Apellido y Nombres: ______________________________

Carrera: ________ DNI: ______________________________

[Llenar con letra mayúscula de imprenta GRANDE]

Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Departamento de Informática
Teoría de la Computación

Examen Final [Jueves 6 de Julio de 2017]

La evaluación dura 3 (tres) horas. Entregar en hojas separadas por ejercicio, numeradas, cada una con el Apellido en el Margen Superior Derecho. Entregar este enunciado. Respuestas incompletas reciben puntajes incompletos y 0 si no justifica. No usar celulares, libros, ni apuntes.

1) a) (i) En una implicación, indique cuál es la condición necesaria, y cuál es la suficiente, y dé un ejemplo; (ii) Determine si $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \to (q \vee r)$ es una tautología, para todas las proposiciones p, q, y r.
   b) Determine el Valor de Verdad (VV) de $\forall x \exists y : \; xy = 7$, cuando: (i) $x, y \in \mathbb{R}^+$; (ii) $x, y \in \mathbb{Z}^+$.
   c) Enuncie las leyes generalizadas de De Morgan (negación de propos. cuantificadas), y demuestre una.
2) a) (i) Enuncie y simbolice el Principio de Inducción Matemática (PIM); (ii) Demuestre usando el PIM que si $A_1, A_2, \cdots, A_n$ son subconjuntos de un conjunto universal U, entonces

$$\overline{\bigcup_{k=2}^{n} A_k} = \bigcap_{k=2}^{n} \overline{A_k} \quad \text{para todo entero } n \geq 2$$

   b) (i) Sean a, b y c enteros, demuestre que si $a|b$ y $b|c$, entonces $a|c$; (ii) Calcule el $\operatorname{mcd}(-63, 15)$ utilizando el algoritmo de Euclides, mostrando los cálculos en cada paso.
   c) (i) Defina relación simétrica en un conjunto A utilizando cuantificadores; (ii) ¿Si R y S son relaciones simétricas sobre un conjunto X, entonces $R \cap S$ también es simétrica? Justifique.
3) a) (i) ¿Cuántas cadenas se pueden formar con todas las letras de la palabra LEHRERINNEN ? (ii) ¿De cuántas maneras puede un fotógrafo de bodas ordenar un grupo de 7 personas si los novios deben salir juntos en la foto? ¿Y si la novia debe salir en algún puesto a la derecha del novio?
   b) (i) Simbolice la propiedad *distributiva* en conjuntos y demuéstrela (nota: el DV no basta para justificar); (ii) Hallar el conjunto de partes del conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ y su cardinal.
   c) Defina la sucesión $\{f_n\}$, donde f_n es el enésimo número de Fibonacci y n es un entero positivo, y escriba sus primeros términos hasta $n = 4$. Luego, sea la matriz:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Pruebe, para todo entero } n \text{ positivo, que } \boldsymbol{A}^n = \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix}$$

4) Nota: (i) muestre todos los pasos intermedios y precise el orden en que van agregando las aristas; (ii) si bien puede hacer tablas se prefiere que dibuje cada grafo; (iii) use orden alfabético.
   a) (i) Defina grafo completo K_n de n vértices, y calcule el número de sus aristas en función de n; (ii) Demuestre que en todo grafo $G = (V, E)$ existe un número par de vértices de grado impar.
   b) En el grafo G_1 (Fig. 1, izq.): (i) Encuentre un Arbol de Expansión (AE) T_1 mediante búsqueda *en profundidad*, y recórralo en pre-orden; (ii) Encuentre un AE $\hat{T}_1$ mediante búsqueda *a lo ancho*, y recórralo en post-orden; (iii) En general, explique si hay unicidad en los AE o puede haber más de uno.
   c) En el grafo G_2 (Fig. 1, der.): (i) Use el algoritmo de *Prim* para hallar un Arbol de Expansión Mínimo (AEmin) T_2, en la componente *conexa* que contiene al vértice A, e indicar su peso; (ii) Idem (i) pero usando el algoritmo de *Kruskal*; (iii) En general, explique si hay unicidad en los AEmin.

Figura 1: Grafos G_1 (izq.), y G_2 (der.) para los incisos $4b$-$4c$.