? ¿Por qué?
   b) En el grafo G_2 de la Fig. **??** (centr.): (i) Encuentre un árbol de expansión T_2 mediante búsqueda a lo ancho usando el orden alfabético; (ii) Dibuje T_2 aparte indicando: raíz, hojas, nivel de cada vértice, altura, antecesores, descendientes y hermanos del vértice I.
   c) En el grafo G_3 de la Fig. **??** (der.): (i) Utilice el algoritmo de Dijkstra para hallar una trayectoria de longitud mínima entre los vértices A y D, trácela e indique su longitud; (ii) Use el algoritmo de Kruskal para hallar un árbol de expansión mínimo T_3, mostrando cada paso intermedio e indicando el peso mínimo hallado, y finalmente recórralo en preorden. ¿Por qué, en general, no hay unicidad?





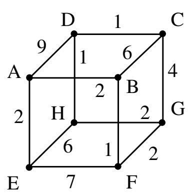


Figura 1: Grafos G_1 (izq.), G_2 (centro) y G_3 (der.) para los incisos **??**-**??**.