

Examen final [Jueves 07 de Julio de 2016]

La evaluación dura 3 (tres) horas. Cada ejercicio debe sumar algún puntaje. Entregar en hojas separadas por ejercicio, numeradas, cada una con el Apellido en el Margen Superior Derecho. Entregar este enunciado. Respuestas incompletas reciben puntajes incompletos y cero si no justifica. No usar celulares, libros, ni apuntes.

- 1) a) Enuncie las leyes de De Morgan generalizadas para la lógica, referidas a proposiciones cuantificadas, y demuestre una de ellas.
b) Escriba la recíproca, y la contrarecíproca de la implicación: Si n^2 es impar, entonces n es impar. Luego, demuestre la implicación.
c) Enuncie y simbolice el principio de inducción matemática. Luego demuestre usando inducción que $f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$ para todo entero positivo n , donde f_n es el n -ésimo número de Fibonacci (recuerde que $f_1 = 1$ y $f_2 = 1$).
- 2) a) Demuestre la ley distributiva $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, para todos los conjuntos A , B y C , con y sin diagramas de Venn. Nota: el diagrama de Venn no basta para justificar.
b) Defina y simbolice: función y función inversa. Luego, demuestre que la función $f(x) = ax + b$ de \mathbb{R} a \mathbb{R} es invertible, y encuentre su función inversa, donde a, b son constantes, y $a \neq 0$.
c) Defina relación simétrica R en un conjunto A , y simbolice la definición utilizando cuantificadores. Luego, justifique si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: si R y S son relaciones simétricas sobre un conjunto X , entonces $R \cap S$ también lo es.
- 3) a) Demuestre que $C(n, r)C(r, k) = C(n, k)C(n - k, r - k)$, donde n, k y r son enteros no negativos tales que $k \leq r \leq n$.
b) ¿De cuántas maneras puede un fotógrafo de bodas ordenar un grupo de 6 personas escogidas de entre 13, donde los novios están entre estas 13, si (i) la novia **NO** debe salir en la foto? (ii) la novia debe salir a la derecha del novio?
c) Determine si los grafos G_1 y G_2 (Fig. 1, izq.) son isomorfos. Si lo son, encuentre la función que los relaciona, sino justifique en términos de invariantes.
- 4) a) En el grafo G_3 (Fig. 1, centro-derecha): (i) Encuentre un árbol de expansión T_3 mediante búsqueda *en profundidad*, usando el orden alfabético, e indicando el orden en que se van agregando las aristas; (ii) Dibuje aparte el árbol T_3 hallado como un árbol de raíz en el vértice A , identificando sus vértices hoja, niveles, y altura, y recórralo en post-orden.
b) En el grafo G_4 (Fig. 1, der.), use el algoritmo de *Kruskal* para hallar un Arbol de Expansión mínimo T_4 , en la componente conexa que contiene al vértice A , e indicar su peso.
c) En el grafo G_4 (Fig. 1, der.), (i) utilice el Algoritmo de Dijkstra (AD) para hallar una Ruta de Peso Mínimo (RPM) desde el vértice C hacia G , trácela e indique su longitud; (ii) ¿cómo se detecta en el AD que no existe una RPM entre los vértices C y K ?

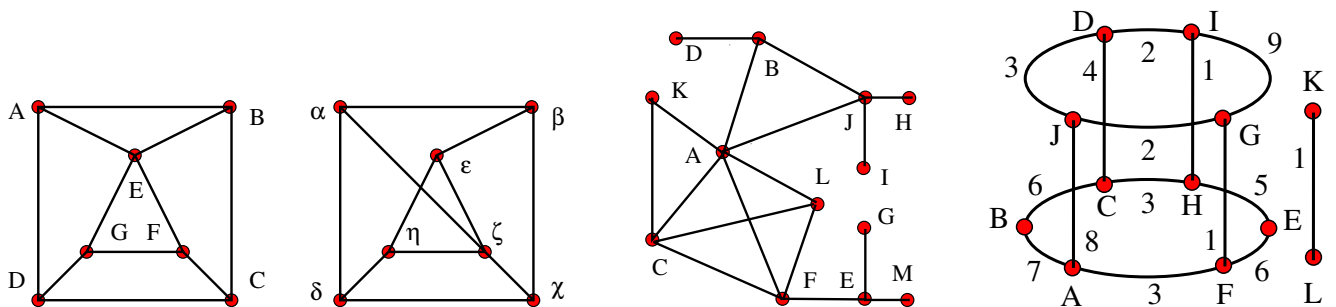


Figura 1: Grafos G_1 y G_2 (izq.) para el inciso 3c, grafo G_3 (cen.) para el inciso 4a, y grafo G_4 (der.) para los incisos (4b-4c.)