Parcial 1, tema 1 [Miércoles 2 de Mayo de 2018]

La evaluación dura 3 (tres) horas. Entregar en hojas separadas por ejercicio, numeradas, cada una con el Apellido y Tema en el Margen Superior Derecho. Entregar este enunciado. Respuestas incompletas reciben puntajes incompletos y 0 si no justifica. No usar celulares, libros, ni apuntes.

1) a) Defina y simbolice equivalencia lógica. Luego, determine el Valor de Verdad (VV) de $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow q$ cuando el VV de $p \rightarrow q$ es *False*, donde p y q son proposiciones dadas. Finalmente, justifique si $(p \wedge q) \vee ((\neg p \wedge \neg q) \vee q) \equiv q \vee \neg p$, para todas las proposiciones p y q, en donde el empleo de una Tabla de Verdad (TV) no será suficiente.

   b) Demuestre que $\emptyset \times A = \emptyset$ para todo conjunto A. Luego, justifique si puede concluirse que los conjuntos A y B son iguales cuando $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$, en donde $\mathcal{P}(X)$ es el conjunto potencia (o de partes) del conjunto X.

2) a) Defina y simbolice con un Diagrama de Venn (DV) la *diferencia* $A - B$ y la *diferencia simétrica* $A \oplus B$ de los conjuntos A y B. Luego demuestre para todo A y B, con y sin DV, que $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$.

   b) Enuncie y simbolice el Principio de Inducción Matemática (PIM). Luego, utilice el PIM para demostrar que para todo entero n positivo se cumple la Ec.(1):

$$1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + ... + n \cdot 2^n = (n-1)2^{n+1} + 2 \qquad (1)$$

3) a) Sea la función $f : X \rightarrow Y$. A partir de $\neg(\forall y\ \exists x(f(x) = y))$, deducir la condición equivalente $\exists y\ \forall x(f(x) \neq y)$, para todo $x \in X$, $y \in Y$ ¿Qué expresan estas condiciones con respecto a si f es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva?

   b) Sean los conjuntos A, B, y C, la función $g : A \rightarrow B$, y la función $f : B \rightarrow C$. Si f y $(f \circ g)$ son inyectivas ¿es g inyectiva?

4) a) Defina y simbolice el cuantificador universal, e indique cuándo es *True* y cuándo es *False*. Luego, demuestre que las proposiciones $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$ y $\exists x \neg(P(x) \rightarrow Q(x))$ son lógicamente equivalentes.

   b) Probar usando reducción al absurdo que los únicos enteros *no-negativos* **consecutivos** a, b, y c que satisfacen $a^2 + b^2 = c^2$ son 3, 4, y 5.

5) a) Enuncie la ley de De Morgan de la negación de la proposición cuantificada $\exists x : P(x)$, y demuéstrela.

   b) Defina conjunto de partes $\mathcal{P}(A)$ de un conjunto finito A de n elementos. Luego, demuestre usando el Principio de Inducción Matemática (PIM) que $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$ para todo entero n no-negativo.