Apellido y Nombres: ____________________

Carrera: ________ DNI: ____________________

[Llenar con letra mayúscula de imprenta GRANDE]

Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Departamento de Informática
Teoría de la Computación

Examen Final [Jueves 6 de Agosto de 2015]

La evaluación dura 3 (tres) horas. Cada ejercicio debe sumar algún puntaje. Entregar en hojas separadas por ejercicio, numeradas, cada una con el Apellido y tema en el margen superior derecho. Entregar este enunciado. Respuestas incompletas reciben puntajes incompletos, incluso cero si no justifica. No usar libros ni apuntes.

1) a) Explique brevemente el significado de las proposiciones $\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)$ y $\forall x[P(x) \vee Q(x)]$ y demuestre que no son lógicamente equivalentes con un ejemplo ilustrativo.

   b) (i) Escriba la recíproca, la inversa y la contrarecíproca de la implicación: Si n es un entero y n^2 es impar, entonces n es impar; (ii) Demuestre la implicación.

   c) Clasifique exhaustivamente la Relación de Recurrencia (RR) $12a_{n-1} = 18a_{n-2} + 2a_n$, para todo entero $n \geq 2$. Obtener la solución de la RR cuando $a_0 = 0$ y $a_1 = 3$, y **verificarla**.

2) a) Considere el grafo completo K_{100}: (i) Determine el número de aristas del grafo (Ayuda: considere el teorema del "apretón de manos"); (ii) Describa la fila y columna de la matriz de adyacencia correspondientes a un vértice del grafo K_{100}.

   b) Demuestre que si n, k y r son enteros no negativos tales que $k \leq r \leq n$, entonces $C(n,r)C(r,k) = C(n,k)C(n-k, r-k)$.

   c) Defina y simbolice función f de un conjunto X a un conjunto Y. Dada la función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida como $f(n) = 2n$ (i) indique dominio, codominio e imagen; (ii) Justifique si f es inyectiva, sobreyectiva y/o biyectiva.

3) a) Sean A y B dos conjuntos finitos tales que $|A| = n$ y $|B| = m$. Determine la cantidad de relaciones distintas del conjunto A al conjunto B. Justifique.

   b) Sea A un conjunto con 10 elementos. Usando principios de conteo justifique cuántos subconjuntos de A tienen cardinalidad impar.

   c) Enuncie y simbolice el principio de inducción matemática. Luego demuestre usando inducción que $f_1^2 + f_2^2 + ... + f_n^2 = f_n f_{n+1}$ para todo entero positivo n, donde f_n es el n-ésimo número de Fibonacci (recuerde que $f_0 = 0$ y $f_1 = 1$).

4) *Nota: Tiene que mostrar todos los pasos intermedios. Si bien puede hacer una tabla, es preferible que dibuje cada grafo intermedio que resulte en cada etapa de cada algoritmo.*

   a) En el grafo G_1 (Fig. 1, izq.): (i) Encuentre un árbol de expansión T_1 mediante búsqueda *en profundidad*, usando el orden alfabético e indicando el orden en que se van agregando las aristas; (ii) Dibuje T_1 y recórralo en pre-orden.

   b) En el grafo G_2 (Fig. 1, der.), use el algoritmo de *Kruskal* para hallar un Arbol de Expansión mínimo (AEm) T_2, e indicar su peso.

   c) En el grafo G_2 (Fig. 1): use el Algoritmo de Dijkstra (AD) para hallar una Ruta de Peso Mínimo (RPM) desde el vértice A hacia I, trácela e indique su longitud.

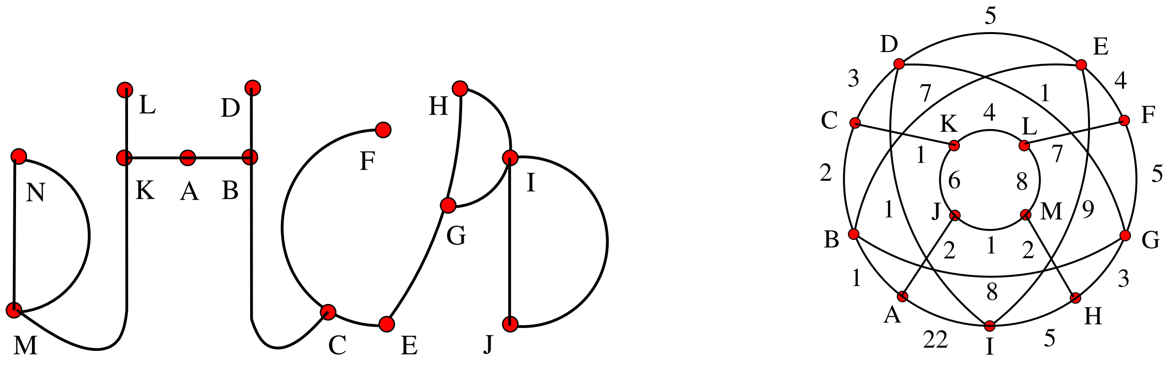

Figura 1: Grafos G_1 (izq.) para el inciso $4a$ y G_2 (der.) para los incisos $4b$-$4c$.