Parcial 1, tema 2 [Lunes 28 de Abril de 2017]

La evaluación dura 3 (tres) horas. Cada ejercicio debe sumar algún puntaje. Entregar en hojas separadas por ejercicio, numeradas, cada una con el Apellido en el Margen Superior Derecho. Entregar este enunciado. Respuestas incompletas reciben puntajes incompletos y 0 si no justifica. No usar celulares, libros, ni apuntes.

1) a) I) Defina tautología, contradicción, y contigencia, y dé un ejemplo de cada uno.
   II) En una implicación, indique cuál es la condición necesaria, cuál es la condición suficiente, y dé un ejemplo.
   b) Determine, sin utilizar tabla de verdad, si $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \to (q \vee r)$ es una tautología, donde p, q, y r son proposiciones cualesquiera. Indique todas las equivalencias lógicas empleadas en su resolución.
2) a) Enuncie y simbolice el Principio de Inducción Matemática (PIM). Explique de qué manera lo utiliza en una demostración basada en el PIM.
   b) Demuestre usando el PIM que para todo entero n no-negativo se cumple que

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$$

3) a) Simbolice las siguientes propiedades de conjuntos, incluyendo las duales, y demuestre **una** de ellas utilizando Diagrama de Venn (DV): *dominación*, *complemento*, *distributiva*, *absorción*, *De Morgan* (¡para conjuntos!).
   b) Demuestre **con y sin** DV que $A \cup (B - A) = A \cup B$, para **todos** los conjuntos A y B. Nota: el DV no basta para justificar.
4) a) Justifique el valor de verdad de cada enunciado, donde el dominio de discurso es el conjunto de los números reales:
   I) Para alguna x, si $x > 1$ entonces $x/(x^2 + 1) < 1/3$.
   II) Para cada x, para alguna y, $x^2 + y^2 \geq 0$.
   b) Pruebe que para **todos** los enteros m y n, si m y n son pares, entonces mn es par.
5) a) I) Principio de Inclusión-Exclusión (PIE): escriba a qué es igual $|A \cup B|$, donde A y B son conjuntos tales que $A \cap B \neq \emptyset$. Justifique. Luego, ídem para $|A \cup B \cup C|$, donde A, B, y C son conjuntos tales que $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$, $B \cap C \neq \emptyset$, y $A \cap B \cap C \neq \emptyset$, pero esta vez no-justifique.
   II) Demuestre que $A \subseteq A$, para todo conjunto A. Indique qué tipo de demostración utilizó.
   b) Defina y simbolice: función, función inyectiva, y función sobreyectiva. Luego, en cada caso que sigue, dé un ejemplo de una función $f : A \to B$, tal que sea:
   I) inyectiva y no-sobreyectiva;
   II) sobreyectiva y no-inyectiva;
   III) inyectiva y sobreyectiva (pero **distinta** de la función lineal, i.e. $y(x) = ax + b$, donde a y b son constantes, con x en el discreto o en el continuo, y con dominio finito o infinito).

   Nota: **puntaje negativo** (-5 puntos) si insiste en utilizar la función lineal.