Apellido y Nombres: ____________________

Carrera: ________ DNI: ____________________

[Llenar con letra mayúscula de imprenta GRANDE]

Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Departamento de Informática
Teoría de la Computación

Examen final [Jueves 8 de Agosto de 2013]

Instrucciones: **La evaluación dura 3 (tres) horas. Cada ejercicio debe sumar algún puntaje. Entregar en hojas separadas por ejercicio, numeradas, cada una con apellido en el margen superior derecho. Entregar este enunciado. Respuestas incompletas reciben puntajes incompletos incluso cero si no justifica. No usar libros ni apuntes**.

1) a) Enuncie las dos leyes de De Morgan generalizadas para la lógica (i.e. las relacionadas con los cuantificadores) y demuestre una de ellas.

   b) Escriba la recíproca y la contrapositiva (o contrarrecíproca) de la implicación: *si* n^3 *es impar, entonces* $(1-n)$ *es par*, y dé una demostración *directa* de la *contrapositiva.*

   c) Justifique si el razonamiento: si $(r \to (p \to q))$, y $(p \to (r \to q))$, entonces $((r \vee p) \to q)$, es un argumento válido, donde p, q, r son proposiciones.

2) a) Defina el conjunto de partes $\mathcal{P}(A)$ de un conjunto A de $n = |A|$ elementos, dé un ejemplo, y demuestre que $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$, usando (i) inducción, (ii) un argumento combinatorio.

   b) Defina y simbolice: función, función inyectiva y función sobreyectiva. Luego justifique un ejemplo de una función que no es inyectiva ni sobreyectiva.

   c) Sea un conjunto A de n elementos. Usando los principios de conteo demuestre que el número z de relaciones R simétricas en A es $z = 2^n 2^{(n^2-n)/2}$.

3) a) Determine si la relación $R = \{(x, y) | 4 \text{ divide a } x - y\}$ es una relación de equivalencia, cuando $x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, y si lo fuera entonces liste las clases de equivalencia.

   b) Deduzca una fórmula para contar el número de selecciones no-ordenadas, con posibles repeticiones, de k elementos en un conjunto con t elementos (o "clases"), y dé un ejemplo.

   c) Defina y simbolice Relación de Recurrencia (RR). Clasifique exhaustivamente la siguiente RR y encuentre su solución general: $4a_n = 16a_{n-1} - 12a_{n-2}$.

4) *Nota: Tiene que mostrar todos los pasos intermedios. Si bien puede hacer una tabla, es preferible que dibuje cada grafo intermedio que resulte en cada etapa de cada algoritmo.*

   a) Defina ciclo (o circuito) y ciclo simple (o circuito simple), y trace un ejemplo de cada uno en el grafo G_1 (Fig. 1, izq.). Luego demuestre que si un grafo G contiene un ciclo desde el vértice v a v, entonces contiene un ciclo simple de v a v.

   b) En el grafo G_2 (Fig. 1, centr.): (i) Encuentre un árbol de expansión T_2 mediante búsqueda *a lo ancho*, usando el orden alfabético e indicando el orden en que se van agregando las aristas; (ii) Dibuje T_2 aparte indicando: raíz, hojas, niveles, altura, antecesores, y hermanos del vértice I, y recórralo en posorden (DHCPD significa *Dynamic Host Configuration Protocol Daemon*).

   c) En el grafo G_3 (Fig. 1, der.): (i) Use el algoritmo de Dijkstra para hallar una ruta de peso mínimo desde el vértice E hacia H, trácela e indique su longitud ¿Puede haber otra ruta de igual peso? ¿Y de menor peso? (ii) Use el algoritmo de *Kruskal* para hallar un árbol de expansión mínimo T_3, e indicar su peso ¿Existe unicidad? ¿Por qué?

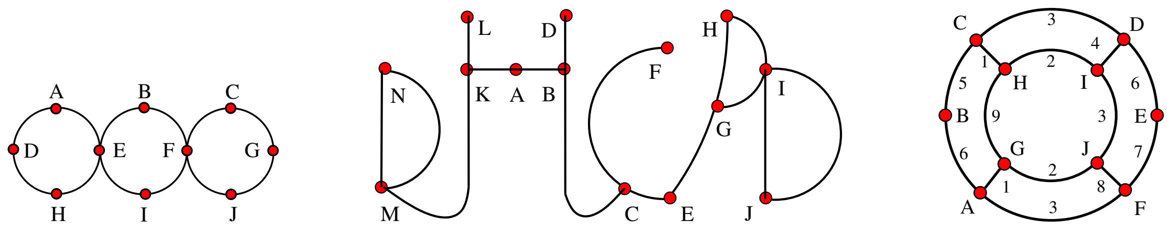

Figura 1: Grafos G_1 (izq.), G_2 (centro) y G_3 (der.) para los incisos $4a$-$4c$.