

### Parcial 3, tema 1 [Martes 26 de Junio de 2012]

**La evaluación dura 3 (tres) horas. Cada ejercicio debe sumar algún puntaje. Entregar en hojas separadas por ejercicio, numeradas, cada una con el Apellido en el margen superior derecho. Entregar este enunciado. Respuestas incompletas reciben puntajes incompletos incluso cero si no justifica. No usar libros ni apuntes.**

- 1) Considere la relación de recurrencia (RR):  $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$  con enteros  $n \geq 0$ :
  - a) Clasifíquela exhaustivamente;
  - b) Demuestre que  $a_n = -2^{n+1}$  es una solución (¿es homogénea o particular?);
  - c) Encuentre la solución cuando  $a_0 = 1$ .
- 2) a) Enumere los pares ordenados y trace el digrafo de la relación  $R = \{(a, b) \mid a \text{ divide a } b\}$  en el conjunto  $\{1, 2, 3, 4\}$ .
  - b) Determine si la relación  $R = \{(a, b) \mid a \neq b\}$  en el conjunto de los enteros es una relación de equivalencia y/o de orden.
  - c) Escriba un algoritmo **cierre\_reflexivo (A)** en el que, dada la matriz (cuadrada) **A** de una relación  $R$  en un conjunto  $X$  de  $n$  elementos, devuelva la matriz **B** con el cierre reflexivo.
- 3) a) Determine para qué valores de  $n$  es bipartito el grafo completo  $K_n$ .
  - b) Defina y simbolice la matriz de incidencia **I** de un grafo  $G = (V, E)$  y dé un ejemplo.
  - c) Dada la matriz de incidencia **I** de un grafo  $G = (V, E)$ , describa la fila de un vértice aislado  $i$ .
- 4) a) Defina camino y camino simple en un grafo  $G = (V, E)$ , y dé un ejemplo de cada uno.
  - b) Defina árbol  $T = (V', E')$ . ¿Qué igualdad se cumple entre  $|V'|$  y  $|E'|$  ?
  - c) Dé un ciclo de Hamilton en el grafo  $G_1$  (Fig. 1, izq.) o justificar que no es posible.
- 5) a) En el grafo  $G_2$  de la Fig. 1 (cent.): (i) Encuentre un árbol de expansión  $T_2$  usando búsqueda a lo ancho y el orden alfabético; (ii) Dibuje  $T_2$  aparte indicando: raíz, hojas, nivel de cada vértice, altura, antecesores, descendientes y hermanos del vértice  $F$ .
  - b) En el grafo ponderado  $G_3$  de la Fig. 1 (der.): use el algoritmo de Dijkstra para hallar una trayectoria de longitud mín. entre los vértices  $A$  y  $D$ , trácela e indique su longitud.
  - c) En el grafo ponderado  $G_3$  de la Fig. 1 (der.): (i) Encuentre un árbol de expansión de peso mínimo  $T_3$  usando el algoritmo de Kruskal desde el vértice  $A$  ¿Por qué, en general, no hay unicidad? (ii) Dibuje  $T_3$  aparte como árbol ordenado con raíz  $A$  y recórralo en posorden.

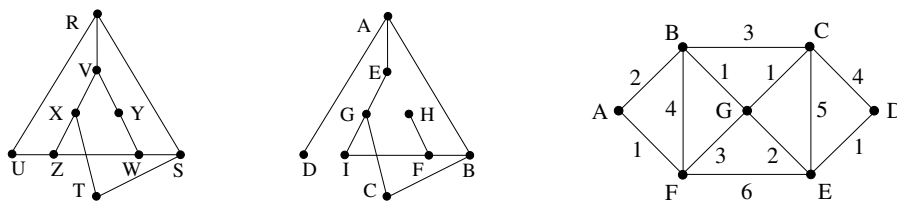


Figura 1: Grafos  $G_1$  (izq.),  $G_2$  (centro) y  $G_3$  (der.) para los incisos 4c-5c.