Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Departamento de Informática
Teoría de la Computación

Examen Final [Martes 7 de Julio de 2015]

La evaluación dura 3 (tres) horas. Cada ejercicio debe sumar algún puntaje. Entregar en hojas separadas por ejercicio, numeradas, cada una con el Apellido y tema en el margen superior derecho. Entregar este enunciado. Respuestas incompletas reciben puntajes incompletos, incluso cero si no justifica. No usar libros ni apuntes.

1) a) Explique brevemente el significado de las proposiciones $\exists x\; P(x) \wedge \exists x\; Q(x)$ y $\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$ y demuestre que no son lógicamente equivalentes con un ejemplo demostrativo.

   b) Determine el Valor de Verdad de $\exists x \forall y :\; xy = 0$, cuando: (i) $x, y \in \mathbb{Z}$; (ii) $x, y \in \mathbb{Z}^+$.

   c) Clasifique exhaustivamente la Relación de Recurrencia (RR) $24a_{n-2} = 3a_n - 6a_{n-1}$, para todo entero $n \geq 2$. Obtener la solución RR cuando $a_0 = 2$ y $a_1 = 3$, y verificarla.

2) a) Considere el grafo rueda W_{100}: (i) Determine el número de aristas del grafo (Ayuda: considere el teorema del "apretón de manos"); (ii) Describa la fila y columna de la matriz de adyacencia correspondientes al vértice central del grafo W_{100}.

   b) Demuestre que $kC(n,k) = nC(n-1,k-1)$, donde los enteros n y k son tales que $0 \leq k \leq n$.

   c) Defina y simbolice función f de un conjunto X a un conjunto Y. Dada la función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida como $f(x) = |x|$ (i) indique dominio, codominio e imagen; (ii) Justifique si f es inyectiva, sobreyectiva y/o biyectiva.

3) a) Sean A y B dos conjuntos finitos tales que $|A| = n$ y $|B| = m$. Determine la cantidad de relaciones distintas del conjunto A al conjunto B. Justifique.

   b) Justifique el número de soluciones de la ecuación diofántica $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 23$, con $x_1 \geq 0$, $x_2 > 2$, y $x_3 = 3$.

   c) Enuncie y simbolice el principio de inducción matemática y demuestre usando inducción que $f_2 + f_4 + ... + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$ para todo entero positivo n, donde f_n es el n-ésimo número de Fibonacci (recuerde que $f_0 = 0$ y $f_1 = 1$).

4) a) En el grafo G_1 (Fig. **??**, izq.): (i) Encuentre un árbol de expansión T_1 mediante búsqueda *a lo ancho*, usando el orden alfabético e indicando el orden en que se van agregando las aristas; (ii) Dibuje T_1 y recórralo en post-orden.

   b) En el grafo G_2 (Fig. **??**, der.), use el algoritmo de *Prim* para hallar un Arbol de Expansión mínimo (AEm) T_2, e indicar su peso.

   c) En el grafo G_2 (Fig. **??**, der.): (i) use el Algoritmo de Dijkstra (AD) para hallar una Ruta de Peso Mínimo (RPM) desde el vértice L hacia I, trácela e indique su longitud; (ii) ¿Cómo se detecta en el AD que no existe una RPM entre los vértices L y N ?

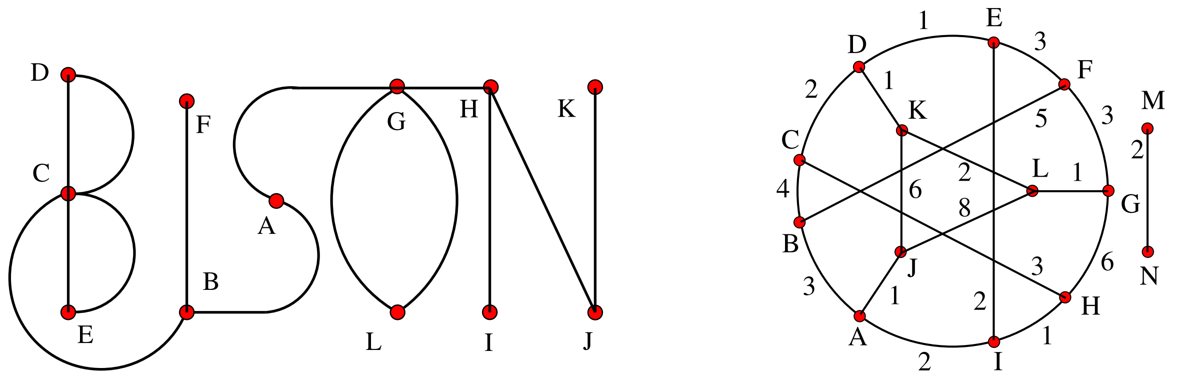

Figura 1: Grafos G_1 (izq.) para el inciso **??** y G_2 (der.) para los incisos **??**-**??**.

Libres. Atención: tiene que desarrollar los cuatro incisos y alcanzar al menos un 66 % aquí para recién entonces poder hacer el resto del examen.

1) a) Defina y simbolice:
   - I) función;
   - II) función inyectiva;
   - III) función sobreyectiva.

   b) A continuación justifique un ejemplo en cada caso, **distintos de la función identidad**, de:
   - I) Una función inyectiva que no sea sobreyectiva;
   - II) Una función sobreyectiva que no sea inyectiva;
   - III) Una función inyectiva y sobreyectiva;

   explicitando los dominios, codominios y rangos en cada caso.

2) a) Sea U un conjunto universal y sean A, B y C subconjuntos de U. Escriba las identidades entre conjuntos dadas por las leyes: de identidad, de dominación, idempotencia, complemento (o complementación), conmutativas, asociativas, distributivas, de De Morgan, absorción y las de complemento.

   b) Enuncie el principio del palomar en alguna de sus formas. Luego, considere un cajón en donde hay 1 docena de medias rojas y 1 docena de medias amarillas, todas revueltas. Sacando las medias en la oscuridad, ¿cuántas medias hay que elegir para asegurar que 3 medias sean del mismo color?

3) a) Enuncie y simbolice el teorema del binomio. Luego demuestre que $\sum_{k=0}^{n} 3^k C(n,k) = 4^n$.

   b) Las letras $ABCDEF$ deben usarse para formar cadenas de la misma longitud ($n = 6$) y sin repetición. Justifique cuántas hay que contienen a las subcadenas AE o EA.