Apellido y Nombres: ______________________________

Carrera: ________ DNI: ______________________________

[Llenar con letra mayúscula de imprenta GRANDE]

Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Departamento de Informática
Teoría de la Computación

Examen Final [Jueves 7 de Agosto de 2014]

La evaluación dura 3 (tres) horas. Cada ejercicio debe sumar algún puntaje. Entregar en hojas separadas por ejercicio, numeradas, cada una con apellido y tema en el margen superior derecho. Entregar este enunciado. Respuestas incompletas reciben puntajes incompletos incluso cero si no justifica. No usar libros ni apuntes.

1) a) Determine el valor de verdad de $\exists x \; \forall y \;:\; (x < y) \rightarrow (x^2 < y^2)$, donde $x, y \in \mathbb{R}$.

   b) Sean las funciones $g : A \rightarrow B$ y $f : B \rightarrow C$. Probar que si f y g son inyectivas, entonces $f \circ g$ también lo es.

   c) Sea A un conjunto de n elementos. Usando los principios de conteo demuestre que el número z de relaciones R antisimétricas en A es $z = 2^n 3^{(n^2-n)/2}$.

2) a) Enuncie el principio de inducción matemática y expresarlo simbólicamente. Luego demuestre usando inducción que $n^2 < 2^n$, para todo entero $n > 4$.

   b) Defina función proposicional $P(x)$, donde x pertenece a un dominio de discurso D. Luego, demuestre que $\neg(\exists x P(x)) \equiv \forall x \neg P(x)$.

   c) Defina y simbolice: función inyectiva, y función sobreyectiva. Luego justifique un ejemplo de una función $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, tal que sea: (i) inyectiva pero no-sobreyectiva; (ii) sobreyectiva pero no-inyectiva; (iii) ni-inyectiva ni sobreyectiva, indicando los dominios, codominios, y rangos.

3) a) Enuncie cinco leyes (identidades o propiedades) de conjuntos, y demuestre una.

   b) Utilice un argumento de conteo para demostrar que $C(n, k) = C(n, n-k)$, con $0 \leq k \leq n$.

   c) Sea la Relación de Recurrencia (RR) $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$, donde c_1 y c_2 son constantes: (i) clasifíquela exhaustivamente; (ii) demuestre que si S y T son dos soluciones, entonces $U = \alpha S + \beta T$ también es una solución, donde α y β son constantes reales arbitrarias.

4) *Nota: Tiene que mostrar todos los pasos intermedios. Si bien puede hacer una tabla, es preferible que dibuje cada grafo intermedio que resulte en cada etapa de cada algoritmo.*

   a) Trace un ciclo (o circuito) y un ciclo simple (o circuito simple) en el grafo G_1 (Fig. 1, izq.). Luego demuestre que si un grafo G contiene un ciclo desde el vértice v a v, entonces contiene un ciclo simple de v a v.

   b) En el grafo G_2 (Fig. 1, centro): (i) Encuentre un árbol de expansión T_2 mediante búsqueda *a lo ancho*, usando el orden alfabético e indicando el orden en que se van agregando las aristas; (ii) Dibuje T_2 aparte indicando: raíz, hojas, niveles, altura, antecesores, y hermanos del vértice B, y recórralo en postorden; (iii) ¿Es G_2 un grafo plano?

   c) En el grafo G_3 (Fig. 1, der.): (i) Use el algoritmo de Dijkstra para hallar una ruta de peso mínimo desde el vértice A hacia E, trácela e indique su longitud; (ii) Use el algoritmo de *Prim* desde A para hallar un árbol de expansión mínimo T_3, e indicar su peso.

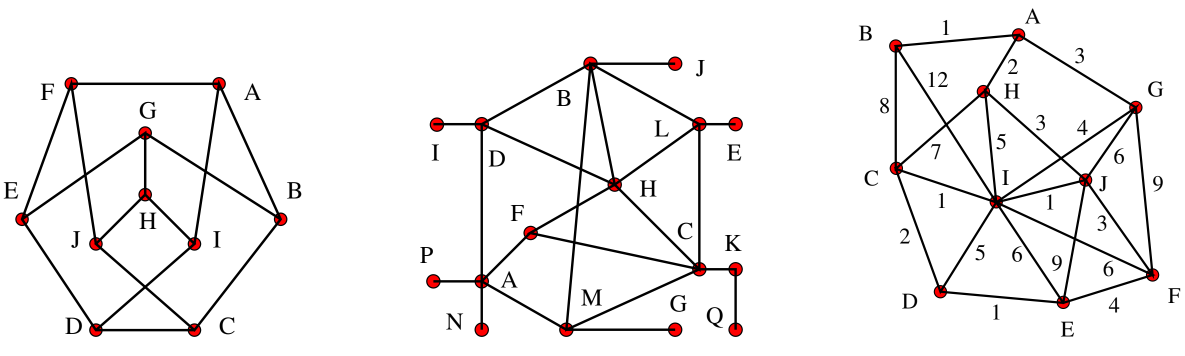

Figura 1: Grafos G_1 (izq.), G_2 (centro) y G_3 (der.) para los incisos $4a$-$4c$.