Apellido y Nombres: ______________________

Carrera: ________ DNI: ______________________

[Llenar con letra mayúscula de imprenta GRANDE]

Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Departamento de Informática
Teoría de la Computación

Examen final [Jueves 16 de Febrero de 2012]

La evaluación dura 3 (tres) horas. Cada ejercicio debe sumar algún puntaje. Entregar en hojas separadas por ejercicio, numeradas, cada una con apellido en el margen superior derecho. Entregar este enunciado. Respuestas incompletas reciben puntajes incompletos incluso cero si no justifica. No usar libros ni apuntes.

1) a) (i) Enuncie y simbolice las leyes generalizadas de De Morgan para la lógica; (ii) Escriba la recíproca y la contrapositiva de $((p \wedge \neg q) \to (q \wedge r)) \to (s \vee \neg q)$.
   b) Determine el valor de verdad de $\forall x \exists y\ ((x < y) \to (x^2 < y^2))$, con $x, y \in \mathbb{R}$.
   c) Demuestre por inducción que $1^2 - 2^2 + 3^2 - ... + (-1)^{n+1} n^2 = (-1)^{n+1} n(n+1)/2$ para todo entero $n > 0$.
2) a) Demuestre la ley asociativa $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ para todo conjunto A, B y C.
   b) Sea la función $f(x) = 1 + x^2$ de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. ¿Es inyectiva, sobreyectiva y/o biyectiva?
   c) Sean R y S relaciones sobre un conjunto X, demuestre o dé un contrajemplo: si R y S son simétricas, entonces $R \cap S$ es simétrica.
3) a) Considere un club cuyos miembros son 6 hombres y 7 mujeres. Determine de cuántas maneras se puede seleccionar un comité de 4 personas que incluya al menos un hombre.
   b) Considere un único dado: (i) ¿Cuántas veces se lo debe tirar para obtener el mismo resultado al menos dos veces?; (ii) ¿Y al menos tres veces? En cada caso justifique cuáles son las palomas y cuáles son los nidos.
   c) (i) Clasifique y resuelva la Relación de Recurrencia (RR) $a_n = 2^n a_{n-1}$ para todo entero $n > 0$, cuando $a_0 = 1$; (ii) Demuestre que $kC(n,k) = nC(n-1,k-1)$, donde k, n son enteros tales que $1 \leq k \leq n$.
4) *Nota: No es estrictamente necesario construir una tabla, en su lugar pueden dibujarse los grafos intermedios que resulten del uso de cada algoritmo.*
   a) En el grafo G_1 de la Fig. 1 (izq.): (i) Trace un ciclo de Euler y uno de Hamilton o justifique que no es posible; (ii) Escriba y trace: un ciclo (no-simple) y un ciclo simple.
   b) En el grafo G_1 de la Fig. 1 (izq.): (i) Encuentre un árbol de expansión T_1 mediante búsqueda a lo ancho usando el orden alfabético; (ii) Dibujar T_1 como un árbol con raíz, indicar hojas, niveles y altura de T_1, y recorrerlo en posorden.
   c) En el grafo G_2 de la Fig. 1 (der.): (i) Utilice el algoritmo de Dijkstra para hallar una trayectoria de longitud mínima entre los vértices A e I, trácela e indique su longitud; (ii) Utilice el algoritmo de Kruskal (o bien el de Prim), para hallar un árbol de expansión mínimo T_2, mostrando los pasos intermedios e indicando el peso mínimo hallado. Dado que T_2 tiene 12 vértices ¿cuántas aristas debe tener? ¿por qué?

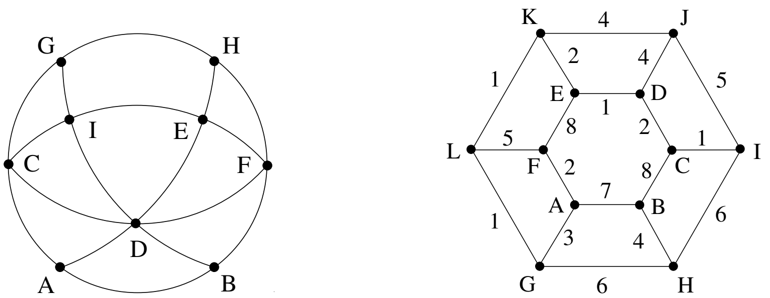

Figura 1: Grafo G_1 (izq.) y grafo ponderado G_2 (der.) para los incisos $4a$-$4c$.