Parcial 2, tema 1 [Viernes 30 de Mayo de 2014]

La evaluación dura 3 (tres) horas. Cada ejercicio debe sumar algún puntaje. Entregar en hojas separadas por ejercicio, numeradas, cada una con el Apellido en el margen superior derecho. Entregar este enunciado. Respuestas incompletas reciben puntajes incompletos incluso cero si no justifica. No usar libros ni apuntes.

1) a) ¿De cuántas maneras puede un fotógrafo de boda ordenar a un grupo de 7 personas? si: (i) los novios deben salir juntos en la foto; (ii) los novios no pueden salir juntos en la foto; (iii) la novia debe salir en algún puesto a la derecha del novio.

   b) (i) Enuncie el principio del palomar en la primera forma; (ii) En un cajón hay 1 docena de medias rojas y 1 docena de medias blancas. Sacando las medias en la oscuridad, ¿cuántas medias hay que elegir para asegurar que 3 medias sean del mismo color?

   c) Sean A y B conjuntos finitos, R una relación binaria de A en B, y $\boldsymbol{M}$ su matriz asociada, donde $|A| = m$, $|B| = n$, mientras que $\boldsymbol{M} \in \mathbb{Z}^{m\times n}$, con $\mathbb{Z} = \{0, 1\}$. Escriba un algoritmo `es_inyectiva (M)` que recibe la matriz $\boldsymbol{M}$, y devuelve *True* si $\boldsymbol{M}$ representa una función $f : A \to B$ que es inyectiva, y *False* en caso contrario.

2) a) Usando principios de conteo justifique el número de subconjuntos con un número impar de elementos tomados de un conjunto de 10 elementos.

   b) Demuestre que $kC(n, k) = nC(n-1, k-1)$, donde los enteros n y k son tales que $0 \leq k \leq n$.

   c) Una encuesta con 2504 personas sobre 3 programas de televisión A: "Alterados por pi", B: "Dr. House", C: "El informe Kliksberg", encontró que 1876 ven A, 999 ven B, 345 ven C. Además, 876 ven tanto A como B, 231 ven tanto A como C, 19 ven tanto B como C, y que 189 ven los tres programas ¿Cuántas personas no ven ninguno de estos programas?

3) a) (i) Justifique un ejemplo de una Relación de Recurrencia (RR) que sea no-lineal, no-homogénea, de coeficientes no-constantes, y de orden 4; (ii) Clasifique y resuelva la RR dada por $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ para todo entero $n \geq 2$, con $a_0 = 3$ y $a_1 = 7$.

   b) Justifique de cuántas maneras se pueden dividir 10 libros *distintos* entre 3 estudiantes si Carla debe recibir siempre 5, Mari 3 y Rosi 2.

   c) Justifique el número de soluciones de la ecuación diofántica $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 23$, con $x_1 \geq 0$, $x_2 > 2$, y $x_3 = 3$.

4) a) Defina y simbolice con cuantificadores logicos: relación reflexiva y relación simétrica. Luego considere la relación $R = \{(a, a), (a, c), (b, b), (c, c), (c, a), (d, d)\}$ en el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$. Determine: (i) Si es reflexiva, simétrica, antisimétrica, o transitiva; (ii) Si es una relación de equivalencia o un orden parcial; (iii) Trace su digrafo y matriz de R (en el orden natural).

   b) Sea A un conjunto de n elementos. Usando los principios de conteo demuestre que el número z de relaciones R antisimétricas en A es $z = 2^n 3^{(n^2-n)/2}$.

   c) Usando principios de conteo demuestre la identidad de Vandermonde

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k} \binom{n}{k}$$

   para todos los enteros m, n, r tales que $0 \leq r \leq m$ y $0 \leq r \leq n$.