

Coloquio Final Integrador, tema 2 [Jueves 4 de Julio de 2013]

La evaluación dura 3 (tres) horas. Cada ejercicio debe sumar algún puntaje. Entregar en hojas separadas por ejercicio, numeradas, cada una con apellido y tema en el margen superior derecho. Entregar este enunciado. Respuestas incompletas reciben puntajes incompletos incluso cero si no justifica. No usar libros ni apuntes.

- 1) a) Defina cuantificador existencial y dé un ejemplo. Luego demuestre que $\neg(\exists x P(x)) \equiv \forall x \neg P(x)$, con $x \in D$, $P(x)$ es una func. proposic., y D es un Dominio de Discurso (DD).
b) Defina y simbolice función, y función sobreyectiva. Luego justifique un ejemplo de una función sobreyectiva pero que no sea inyectiva.
c) Defina la composición de dos funciones f y g cuando $g : A \rightarrow B$ y $f : B \rightarrow C$. Luego, si f y g son inyectivas, ¿también lo es $f(g(x))$? Demostrar o dar un contraejemplo.
- 2) a) Enuncie el principio de inducción matemática y expresarlo simbólicamente. Luego demuestre usando inducción que $n^2 < 2^n$, para todo entero $n > 4$.
b) Describa cuándo un argumento (o razonamiento) es correcto (o válido). Luego, justifique: **si** $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ **y** $q \rightarrow (p \rightarrow r)$, $\therefore (p \vee q) \rightarrow r$, es un razonamiento (o argumento) válido.
c) Defina el conjunto de partes $\mathcal{P}(A)$ de un conjunto A de $n = |A|$ elementos, y dé un ejemplo. Luego, demuestre que $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.
- 3) a) Enuncie diez equivalencias lógicas que no involucren implicaciones, y demuestre una.
b) Enuncie y simbolice el teorema del binomio. y úselo para evaluar $(-3x + 4y)^5$.
c) Defina vértices adyacentes, y grado de un vértice en un grafo $G = (V, E)$, y dé un ejemplo de cada uno. Luego enuncie y demuestre el teorema de “los apretones de manos”. ¿Este teorema es válido si G tiene aristas paralelas o bucles?
- 4) *Nota: Tiene que mostrar todos los pasos intermedios. Si bien puede hacer una tabla, es preferible que dibuje cada grafo intermedio que resulte en cada etapa de cada algoritmo.*
a) Defina vértice de articulación (VA) y arista puente (AP). Analice si el grafo G_1 (Fig. 1, izq.) tiene un VA y una AP, sino modifíquelo para que los tenga, pero conservando los vértices.
b) En el grafo G_2 (Fig. 1, cen.): (i) Encuentre un árbol de expansión T_2 mediante búsqueda *a lo ancho*, usando el orden alfabético e indicando el orden en que se van agregando las aristas; (ii) Dibuje T_2 aparte indicando: raíz, hojas, niveles, altura, antecesores, y hermanos del vértice E , y recórralo en preorden.
c) En el grafo G_3 (Fig. 1, der.): (i) Use el algoritmo de Dijkstra para hallar una ruta de peso mínimo desde el vértice H hacia E , trácela e indique su longitud; (ii) Use el algoritmo de *Prim* para hallar un árbol de expansión mínimo T_3 , e indique su peso; (iii) En cada caso, explique si, en general, existe unicidad. Justificar si con otros algoritmos no descubiertos aún se podrían encontrar otros caminos cuyos pesos fueran menores a los obtenidos con ambos algoritmos.

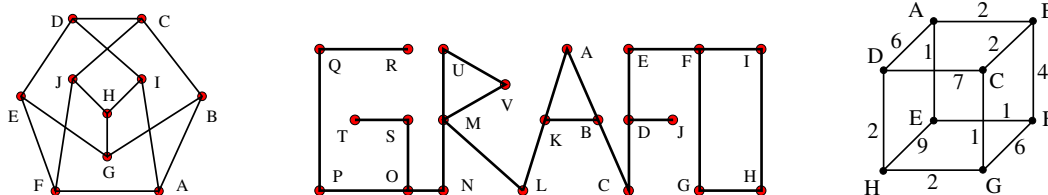


Figura 1: Grafos G_1 (izq.), G_2 (centro) y G_3 (der.) para los incisos 4a-4c.