

Trabajo Práctico Número 9: Ecuaciones de campo y condiciones de contorno

1. Sea V el volumen encerrado por la superficie S cuya normal saliente unitaria es \mathbf{n} ; y sea \mathbf{x} el vector posición en un punto en V . Usando el teorema de Gauss y notación indicial mostrar que:

a.
$$\int_S x_i n_j dS = V \delta_{ij}.$$

b.
$$\int_S \mathbf{n} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{x}) dS = 2V\mathbf{a},$$
 donde \mathbf{a} es un vector arbitrario constante (independiente de \mathbf{x}).

c.
$$\int_S \lambda \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \mathbf{w} \cdot \nabla \lambda dV,$$
 donde $\mathbf{w} = \text{rot}(\mathbf{v})$, siendo $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ una función vectorial arbitraria, y $\lambda = \lambda(\mathbf{x})$ es una función escalar arbitraria.

2. Sea el movimiento de un cierto medio continuo descrito por las ecuaciones:

$$x_1 = a_1 e^{-t}, \quad x_2 = a_2 e^t, \quad x_3 = a_3 + a_2 (e^{-t} - 1)$$

El campo de temperaturas en dicho medio está dado por:

$$T(x_1, x_2, x_3, t) = e^{-t} (x_1 - 2x_2 + 3x_3)$$

Calcule la derivada material de la temperatura en ese medio.

3. Dos componentes del campo de velocidad de un fluido son conocidas para una región $-2 \leq x, y, z \leq 2$:

$$u = (1 - y^2)(a + bx + cx^2), \quad w = 0.$$

El fluido es incompresible. ¿Cuál es la componente v en la dirección del eje y ?

4. Sea el campo de temperatura del fluido descrito en el problema anterior:

$$T = T_0 e^{-kt} \sin(\alpha x) \cos(\beta y).$$

Encuentre la derivada material de la temperatura de una partícula ubicada en el origen $x = y = z = 0$. Halle lo mismo para una partícula en $x = y = z = 1$.

5. Considere el momento de todas las fuerzas aplicadas alrededor del origen del sistema de coordenadas $O-x_1x_2x_3$ en un medio continuo V encerrado por la superficie S de normal saliente unitaria \mathbf{n} :

$$L_i = \int_V e_{ijk} x_j X_k dV + \int_S e_{ijk} x_j T_k^n dS$$

y el momento de momentum

$$H_i = \int_V e_{ijk} x_j \rho v_k dV$$

donde \mathbf{v} es la velocidad y ρ es la densidad del continuo. Verifique que el equilibrio de momentos puede expresarse como:

$$\frac{D}{Dt} H_i = L_i$$

Luego, utilice la fórmula de Cauchy, el teorema de Gauss y la ecuación Euleriana del movimiento para mostrar que

$$\int_V e_{ijk} \sigma_{jk} dV = 0.$$

6. Sean:

- La energía cinética $K = \int_V \frac{1}{2} \rho v_i v_i dV$, donde \mathbf{v} es el vector velocidad y ρ es la densidad del material;
- La energía gravitacional $G = \int_V \rho \phi(\mathbf{x}) dV$, donde ϕ es el potencial gravitacional por unidad de masa, supuesto independiente del tiempo, o sea $\partial \phi / \partial t = 0$.
- La energía interna $E = \int_V \rho \varepsilon dV$, donde ε es la energía interna por unidad de masa.
- La tasa de cambio de la entrada de calor $\dot{Q} = - \int_S h_i n_i dS = - \int_V \frac{\partial h_i}{\partial x_i} dV$, donde \mathbf{h} es el vector de flujo de calor y \mathbf{n} es la normal unitaria saliente.
- La potencia o tasa de cambio del trabajo realizado sobre el cuerpo por las fuerzas de cuerpo no gravitacionales \mathbf{F} por unidad de volumen en V y las tracciones \mathbf{T}^n por unidad de superficie en S :

$$\dot{W} = \int_V F_i v_i dV + \int_S T_i^n v_i dS.$$

a. Calcule el balance de energía:

$$\frac{D}{Dt} (K + G + E) = \dot{Q} + \dot{W}$$

Simplifique las ecuaciones considerando las ecuaciones de continuidad, de movimiento, la simetría de σ_{ij} y el hecho de que las fuerzas de cuerpo totales por unidad de volumen resultan $X_i = F_i + g_i$, con $g_i = -\rho \partial \phi / \partial x_i$ las fuerzas de cuerpo gravitacionales por unidad de volumen, para obtener:

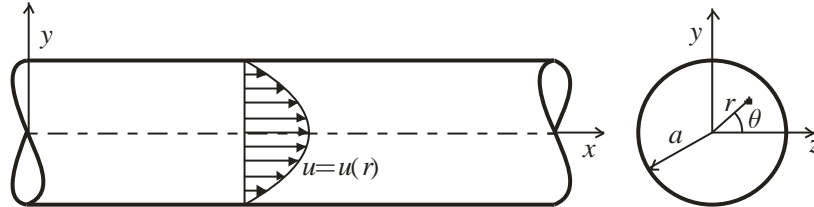
$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = -\frac{\partial h_i}{\partial x_i} + \sigma_{ij} V_{ij}$$

con $V_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i})/2$.

- b. Suponga que el material obedece a la ley constitutiva (de conducción de calor) de Fourier $h_i = -k \partial T / \partial x_i$, donde T es la temperatura y k la conductividad térmica, que la energía interna es puramente térmica, dada por $\varepsilon = cT$, donde c es la capacidad calorífica por unidad de masa del material, y que el continuo se halla en reposo ($v_i = 0$). Verifique que el balance de energía se reduce a la conocida como ecuación del calor:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)$$

7. En la figura se muestra el problema del flujo de un fluido incompresible a través de un tubo cilíndrico circular de radio a en posición horizontal. Se asumen condiciones de flujo desarrollado, lejos de la entrada y la salida del tubo.



Suponiendo despreciables las fuerzas de cuerpo, hallar la solución de la forma

$$u = u(r), \quad v = 0, \quad w = 0.$$

Use la siguiente relación entre el Laplaciano de una función f en coordenadas Cartesianas (x, y, z) y en coordenadas cilíndricas (x, r, θ) :

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

Con la solución hallada, mostrar que:

- la tasa de flujo de masa a través del tubo es $Q = -\frac{\pi a^4 \rho}{8} \nabla^2 u$,
- la velocidad media es $u_m = -\frac{a^2}{8} \nabla^2 u$,
- el coeficiente de fricción en la pared es

$$c_f = \frac{\text{tensión cortante}}{\text{presión dinámica media}} = \frac{-\mu \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a}}{\frac{1}{2} \rho u_m^2} = \frac{16}{R_N},$$

donde $R_N = \frac{2a\rho u_m}{\mu}$ es el número de Reynolds.