Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Departamento de Informática
Teoría de la Computación

Examen Final [Jueves 3 de Julio de 2014]

La evaluación dura 3 (tres) horas. Cada ejercicio debe sumar algún puntaje. Entregar en hojas separadas por ejercicio, numeradas, cada una con apellido y tema en el margen superior derecho. Entregar este enunciado. Respuestas incompletas reciben puntajes incompletos incluso cero si no justifica. No usar libros ni apuntes.

1) a) Demuestre que $\forall x \exists y (x \neq 0 \rightarrow xy = 1)$, donde $x, y \in \mathbb{R}$.

   b) Suponga las funciones $g : A \rightarrow B$ y $f : B \rightarrow C$. Probar que: si f y g son inyectivas, entonces $f \circ g$ también lo es.

   c) Sea A un conjunto de n elementos. Usando los principios de conteo demuestre que el número z de relaciones R antisimétricas en A es $z = 2^n 3^{(n^2-n)/2}$.

2) a) Enuncie el principio de inducción matemática y expresarlo simbólicamente. Luego, considere $\boldsymbol{B} = [1, 1; 1, 0]$ y, usando inducción, demuestre que $\boldsymbol{B}^n = [f_{n+1}, f_n; f_n, f_{n-1}]$, para todo entero $n \geq 1$, donde f_n es el enésimo número de Fibonacci (asuma $f_0 = 0$).

   b) Demuestre que, por lo menos uno, de los números reales b_1, b_2, ..., b_n es menor o igual que el promedio de ellos para todo entero n positivo *[Ayuda: considere el cálculo del promedio y una demostración por contradicción]*.

   c) Demuestre la ley distributiva $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ para todos los conjuntos A, B y C. Hacerlo con y sin diagrama de Venn, pero el diagrama de Venn no bastará.

3) a) Demuestre que el número de permutaciones con r elementos de un conjunto de n elementos distintos está dado por $P(n, r)$, y dé un ejemplo.

   b) Enuncie y simbolice el teorema del binomio. Luego demuestre que $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C(n, k) = 0$.

   c) Sea la Relación de Recurrencia (RR) $a_n = 2a_{n-1} + 3^n a_{n-2}$. Clasifíquela exhaustivamente.

4) *Nota: Tiene que mostrar todos los pasos intermedios. Si bien puede hacer una tabla, es preferible que dibuje cada grafo intermedio que resulte en cada etapa de cada algoritmo.*

   a) Defina ciclo (o circuito) y ciclo simple (o circuito simple), y trace un ejemplo de cada uno en el grafo G_1 (Fig. 1, izq.). Luego demuestre que si un grafo G contiene un ciclo desde el vértice u a v, entonces contiene un ciclo simple de u a v.

   b) En el grafo G_1 (Fig. 1, izq.): (i) Encuentre un árbol de expansión T_1 mediante búsqueda *a lo ancho*, usando el orden alfabético e indicando el orden en que se van agregando las aristas; (ii) Dibuje T_1 aparte indicando: raíz, hojas, niveles, altura, antecesores, y hermanos del vértice I, y recórralo en preorden y en postorden.

   c) En el grafo G_2 (Fig. 1, der.): (i) Use el algoritmo de Dijkstra para hallar una ruta de peso mínimo desde el vértice H hacia A, trácela e indique su longitud; (ii) Use el algoritmo de *Kruskal* para hallar un árbol de expansión mínimo T_2, e indicar su peso.

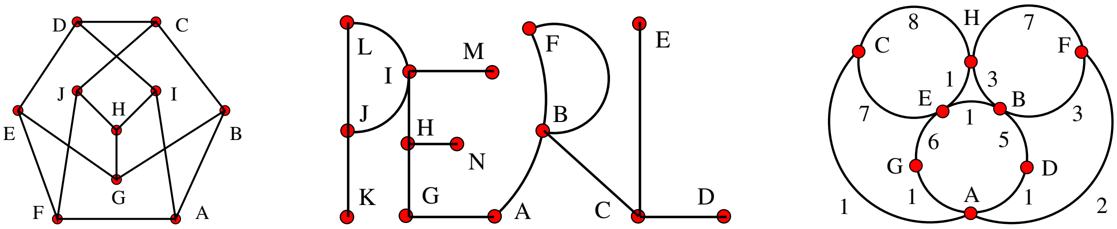

Figura 1: Grafos G_1 (izq.) y G_2 (der.) para los incisos 4a-4c.