Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Departamento de Informática
Teoría de la Computación

Examen Final [Jueves 10 de Agosto de 2017]

La evaluación dura 3 (tres) horas. Entregar en hojas separadas por ejercicio, numeradas, cada una con el Apellido en el Margen Superior Derecho. Entregar este enunciado. Respuestas incompletas reciben puntajes incompletos y 0 si no justifica. No usar celulares, libros, ni apuntes.

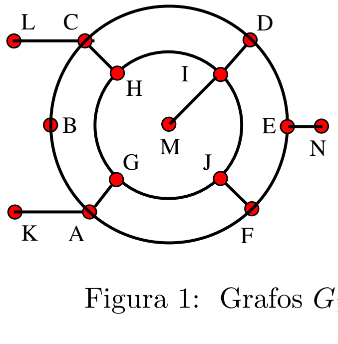
1) a) (i) En una implicación, indique cuál es la condición necesaria, cuál es la suficiente, y dé un ejemplo; (ii) Determine si $(\neg q \vee p) \wedge (q \vee r) \rightarrow (r \vee p)$ es una tautología, para todas las proposiciones p, q, y r.
   b) Determine el Valor de Verdad (VV) de $\forall x \exists y : \; xy = 5$, cuando: (i) $x, y \in \mathbb{R}^+$; (ii) $x, y \in \mathbb{Z}^+$.
   c) Enuncie las leyes generalizadas de De Morgan (negación de propos. cuantificadas), y demuestre una.
2) a) (i) Enuncie y simbolice el Principio de Inducción Matemática (PIM); (ii) Demuestre usando el PIM que si $A_1, A_2, \cdots, A_n$ son subconjuntos de un conjunto universal U, entonces

$$\overline{\bigcap_{k=2}^{n} A_k} = \bigcup_{k=2}^{n} \overline{A_k} \quad \text{para todo entero } n \geq 2$$

   b) (i) Sean a, b y c enteros, demuestre que si $a|b$ y $b|c$, entonces $a|c$; (ii) Calcule el $\mathrm{mcd}(-61, 15)$ utilizando el algoritmo de Euclides, mostrando los cálculos en cada paso.
   c) (i) Defina relación antisimétrica en un conjunto A utilizando cuantificadores; (ii) ¿Si R y S son relaciones antisimétricas sobre un conjunto X, entonces $R \cap S$ también es antisimétrica? Justifique.
3) a) (i) ¿Cuántas cadenas pueden formarse con *todas* las letras de la palabra UNTERNEHMUNGSLUSTIG ? (ii) ¿De cuántas maneras puede un fotógrafo de bodas ordenar un grupo de 6 personas si los novios deben salir juntos en la foto? ¿Y si la madre de la novia (en el grupo) queda en medio de los novios?
   b) (i) Simbolice la propiedad *asociativa* para todos los conjuntos A, B, y C, y demuéstrela (el Diagrama de Venn (DV) no será suficiente); (ii) Hallar el conjunto de partes del conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ y su cardinal.
   c) Defina la sucesión $\{f_n\}$, donde f_n es el enésimo número de Fibonacci y n es un entero positivo, y escriba sus primeros términos hasta $n = 4$. Luego, sea la matriz:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Pruebe, para todo entero } n \text{ positivo, que } \boldsymbol{A}^n = \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix}$$

4) Nota: (i) mostrar *todos* los *pasos intermedios* y precise el orden en que va agregando las aristas; (ii) se prefiere que dibuje *cada grafo* intermedio aunque se admiten tablas; (iii) use el orden alfabético.
   a) (i) Demuestre que en todo grafo existe un número par de vértices de grado impar; (ii) Determine el número de aristas del grafo bipartito completo $K_{13,19}$.
   b) En el grafo G_1 (Fig. 1, izq.): (i) Encuentre un Arbol de Expansión (AE) T_1 mediante búsqueda *en profundidad*, y recórralo en pre-orden; (ii) Encuentre un AE $\hat{T}_1$ mediante búsqueda *a lo ancho*, y recórralo en post-orden; (iii) En general, explique si hay unicidad en los AE o puede haber más de uno.
   c) En el grafo G_2 (Fig. 1, der.): (i) Use el algoritmo de *Prim* para hallar un Arbol de Expansión Mínimo (AEmin) T_2, en la componente *conexa* que contiene al vértice A, e indicar su peso; (ii) Idem (i) pero usando el algoritmo de *Kruskal*; (iii) En general, explique si hay unicidad en los AEmin.



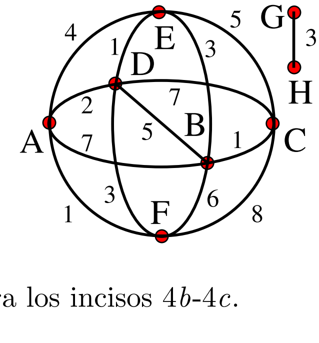


Figura 1: Grafos G_1 (izq.), y G_2 (der.) para los incisos $4b$-$4c$.