Examen Final [Jueves 2 de Agosto de 2018]

- **La evaluación dura 3 (tres) horas. No use celulares, libros, ni apuntes.**
- **Entregue en hojas separadas por ejercicio, numeradas, cada una con el Apellido y Nombre en el Margen Superior Derecho, además de este enunciado completado.**
- **Respuestas incompletas reciben puntajes incompletos, y 0 si no justifica. En los algoritmos de grafos:**
  - **Si bien se admiten tablas se prefiere el dibujo de cada grafo iterado o un único grafo que precise el orden en que se van eligiendo las aristas o vértices;**
  - **Use orden alfabético cada vez que se pueda.**

1) a) I) Justifique si $(\neg p \vee \neg q) \wedge ((p \vee q) \wedge \neg q) \equiv \neg q \wedge p$, para todas las proposiciones p y q.
   II) Enuncie la ley de De Morgan de la negación de la proposición cuantificada $\forall x : P(x)$, y demuéstrela.

   b) Sean A y B conjuntos cualesquiera, entonces:
   I) Demuestre que $A \times \emptyset = \emptyset$;
   II) Demuestre con y sin Diagrama de Venn (DV) que $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

2) a) I) Demuestre que para todos los enteros n y k tales que $1 \leq k \leq n$, entonces $kC(n,k) = nC(n-1,k-1)$;
   II) Utilizando los principios de conteo justifique ¿cuántas cadenas distintas de longitud 4 se pueden formar con las letras de la palabra NEPPE ?

   b) I) Enuncie y simbolice el Principio de Inducción Matemática (PIM).
   II) Utilice el PIM para demostrar que para todo entero n positivo se cumple $f_1^2 + f_2^2 + ... + f_n^2 = f_n f_{n+1}$, donde f_n es el n-ésimo número de Fibonacci.

3) a) I) Defina y simbolice Relación de Recurrencia Homogénea, Lineal, de Coeficientes Constantes (RRHLCC) y de orden k.
   II) Enuncie el teorema acerca de la forma que tiene la solución de una RRHLCC de segundo orden cuando las dos raíces de la ecuación característica asociada son reales y distintas.

   b) Dado un grafo simple $G = (V, E)$ de $n = |V|$ vértices y $m = |E|$ aristas ¿de qué manera utiliza la potencia r-ésima de la matriz de adyacencia $\boldsymbol{A}$ (i.e. $\boldsymbol{A}^r$ con entero $r > 0$) para determinar si G es o no conexo?

4) Dados los grafos $G_1 = (V, E)$ y el grafo ponderado $G_2 = (V, E, W)$ mostrados en la Fig. 1 (izq. y der.):

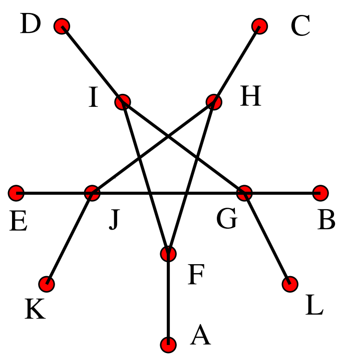
   a) I) ¿Contiene G_1 un circuito hamiltoniano o un circuito euleriano? Dé uno en cada caso sino justifique.
   II) Encuentre en G_1 un árbol de expansión T_1 mediante búsqueda *en profundidad*. Luego, liste los vértices de T_1 en postorden.

   b) Determine y trace un camino de costo mínimo en G_2 desde el vértice D hasta el vértice A utilizando el algoritmo de Dijkstra. Sin hacer nuevas cuentas ¿es único?

5) Dado el grafo ponderado $G_2 = (V, E, W)$ mostrado en la Fig. 1 (der.):

   a) Encuentre en G_2 un árbol de expansión T_2 de peso mínimo mediante el algoritmo de Prim empezando en el vértice A. ¿Es único?

   b) Seleccione el vértice A como raíz del árbol T_2 obtenido en el inciso anterior. Grafíquelo y liste: vértices por niveles, hojas, y vértices listados en preorden. Además indique la altura de T_2.



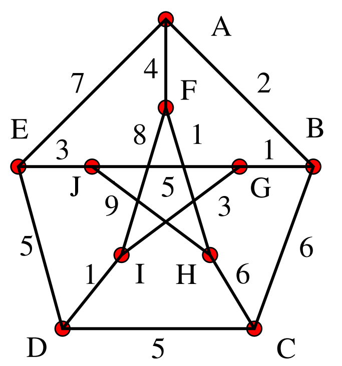


Figura 1: Grafos $G_1 = (V, E)$ (izq.) y grafo ponderado $G_2 = (V, E, W)$ (der.) para los incisos 4a-5b.