Apellido y Nombres: ____________________

Carrera: ________ DNI: ____________________

[Llenar con letra mayúscula de imprenta GRANDE]

Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Departamento de Informática
Teoría de la Computación

Parcial 1, tema 1 [Miércoles 16 de Abril de 2014]

La evaluación dura 3 (tres) horas. Cada ejercicio debe sumar algún puntaje. Entregar en hojas separadas por ejercicio, numeradas, cada una con el Apellido en el margen superior derecho. Entregar este enunciado. Respuestas incompletas reciben puntajes incompletos incluso cero si no justifica. No usar libros ni apuntes.

1) a) Defina y simbolice el cuantificador existencial, e indique cuándo es *True*/*False*. Luego, determine el Valor de Verdad (VV) de $\exists x: \ x+1 > 4x$, con $x \in \mathbb{R}$.

   b) Usando el resultado del inciso anterior, y basándose en las leyes de De Morgan generalizadas para la lógica, encuentre el VV de $\forall x: \ x+1 \leq 4x$, con $x \in \mathbb{R}$.

   c) Determine el VV de: $\forall x \exists y: \ xy = 7$, cuando: (i) $x, y \in \mathbb{R}^+$; (ii) $x, y \in \mathbb{Z}^+$.

2) a) Defina y simbolice el producto cartesiano de dos conjuntos A y B. Luego demuestre que $A \times \emptyset = \emptyset$.

   b) Defina y simbolice subconjunto. Luego demuestre que si $A \subseteq C$ y $B \subseteq C$, entonces $A \cup B \subseteq C$. Nota: un diagrama de Venn no basta para justificar.

   c) Defina y simbolice la diferencia de dos conjuntos A y B. Luego demuestre que $\emptyset - A = \emptyset$.

3) a) Defina y simbolice función techo, y dé un ejemplo. Luego justifique un ejemplo de una función $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, tal que sea:

   I) inyectiva pero no-sobreyectiva;
   II) sobreyectiva pero no-inyectiva;
   III) ni-inyectiva ni sobreyectiva.

   b) Defina y simbolice la composición de dos funciones. A continuación, considere las funciones $g: A \to B$ y $f: B \to C$, demuestre que si f y g son sobreyectivas, entonces $f \circ g$ también lo es.

   c) Demuestre usando inducción que $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = [n(n+1)/2]^2$ para todo entero n positivo.

4) a) Demuestre que, por lo menos uno, de los números reales a_1, a_2, ..., a_n es mayor o igual que el promedio de ellos, para todo entero n positivo *[Ayuda: considere el cálculo del promedio y una demostración por contradicción]*.

   b) Justifique si:

$$\begin{array}{l} p \to (q \vee r) \\ q \vee \neg r \\ r \vee p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

   es un argumento válido, donde p, q, r son proposiciones.

   c) Sea la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   Usando inducción demuestre que

$$\boldsymbol{A}^n = \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix}$$

   para todo entero n positivo, donde f_n es el enésimo número de Fibonacci (Nota: considere $f_0 = 0$).