

**METODOS NUMERICOS PARA EL PROBLEMA  
DE LA RESISTENCIA DE OLA EN BARCOS**

por

Jorge D'Elía

Tesis remitida a la Comisión de Posgrado de la  
FACULTAD DE INGENIERIA Y CIENCIAS HIDRICAS  
como parte de los requisitos para la obtención  
del grado de  
DOCTOR EN INGENIERIA  
Mención Mecánica Computacional  
de la  
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

1997

# UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

## Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

Como miembros del Jurado de Tesis certificamos que hemos leído la disertación preparada por: Jorge D'Elía .....  
intitulada: METODOS NUMERICOS PARA EL PROBLEMA .....  
DE LA RESISTENCIA DE OLA EN BARCOS .....  
.....  
y recomendamos que sea aceptada como parte de los requisitos para la obtención del grado de: DOCTOR EN INGENIERIA .....

_____	Fecha: 22 de diciembre de 1997 .....
Juan Carlos Ferreri	
_____	Fecha: 22 de diciembre de 1997 .....
Pablo Miguel Jacovkis	
_____	Fecha: 22 de diciembre de 1997 .....
Alfonso Pujol	
_____	Fecha: 22 de diciembre de 1997 .....
Carlos Vionnet	

La aprobación final y aceptación de esta disertación estará condicionada a la presentación de la copia final ante la Comisión de Posgrado de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas.

Certificamos que hemos leído esta disertación preparada bajo nuestra dirección y recomendamos que sea aceptada como parte de los requisitos de la disertación.

_____	Fecha: 22 de diciembre de 1997 .....
Director de la Tesis: Sergio Rodolfo Idelsohn	
_____	Fecha: 22 de diciembre de 1997 .....
Codirector de la Tesis: Mario Alberto Storti	

## DECLARACION DEL AUTOR

Esta disertación ha sido remitida como parte de los requisitos para la obtención del grado académico de Doctor en Ingeniería ante la Universidad Nacional del Litoral y ha sido depositada en la Biblioteca de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas para que esté disponible a sus lectores bajo las condiciones estipuladas por el Reglamento de la mencionada Biblioteca.

Citaciones breves de esta disertación son permitidas sin la necesidad de un permiso especial, en la suposición de que la fuente sea correctamente citada. Solicitudes de permiso para una citación extendida o para la reproducción parcial o total de este manuscrito serán concedidos por el portador legal del derecho de propiedad intelectual de la obra.

FIRMA: .....

para mi madre, mis hermanos

y a la memoria de mi padre

Vicente D'Elía Conte (1922-1993)

## Agradecimientos

Esta tesis ha sido realizada en el *Grupo de Tecnología Mecánica* (GTM) del *Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química* (INTEC), dependiente del *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas* (CONICET) y de la *Universidad Nacional del Litoral* (UNL), bajo la dirección del Dr. Sergio R. Idelsohn y la codirección del Dr. Mario A. Storti, a quienes agradezco el tiempo, confianza, y amplia paciencia que prestaron hacia mi trabajo.

Expreso mi reconocimiento a Fernando Basombrio y Marcelo Vénere del Centro Atómico Bariloche, Horacio E. Retamales, ex-profesor de la Universidad Nacional de San Juan, Carlos Garcia Garino, y Carlos Llopiz, profesores de la Universidad Nacional de Cuyo, Violeta Colpachi y Lita Diblasi, profesoras de la Universidad Tecnológica Nacional, a los ingenieros Miguel Coussirat, Oscar Frutos, Rosana Fonte y Alberto Del Rosso, como asimismo a todos los integrantes del GTM durante estos años, especialmente a Alberto Cardona, Victorio Sonzogni, Alfredo Huespe, Patricia Muda, Ruperto Bonet y Victor Fachinotti.

Parte del trabajo ha sido realizado mediante los programas distribuidos por la *Free Software Foundation/GNU-Project*: Linux ELF-OS, Octave, compiladores Fortran f2c y g77, Tgif y otros. La disponibilidad de datos experimentales ha sido posible por gentileza del “*Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería*” (CIMNE), Barcelona, España, y del “*Canal de Experiencias Hidrodinámicas de El Pardo*” (CEHIPAR), Madrid, España.

Esta investigación ha sido financiada por el *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas* (CONICET).

Especialmente a mi padres y hermanos por su respeto a mis decisiones y su respaldo incondicional, a pesar de las dificultades vividas.

## Resumen

Se presenta una condición de frontera absorbente *Discreta No-Local* (DNL) para el problema de la resistencia de ola en barcos. Esta condición es *completamente absorbente* en el sentido de que la solución es independiente de la posición del borde corriente abajo y es *no local* en el sentido de que representa matrices llenas que conectan todas las incógnitas en dos capas consecutivas en los planos de entrada y de salida. La misma es implementada en dos formas principales: por un modelo de elementos finitos, y por un modelo de paneles (o de elementos de borde). La implementación por elementos finitos es obtenida a partir de un análisis directo de las ecuaciones en diferencias resultantes, asumiendo que la malla es unidimensionalmente estructurada (en la dirección longitudinal), mientras que la implementación por paneles está acoplada con una descomposición finita de Fourier, sobre un borde artificial corriente abajo, dando un problema equivalente que es resuelto en un dominio acotado. En este caso el arrastre es computado mediante la clásica integración de la presión sobre el casco mojado en condiciones hidrostáticas, y las alturas de ola en la superficie libre corriente abajo del borde artificial son obtenidas como un procedimiento de pos-procesamiento. La condición de borde absorbente DNL muestra tres aspectos. Primero, en contraste con los métodos cuasi-Dawson evita el empleo de viscosidades numéricas en la discretización, de modo que un esquema de segundo orden centrado puede emplearse en el operador de superficie libre. Segundo, asimismo permite considerar regiones más reducidas para la superficie libre, con el consecuente ahorro en los recursos computacionales. Tercero, el uso de un esquema centrado para el operador de superficie libre permite una discretización completa por elementos finitos, donde el arrastre es luego computado por un balance de flujo, el cual es más exacto y garantiza resistencias positivas. Los resultados numéricos incluyen la estela de un ferry a quince esloras.

## Abstract

An absorbing *Discrete Non-Local* (DNL) boundary condition for the wave-resistance problem in ships is presented. This boundary condition is *completely absorbing* in the sense that the solution is independent of the position of the downstream boundary and is *nonlocal* in the sense that it represents full matrices connecting all the unknowns at two consecutive layers at the inlet and outlet planes. It is implemented in two principal ways: a finite element model and a panel (or boundary element) model. The finite element implementation is derived from straightforward analysis of the resulting constant-coefficients difference equations, assuming that the mesh is one-dimensional structured (in the longitudinal direction). The panel implementation is coupled with a finite Fourier-decomposition over an artificial downstream boundary, yielding an equivalent problem that is solved in a bounded domain. In this case the drag is computed by a classical pressure integration over the static wetted hull, and the wave-heights in downstream free surface of the artificial boundary is obtained as post-processing procedure. The absorbing boundary DNL condition shows three aspects. First, in contrast to the Dawson-like methods, the DNL condition avoids the use of numerical viscosities in the discretization, so that a second centered scheme can be used for the free surface operator. Second, this boundary condition allows to consider smaller free surface regions, with the computer resources saves involves. Third, the use of a centered scheme for the free surface operator allows a full element element discretization, and the drag is then computed by a momentum flux balance which is more accurate and guarantees positive resistances. Numerical results including the wave-pattern for a ferry along fifteen ship-lengths.

# Índice General

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Resistencia de ola . . . . .	1
1.2	Modelos matemáticos para la resistencia de ola . . . . .	1
1.3	Modelos numéricos en hidrodinámica naval . . . . .	2
1.4	Descripción de esta tesis . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Contexto fluidodinámico</b>	<b>7</b>
2.1	Resumen . . . . .	7
2.2	Contexto naval . . . . .	7
2.2.1	Definiciones . . . . .	7
2.2.2	Coefficientes de forma . . . . .	9
2.2.3	Movimientos y oscilaciones del buque . . . . .	9
2.3	Vórtices estacionarios en barcos de superficie . . . . .	10
2.4	Relaciones entre aero/hidro dinámica . . . . .	12
2.5	Fuerzas aero/hidro dinámicas . . . . .	13
2.5.1	Ternas según el flujo y según el objeto . . . . .	13
2.5.2	Fuerzas según flujo y según objeto . . . . .	14
2.6	Superficies sustentadoras . . . . .	14
2.6.1	Coefficientes aero/hidro dinámicos . . . . .	14
2.6.2	Arrastre de perfil e inducido . . . . .	15
2.7	Superficies no sustentadoras . . . . .	15
2.8	Resistencia al avance y potencia de proyecto . . . . .	16
2.8.1	Arrastre de ola . . . . .	17
2.8.2	Arrastre pelicular . . . . .	19
2.8.3	Arrastre de forma (o de presión) . . . . .	19
2.8.4	Arrastre del viento . . . . .	20
2.8.5	Arrastre parásito . . . . .	20
2.9	Fuerza generalizada de presión . . . . .	21

2.10	Diseño hidrodinámico del casco y apéndices . . . . .	22
2.11	Medición experimental de la resistencia de ola . . . . .	23
2.11.1	Resistencia residual . . . . .	23
2.11.2	Gráficas experimentales . . . . .	26
<b>3</b>	<b>El problema de la resistencia de ola</b>	<b>29</b>
3.1	Delimitación del problema . . . . .	29
3.2	Interacción viscosa/inviscida . . . . .	31
3.3	Exigencias en el mallado . . . . .	32
3.4	Aplicabilidad de la incompresibilidad . . . . .	34
3.5	Aplicabilidad de la capa límite . . . . .	35
3.6	Aplicabilidad de la irrotacionalidad . . . . .	36
3.7	Formulación potencial para la resistencia de ola . . . . .	37
3.7.1	Condición de borde cinemática . . . . .	37
3.7.2	Condición de borde dinámica . . . . .	38
3.7.3	Condiciones de radiación . . . . .	38
3.7.4	Sistema de ecuaciones gobernantes . . . . .	38
3.8	Dificultades intrínsecas . . . . .	38
3.8.1	No linealidad cinemática y dinámica . . . . .	39
3.8.2	Problema hidrodinámico incompleto . . . . .	39
3.9	Técnicas de derivada contra-corriente . . . . .	42
3.10	El ensayo de la altura de ola constante . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Linealizaciones en la superficie libre</b>	<b>45</b>
4.1	Resumen . . . . .	45
4.2	Parametrización en el problema delimitado . . . . .	45
4.2.1	Flujo básico para el barco esbelto . . . . .	46
4.2.2	Flujo básico para el barco delgado . . . . .	46
4.2.3	Flujo básico para el barco lento . . . . .	47
4.3	Expansión en el barco delgado y lento . . . . .	48
4.4	Expansión en el barco ancho y lento . . . . .	50
4.4.1	Condición de borde dinámica linealizada . . . . .	50
4.4.2	Condición de borde cinemática linealizada . . . . .	51
4.4.3	Formulación para el potencial de perturbación . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Condiciones absorbentes</b>	<b>55</b>
5.1	Resumen . . . . .	55

5.2	Problema 1D de un solo grado de libertad . . . . .	55
5.2.1	Caso “elíptico” ( $k > 0$ ) . . . . .	56
5.2.2	Caso “hiperbólico” ( $k < 0$ ) . . . . .	57
5.3	Extensión al caso discreto del caso elíptico . . . . .	58
5.4	Extensión a sistemas en el caso elíptico . . . . .	60
5.5	Expresión general para semidiscretización en $x$ . . . . .	63
5.5.1	Diferencias finitas . . . . .	63
5.5.2	Elementos finitos . . . . .	64
5.6	El caso mixto . . . . .	64
5.7	El caso discreto con varios nodos en profundidad . . . . .	68
5.8	Ejemplos numéricos . . . . .	71
5.8.1	Arrastre de ola para el dipolo sumergido . . . . .	71
5.8.2	Carga de presión parabólica localizada . . . . .	72
5.8.3	Abscisa casi indiferente en la condición absorbente . . . . .	73
5.8.4	Mallas no uniformes . . . . .	73
5.8.5	Las olas no se amortiguan . . . . .	74
<b>6</b>	<b>Cálculo analítico por Fourier</b>	<b>75</b>
6.1	Cálculo de la altura de ola . . . . .	75
6.2	Cálculo de la resistencia de ola . . . . .	79
6.3	Dipolo sumergido . . . . .	83
6.4	Carga de presión parabólica localizada . . . . .	84
<b>7</b>	<b>Método de paneles estándar</b>	<b>85</b>
7.1	Introducción . . . . .	85
7.1.1	Algunos requisitos prácticos . . . . .	86
7.1.2	Coeficiente de presión . . . . .	87
7.1.3	Mallas estructuradas y no estructuradas . . . . .	88
7.1.4	Método de paneles . . . . .	88
7.1.5	Variables primitivas escalares o vectoriales . . . . .	89
7.2	Formulación de Morino/Maître . . . . .	90
7.2.1	Ecuación integral . . . . .	90
7.2.2	Condición de borde cercana . . . . .	93
7.3	Discretización por paneles . . . . .	94
7.3.1	Discretización geométrica sistemática . . . . .	94
7.3.2	Discretización funcional sistemática . . . . .	96
7.3.3	Discretización de la ecuación integral . . . . .	96

7.4	Matrices dipolar $\mathbf{A}$ y monopolar $\mathbf{C}$ . . . . .	97
7.5	Sistema matricial de ecuaciones . . . . .	98
7.6	Integral analítica de la matriz monopolar $\mathbf{C}$ . . . . .	98
7.6.1	Función auxiliar monopolar $V$ . . . . .	99
7.6.2	Integral de línea monopolar . . . . .	100
7.6.3	Resumen de cómputo de la matriz monopolar . . . . .	104
7.6.4	Simetría y continuidad monopolar . . . . .	105
7.7	Integral analítica de la matriz dipolar $\mathbf{A}$ . . . . .	105
7.7.1	Función auxiliar dipolar $W$ . . . . .	106
7.7.2	Integral de línea dipolar . . . . .	107
7.7.3	Resumen de cómputo de la matriz dipolar . . . . .	109
7.7.4	Simetría y continuidad dipolar . . . . .	110
7.8	Cómputo del campo superficial de velocidades . . . . .	111
7.8.1	Forma fuerte para las velocidades de perturbación . . . . .	111
7.8.2	Forma débil para las velocidades de perturbación . . . . .	113
7.8.3	Componente dipolar espúrea . . . . .	115
7.8.4	Ejemplo numérico . . . . .	117
<b>8</b>	<b>Método de paneles extendido</b>	<b>119</b>
8.1	Resumen . . . . .	119
8.2	Introducción . . . . .	119
8.3	El método de Newton Raphson . . . . .	119
8.3.1	El método de Newton Raphson <i>discreto</i> . . . . .	120
8.3.2	El método de Newton Raphson <i>en el continuo</i> . . . . .	121
8.4	Método de paneles . . . . .	122
8.4.1	Método de paneles para el flujo básico . . . . .	122
8.4.2	Método de paneles para el flujo perturbado . . . . .	123
8.5	Cómputo de la matriz de inyección . . . . .	124
8.6	Cuasi-Dawson en la matriz de superficie . . . . .	128
8.7	Ejemplo numérico . . . . .	129
<b>9</b>	<b>Condición de frontera DNL por elementos finitos</b>	<b>131</b>
9.1	Resumen . . . . .	131
9.2	Cálculo del arrastre por amplitud de ola . . . . .	131
9.3	Potencia emitida en la ecuación de Helmholtz . . . . .	133
9.4	Semidiscretización . . . . .	135
9.5	Resistencia de ola por flujo de momento . . . . .	137

9.6	Versión linealizada del flujo de momento . . . . .	140
9.7	Implementación numérica . . . . .	142
9.8	Cómputo de los coeficientes $b_j$ . . . . .	145
9.9	Solución numérica del sistema de ecuaciones . . . . .	145
9.10	Solución por superposición . . . . .	148
9.11	Ejemplo sobre el método de superposición . . . . .	150
9.12	Método de superposición sobre el Wigley . . . . .	152
9.13	Condicionamiento del sistema modificado . . . . .	152
9.14	Forma simétrica de las ecuaciones . . . . .	158
9.15	Simetría de la matriz de absorción . . . . .	160
9.16	Ejemplos numéricos . . . . .	163
9.16.1	Cilindro sumergido en un canal . . . . .	163
9.16.2	Casco de la serie Wigley . . . . .	165
9.16.3	Rectángulo de presión (hovercraft) . . . . .	165
9.16.4	Esferas sumergidas . . . . .	166
<b>10</b>	<b>Condición de frontera DNL por paneles</b>	<b>167</b>
10.1	Resumen . . . . .	167
10.2	Matriz de superficie libre . . . . .	167
10.3	Flujo bidimensional . . . . .	168
10.4	Flujo tridimensional . . . . .	169
10.5	Relación de dispersión . . . . .	172
10.6	Condiciones absorbentes DNL equivalentes . . . . .	173
10.7	Ejemplos Numéricos . . . . .	175
10.7.1	Cilindro sumergido . . . . .	175
10.7.2	Esfera sumergida . . . . .	176
10.7.3	Casco Wigley . . . . .	177
10.7.4	Velero . . . . .	178
10.7.5	Ferry de transporte . . . . .	179
<b>11</b>	<b>Epílogo</b>	<b>185</b>
<b>A</b>	<b>Notación y nomenclatura</b>	<b>187</b>

# Índice de Figuras

1.1	Patrones de olas generadas por un barco. . . . .	2
2.1	Sección transversal del casco de un buque. . . . .	7
2.2	Dimensiones de diseño. . . . .	8
2.3	Grados de libertad según terna fija a la nave. . . . .	10
2.4	Vórtices de fondo (por la quilla). . . . .	11
2.5	Vórtices de popa (por concavidad del casco). . . . .	11
2.6	Vórtices de proa (por ola de proa). . . . .	12
2.7	Vórtices encollados (por rotura de olas). . . . .	12
2.8	Subestructuras principales en un velero y su aptitud para generar sustentación inducida. . . . .	13
2.9	Descomposición de la fuerza resultante según, i) terna del flujo (cálculos hidrodinámicos), ii) terna del objeto (cálculos estructurales). . . . .	14
2.10	Punto de entrada en pérdida para una superficie sustentadora. . . . .	15
2.11	Arrastre inducido sobre superficie portante finita. . . . .	16
2.12	Capas límites sobre una esfera: laminar y turbulenta. . . . .	17
2.13	Arrastre de ola y su relación con la irradiación de potencia llevada por el patrón de olas hacia corriente abajo de la nave. . . . .	18
2.14	Resistencia del viento sobre una nave. . . . .	20
2.15	Coeficiente de resistencia para una placa plana [Wehausen, 1973 (fig.23)].	24
2.16	Coeficiente de resistencia para modelo Wigley 1805 A (equiv. modelo 2891) [Wehausen, 1973 (fig.20)]. . . . .	25
2.17	Coeficiente de resistencia para modelo Wigley 2892 [Wehausen, 1973 (fig.20)].	27
2.18	Coeficiente de resistencia para cascos de la Serie 60 ( $C_B = 0.60$ ) [Wehausen, 1973 (fig.9)]. . . . .	28
3.1	Patrones olas y regiones para la interacción viscosa / invíscida. . . . .	30
3.2	Sistema de referencia cartesiano. . . . .	33

3.3	Descripción geométrica del problema de la resistencia de ola sobre naves. . . . .	33
3.4	Simetrías en el versor normal $\mathbf{n}$ . . . . .	35
3.5	Simetrías en la velocidad $\mathbf{u}$ . . . . .	40
3.6	La derivada lateral corriente arriba descarta las soluciones no físicas, en las cuales el patrón de olas se propaga corriente arriba. . . . .	42
3.7	Las soluciones físicamente admisibles y la derivada lateral contra-corriente, muestran una cercana analogía en aerodinámica transónica. . . . .	43
3.8	El ensayo de la altura de ola constante permite descartar los casos sobredifusivo y subdifusivo. . . . .	44
4.1	Flujo básico para el barco esbelto visto como el flujo alrededor de un “alambré”. . . . .	46
4.2	Flujo básico para el barco delgado visto como el flujo alrededor de una placa plana. . . . .	46
4.3	Flujo básico para el barco lento visto como el flujo bajo aceleración gravitatoria infinita. . . . .	47
4.4	Equivalencia entre flujo con gravedad infinita y el flujo del cuerpo doble. . . . .	48
4.5	Velocidad transversal despreciable en barco delgado. . . . .	49
4.6	Interpretación física del flujo normal a la superficie libre iterada $\Gamma^0$ . . . . .	53
5.1	Malla no estructurada según $yz$ y estructurada según $x$ . . . . .	56
5.2	Coeficiente de arrastre de ola para el dipolo sumergido. . . . .	67
5.3	Coeficiente de arrastre de ola para una carga parabólica de presión localizada. . . . .	68
5.4	Verificación de la condición de contorno absorbente. El resultado es independiente de donde se impone la condición. . . . .	69
5.5	Uso de la condición absorbente con mallas que no son estructuradas en la dirección $x$ . . . . .	70
5.6	Elevación de la superficie libre. Las olas no se amortiguan con el método propuesto, y pasan el ensayo de la altura de ola constante. . . . .	71
5.7	Amplitud de la ola para el problema de la carga parabólica de presión localizada. . . . .	72
6.1	El núcleo $S(k)$ tienen un corte de ramificación sobre el eje imaginario y dos polos aislados en $k = \pm K$ . . . . .	76
6.2	Camino de integración $P^-$ que <i>deja a los polos a la izquierda</i> . . . . .	77
6.3	Camino de integración $P_{(-\delta)}^-$ con los polos a la izquierda y para $x < 0$ . . . . .	78
6.4	Camino de integración $P_{(+\delta)}^-$ con los polos a la izquierda y para $x > 0$ . . . . .	79

7.1	Malla estructurada (izq.), no estructurada (der.) . . . . .	89
7.2	Geometría para la formulación de Morino/Maître. . . . .	91
7.3	Paneles no admisibles: con <i>huecos</i> (izq.), <i>sobre-encimados</i> (centr.). Paneles admisibles (der.). . . . .	94
7.4	Mallado superficial sobre una esfera con paneles triangulares. . . . .	95
7.5	Generación espúrea en los extremos de una superficie delgada: matriz sin- gular porque los paneles sombreados tienen centroides coincidentes (izq.), no singular (der.). . . . .	97
7.6	Interpretación física de los potenciales 1-polar 1 y 2-polar. . . . .	98
7.7	Terna local $p, q, \eta$ según el lado $L^k$ . . . . .	99
7.8	Plano $p, q$ de la terna local del lado $L^k$ . . . . .	101
7.9	Triángulo equilátero con densidad monopolar unitaria ( $\sigma = 1$ ). . . . .	104
7.10	Simetría del coeficiente monopolar con respecto al plano del panel. . . . .	105
7.11	Intensidad del coeficiente monopolar en el plano $\alpha$ , para las cotas: $\eta = 0.01$ (izq.), $\eta = 0.50$ (der.). . . . .	106
7.12	Triángulo equilátero con densidad dipolar unitaria ( $\mu = 1$ ). . . . .	109
7.13	Antisimetría del coeficiente dipolar con respecto al plano del panel. . . . .	110
7.14	Intensidad de la función base dipolar en el plano $\alpha$ , para las cotas: $\eta = 0.01$ (izq.), $\eta = 0.5$ (der.). . . . .	110
7.15	Parcela de paneles $A_i$ alrededor del nodo $i$ . . . . .	111
7.16	Gradiente dipolar en el panel por medio del teorema de Stokes. . . . .	112
7.17	Geometría para la función de forma elemental $N_i^e$ sobre un panel triangular. . . . .	112
7.18	Flujo potencial exterior a una esfera (izquierda), coeficiente de presión analítico (derecha). . . . .	113
7.19	Componente dipolar espúrea $\nabla\mu_{\perp}$ en la forma debilitada. . . . .	114
7.20	Esfera con una malla estructurada (derecha), histograma de las áreas ele- mentales (izquierda). . . . .	115
7.21	Coeficiente de presión $C_p(z)$ para una malla estructurada sobre una esfera: con una forma fuerte (izquierda) y con una forma debilitada (derecha). . . . .	116
7.22	Malla de paneles perturbada sobre una esfera (derecha), histograma de las áreas elementales (izquierda). . . . .	117
7.23	Coeficiente de presión $C_p(z)$ para una malla de paneles no estructurada so- bre una esfera: con una forma fuerte (izquierda) y con una forma debilitada (derecha). . . . .	118
8.1	Método del <i>flujo de transpiración</i> . . . . .	121

8.2	Vista $xy$ de la mitad superior de la malla $M_1$ con $37 \times 14$ paneles sobre la superficie libre de referencia, y 154 paneles sobre el casco. . . . .	124
8.3	Vista $xy$ de la malla $M_1$ . . . . .	124
8.4	Vista $xz$ de la malla $M_1$ . . . . .	124
8.5	Vista $yz$ de la malla $M_1$ . . . . .	125
8.6	Curva de resistencia para el Wigley, por paneles y cuasi-Dawson. . . . .	125
8.7	Isolíneas de elevación $\eta$ para $F_n = 0.40$ en la malla $M_3$ (punto $B$ ), por paneles y cuasi-Dawson. . . . .	128
8.8	Isolíneas de elevación $\eta$ para Froude $F_n = 0.60$ en la malla $M_3$ (punto $D$ ), por paneles y cuasi-Dawson. . . . .	129
8.9	Isolíneas de elevación $\eta$ para Froude $F_n = 0.70$ en la malla $M_3$ (punto $E$ ), por paneles y cuasi-Dawson. . . . .	130
9.1	Cuerpo simétrico discretizado con malla simétrica. . . . .	131
9.2	Ecuación de Helmholtz 1D. Cálculo de la potencia emitida por la fuente $f$ . . . . .	132
9.3	Descripción geométrica, vista lateral. . . . .	135
9.4	Descripción geométrica, vista en planta. . . . .	137
9.5	El flujo de momento $G$ como función de $x$ . . . . .	139
9.6	La superficie de salida $\Gamma_{sal}$ . . . . .	140
9.7	Modos usados en la superposición para el Wigley. . . . .	150
9.8	Potencial sobre el plano de simetría. . . . .	151
9.9	Elevación de la superficie sobre (cuasi) líneas de corriente. . . . .	153
9.10	Descripción del problema 1D para las ecuaciones modales. . . . .	153
9.11	Número de condición para la ecuación modal 1D con el sistema original y el modificado con condiciones de contorno Dirichlet o Neumann aguas abajo. . . . .	155
9.12	Modos propios del problema 1D con condiciones de contorno Dirichlet/Dirichlet. . . . .	156
9.13	Modos propios del problema 1D con condiciones de contorno Dirichlet/Neumann. . . . .	157
9.14	Malla de elementos finitos sobre el cilindro sumergido. . . . .	158
9.15	Resistencia de ola sobre un cilindro sumergido. . . . .	160
9.16	Número de condición para el problema del cilindro sumergido. . . . .	161
9.17	Curva de arrastre por MEF+DNL para el modelo Wigley. . . . .	162
9.18	Resultados numéricos por MEF + DNL para el rectángulo de presión. . . . .	163
9.19	Resultados experimentales y semi-analíticos para el rectángulo de presión. . . . .	164
9.20	Curva de resistencia de ola para una esfera sumergida $H = 4R$ . . . . .	165
9.21	Curva de arrastre para dos esferas sumergidas $R = 1/2, H = 2, D = 4$ . . . . .	166

10.1	Esquema descriptivo para el problema de olas generadas por una embarcación. . . . .	168
10.2	Curva de arrastre $C_w$ en un cilindro circular sumergido en posición horizontal, por paneles/Fourier. . . . .	169
10.3	Ensayo de la altura de ola constante para el cilindro sumergido en posición horizontal, por paneles/Fourier. . . . .	170
10.4	Curva de arrastre para una esfera sumergida a $H = 2R$ , por paneles/Fourier. . . . .	170
10.5	Malla de paneles suave y estructurada sobre la superficie libre alrededor de un casco Wigley (vista $xy$ ). . . . .	171
10.6	Malla de paneles perturbada y estructurada sobre la superficie libre alrededor de un casco Wigley (vista $xy$ ). . . . .	172
10.7	Curva de arrastre para el casco Wigley para una malla suave y otra perturbada, según un cálculo por paneles/Fourier. . . . .	173
10.8	Malla de paneles sobre el casco sin apéndices de un modelo en escala reducida de un velero. . . . .	174
10.9	Iso-elevación a 7 nudos equivalentes del velero, por paneles/Fourier. . . . .	175
10.10	Iso-elevación a 9 nudos equivalentes del velero, por paneles/Fourier. . . . .	176
10.11	Perfiles de ola en [m] sobre el plano $y = 1.22$ [m] paralelo al plano de crujía a 7, 8, 9 y 10 nudos equivalentes del velero, por paneles/Fourier. . . . .	177
10.12	Esquema para la mediación en el canal. . . . .	178
10.13	Perfiles de estela medidos cada 25 [m] en planos paralelos al de crujía, a 30 nudos. . . . .	179
10.14	Perfiles de estela medidos cada 25 [m] en planos paralelos al de crujía, a 40 nudos. . . . .	180
10.15	Iso elevación por paneles/Fourier a 30 nudos. . . . .	181
10.16	Iso elevación por paneles/Fourier a 40 nudos. . . . .	182
10.17	Perfiles de estela a 30 nudos obtenidos por pos-procesamiento. . . . .	183
10.18	Perfiles de estela a 40 nudos obtenidos por pos-procesamiento. . . . .	183
10.19	Vista 3D de la estela del ferry a 30 nudos hasta 15 esloras corriente abajo. . . . .	184
10.20	Vista 3D de la estela del ferry a 40 nudos hasta 15 esloras corriente abajo. . . . .	184

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Resistencia de ola

La *resistencia de ola* se refiere al siguiente aspecto en el problema de avance de barcos en el mar. Una embarcación que avanza con velocidad constante en un mar calmo, perturba la posición de la superficie libre del agua, generando un patrón de olas estacionario que se propaga corriente abajo, formando la clásica estela, y llevándose una cierta potencia mecánica que debe suplir la nave. Ese patrón de olas es la composición de al menos dos sistemas de olas transversales divergentes, generados en forma independiente en la proa y en la popa de la nave, como se muestra en la figura 1.1, y en primera aproximación están en razonable acuerdo con la teoría de Kelvin de una perturbación puntual viajera sobre una superficie libre de un líquido. Ahora bien, cuando la velocidad de la nave cambia el patrón de olas global se altera, debido a que las olas de proa y de popa interfieren entre si en forma constructiva o destructiva según la velocidad. Como resultado final de esta interferencia de naturaleza ondulatoria, la curva de *resistencia al avance* en función de la velocidad, presenta una serie de máximos y mínimos variable según el tipo de nave y de difícil predicción teórica para las embarcaciones reales. Este efecto peculiar en la resistencia al avance debido al patrón de olas, ha dado lugar a distinguir en ella una cierta *resistencia de ola* y aquí nos interesará su predicción numérica mediante los recursos de la mecánica computacional de los medios continuos.

### 1.2 Modelos matemáticos para la resistencia de ola

La componente de ola distinguida en la resistencia al avance nos permite definir el *problema de la resistencia de ola*. Su tratamiento teórico fue iniciado en su momento por Mitchell, y una exposición detallada puede encontrarse en Wehausen (1973). Empero,

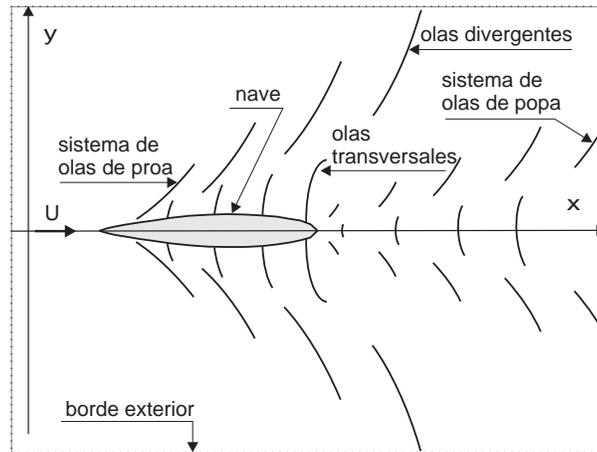


Figura 1.1: Patrones de olas generadas por un barco.

dado que el modelo matemático en su forma general ha resultado muy complicado para permitir una solución directa por métodos analíticos e incluso semianalíticos, la tarea de los matemáticos e hidrodinamicistas se ha orientado al desarrollo de simplificaciones, de modo de obtener una serie de problemas que fueran tanto lo suficientemente aproximados como prácticos, como para que fueran útiles en ingeniería hidronaval. Así, la principal simplificación introducida ha sido alguna forma de linealización en las condiciones de borde a imponer en la superficie libre, motivada por suposiciones acerca de las dimensiones relativas del casco y/o su velocidad de avance, dando lugar a un conjunto amplio de linealizaciones posibles, hoy clásicas. Así, antes de la irrupción de los ordenadores digitales, las más conocidas eran aquellas aplicables a: *barcos esbeltos* (*slender ships*), *barcos delgados* (*thin ships*), *barcos planos* (*flat ships*) y *barcos rápidos* (*fast ships*) (Ogilvie 1977, Raven 1996), pero ninguno de ellos habían resultado suficientemente representativos para barcos de las dimensiones relativas y/o de las velocidades que usualmente se encuentran en proyecto naval.

### 1.3 Modelos numéricos en hidrodinámica naval

Los métodos aproximados de naturaleza analítica y semi analítica permiten hallar soluciones aproximadas del problema de la resistencia de ola sólo en casos muy simples, y no resultan ni aplicables ni suficientemente representativos para las necesidades medias de proyectos en ingeniería naval. Esto es así porque los proyectos en su gran mayoría se orientan hacia el denominado *barco lento* (*slow ship*), esto es, una nave que se desplaza a velocidades relativamente bajas y constituye un caso casi intratable sin la asistencia

de los métodos numéricos de un mayor nivel de complejidad. Así, gracias al auge de los ordenadores digitales y de la mecánica computacional, se ha posibilitado el desarrollo de teorías y métodos numéricos orientados hacia el problema del *barco lento*, válidas en un sentido asintótico. De todos los métodos numéricos de cómputo con aplicabilidad práctica sobresale la familia de métodos que llamamos como *cuasi Dawson* (Dawson, 1977), propuesta que ha mostrado ser en los hechos bastante práctica y flexible, convirtiéndose en una herramienta estándar en cálculo industrial (Raven, 1996). Dicho enfoque constituye nuestro punto de partida, no obstante es necesario mencionar otras líneas de investigación afines.

Mientras Chapman [16] ofrece un estado del arte de las estrategias numéricas en el problema de superficie libre específicamente relacionada en barcos, Lugt [42] lo hace teniendo en cuenta los flujos vorticosos hidronavales, mientras que Euvard [21] hace lo propio en hidrodinámica naval transitoria. Estudios matemáticos de las condiciones absorbentes en la simulación de la frontera abierta para olas de superficie libre son dados por Romate [63], Israeli/Orzag [29], Yen/Hall [78], mientras que su aplicación numérica con un método de paneles es propuesta por Broeze/Romate [12]. La resistencia de ola predicha por una extensión no lineal de la teoría de Ogilvie 2D para barcos lentos, y aproximada mediante representaciones asintóticas, en particular para semiesferas sumergidas y cilindros, y con ejemplos numéricos que incluyen cascos de la serie Wigley y de la Serie 60, es dada por Baba/Hara [5]. Variantes de los métodos de paneles 3D (o de singularidades) para la linealización de Neumann-Kelvin pueden hallarse en Daube/Dulieu [18], en Guevel/Delhommeau/Cordonnier [25], y para los movimientos de barcos 3D, en Chang [15]. Modelos de interacción viscosa/inviscida para simulación de las capas límites y estelas vorticosas de barcos son propuestas por Tahara/Stern/Rosen [70], mientras que para diseño naval ésta es propuesta por Larson/Broeber/Kim/Zhang [38]. Formulaciones potenciales 3D, con soluciones por el Método de Diferencias Finitas (MDF) se pueden hallar en Ohring [54,55], von Kerczek/Salvesen [74], mientras que soluciones por el Método de Elementos Finitos (MEF) son propuestas por Oomen [56], Korving/Hermans [34], y por ambos métodos por Yen/Lee/Akai [78]. Finalmente una formulación euleriana 3D, con soluciones por multigrillas es dada por Farmer/Martinelli/Jameson [22]. Esquemas para transitorios 3D son dados por Ohring/Telste [55] y por Pot/Jami [58]. Cálculos de las fuerzas hidrodinámicas no lineales sobre cuerpos flotantes son dados por Nichols/Hirt [52], mientras que en cuerpos sumergidos por Wu [77]. Tuck [71] lo hace para un cilindro sumergido, y Korving [33] lo hace sobre una distribución de presión móvil sobre una superficie libre. Una predicción de los movimientos 3D del barco por diferencias finitas es dada por Chan [14]. Una estrategia de simulación numérica viscosa mediante i) Navier Stokes

3D más pseudo incompresibilidad y mediante diferencias finitas es dada por Liu/Ikehata [41] en el caso de olas de superficie generadas por un cuerpo de formas arbitrarias, ii) Navier Stokes promediadas 3D en régimen transitorio y también por diferencias finitas es dada por Alessandrini/Delhommeau [2]. Estudios matemáticos sobre la no linealidad geométrica en el método de elementos de borde/paneles (BEM) son dados por Liggett [39], y finalmente sobre soluciones fundamentales en problemas con superficie libre son dados por Karageorghis [31].

En la etapa fundamental de los métodos cuasi Dawson, se implementa un esquema en diferencias finitas a lo largo de las líneas de corriente, orientado hacia corriente arriba, de alto orden pero incompleto, donde la tercera derivada de la velocidad es descartada. La orientación hacia corriente arriba es necesaria para introducir una asimetría en el modelo numérico, que en un contexto mas amplio de la fluido-dinámica computacional se la reconoce como una técnica de *derivada contra-corriente* (*upwind technique*), y da cuenta del siguiente hecho físico simple: la transmisión de la información de una perturbación producida en el interior de un fluido en movimiento se propaga corriente abajo. A pesar de los méritos de la familia cuasi Dawson mencionamos algunos inconvenientes: i) nos restringe en la superficie libre al empleo de las *mallas estructuradas* típicas en diferencias finitas, siendo en principio bastante difícil su extensión a las *mallas no estructuradas* típicas en elementos finitos; ii) su naturaleza de alto orden e incompleta dificulta la formulación del sistema algebraico de ecuaciones. Por ejemplo, en elementos finitos se deberían hallar sus equivalentes debilitados, con expresiones algebraicas sumamente elaboradas; iii) obscurece bastante la física del problema de propagación de las olas de superficie gravitacionales. De hecho en su publicación original Dawson dio poca o ninguna justificación a la razón de ser del esquema, el cual fue obtenido por una serie de detallados ensayos numéricos sistemáticos, no obstante trabajos posteriores han aportado algunas aclaraciones (Raven, 1996).

## 1.4 Descripción de esta tesis

El principal objetivo de investigación de esta tesis es superar algunas de las dificultades de la familia cuasi Dawson mediante su reemplazo por una condición de frontera *absorbente Discreta No-Local* (DNL), de un modo suficientemente general para su adaptación con los principales métodos empleados en fluido dinámica computacional. Además nos permitirá desarrollar un esquema de cómputo alternativo para la resistencia de ola basado en las amplitudes de las olas corriente abajo, en una posición relativamente cercana a la nave. Este enfoque presenta la ventaja adicional de brindar siempre una resistencia de ola

positiva. En esta tesis sólo emplearemos una linealización particular en las condiciones de borde sobre la superficie libre, de igual orden comparada con la de un barco delgado en su manga respecto a la eslora. El espíritu del desarrollo y presentación de los temas es la de hacerla lo más autocontenida posible. Su organización y exposición es la siguiente.

En el capítulo 2 damos un contexto fluidodinámico en el cual podemos ubicar la resistencia de ola, y un racconto del método experimental para su determinación.

En el capítulo 3 exponemos la formulación del problema de la resistencia de ola delimitado. Recurrimos a la interacción *viscosa/invíscida* para la descripción del flujo, y nos restringimos a su parte invíscida mediante un modelo potencial. En el modelo potencial formulado en primera instancia mostramos dos dificultades intrínsecas, una dada por la presencia de condiciones de borde no lineales en la superficie libre tanto cinemática como dinámica, que complican notoriamente cualquier intento de resolución del problema, mientras que la segunda se refiere a que sin condiciones de radiación, por lo menos a nivel del continuo, resulta un problema hidrodinámico *incompletamente formulado* en el sentido de Birkhoff [9], dado que no incorpora el sentido de propagación hacia corriente abajo. Finalmente introducimos el *ensayo de la altura de ola constante*.

En el capítulo 4 describimos tres linealizaciones básicas: *barco esbelto (slender ship)*, *barco delgado (thin ship)* y *barco lento (slow ship)*. Luego desarrollaremos una linealización de las condiciones de borde (cinemática y dinámica) en la superficie libre para el último caso.

En el capítulo 5 hacemos un análisis de la condición de frontera absorbente Discreta No-Local (DNL). Para tal fin, empezamos con un problema sencillo 1D en el continuo, donde distinguimos los casos “elíptico” e “hiperbólico”. Luego pasamos a su versión discretizada mediante diferencias finitas y su extensión a sistemas. A continuación damos la expresión general para la semi-discretización en  $x$ , el caso mixto, y el caso discreto con varios nodos en profundidad. Luego mostramos la aplicación de la técnica desarrollada en ensayos de validación, entre ellos el dipolo sumergido y una distribución de presión suave localizada, en primer lugar con mallas uniformes donde se observa que la solución numérica resulta invariante con la ubicación de la abscisa elegida para la condición absorbente. En segundo lugar, en una malla irregular se muestra que las olas no presentan efectos de una amortiguación numérica espúrea.

En el capítulo 6 tratamos un método para el cálculo de la resistencia de ola, mediante transformada de Fourier, que emplearemos para hallar soluciones para los casos simples de validación.

En el capítulo 7 consideramos el *método de elementos de borde estándar*, en el sentido de que en una primera etapa suponemos que no existe superficie libre, por lo que solamente

necesitamos resolver el problema de Neumann exterior para el laplaciano, donde toda la superficie de borde del dominio exterior a la nave es conocida, e incluye una frontera al infinito. Como únicamente nos interesa el caso tridimensional (3D), el dominio exterior resulta simplemente conexo. Para el cálculo del potencial optamos por la formulación integral de Morino/Maître [43]. La discretización la hacemos por el método de elementos de borde/paneles, en donde empleamos un método numérico de bajo orden con posterior integración analítica para las matrices de influencia monopolar y dipolar.

En el capítulo 8 vemos un método de elementos de borde para flujos cuasi-2D, extendido para incluir la condición linealizada sobre la superficie libre, en donde la derivada sobre la misma es aproximada con un esquema *contra-corriente* de *quinto orden* para el potencial de ola (cuasi-Dawson).

En el capítulo 9 implementamos la condición de frontera absorbente Discreta No-Local (DNL) mediante el método de elementos finitos, con la cual recuperamos un esquema de segundo orden centrado y así obviamos la técnica *contra-corriente* cuasi Dawson en la superficie libre. El esquema es evaluado en la superficie libre de referencia, mientras que el comportamiento de la solución lejana, tanto en corriente arriba como en corriente abajo, la expresamos mediante la introducción de las *condiciones absorbentes*. Veremos que esta técnica pertenece a una segunda familia de métodos que subsanan el planteamiento hidrodinámico incompleto, en donde para la superficie libre se conserva la simetría numérica natural.

En el capítulo 10 mostramos una implementación por paneles, la cual es una combinación del Método de los Elementos de Borde/paneles (MEB) estándar, de la estrategia general de las condiciones absorbentes Discretas No-locales (DNL), y de la representación del potencial de ola asintótico corriente abajo mediante serie de Fourier finita. El punto de partida será la solución 2D del problema linealizado de flujo potencial con una superficie libre y sin fondo, y admitiremos que su aproximación 3D es representable por una superposición finita de ondas planas. Además supondremos que en el extremo corriente abajo la malla de superficie, orientada hacia el método de paneles, es estructurada en un número finito de bandas transversales, lo que nos facilitará la introducción de una base de Fourier finita. Como emplearemos la condición de borde absorbente DNL otra vez podremos aproximar la derivada en la superficie libre con un esquema *centrado de segundo orden*. Entre los ejemplos numéricos, mostramos la estela de un ferry en un dominio ampliado de aproximadamente quince esloras.

Finalmente, en el capítulo 11 damos el epílogo de la tesis y resumimos los desarrollos más sobresalientes, mencionando posibles trabajos de trabajos de investigación futuros.

# Capítulo 2

## Contexto fluidodinámico

### 2.1 Resumen

Se expone un contexto fluido dinámico para el problema de la resistencia de ola, sobre embarcaciones de superficie. La descripción comprende: i) terminología naval básica, ii) descripción de fenómenos “vorticosos navales”, iii) relaciones entre aerodinámica e hidrodinámica naval: ternas de referencia, descomposiciones de fuerzas hidrodinámicas, y superficies portantes/no portantes, iv) componentes en la resistencia al avance desde el punto de vista del proyecto naval, v) y medición experimental de la resistencia de ola.

### 2.2 Contexto naval

#### 2.2.1 Definiciones

El buque consta de una caja estanca de forma adecuada al propósito de diseño llamada *casco*, sobre el cual se erige una *superestructura* (West, 1967; Mandelli, 1986). La parte

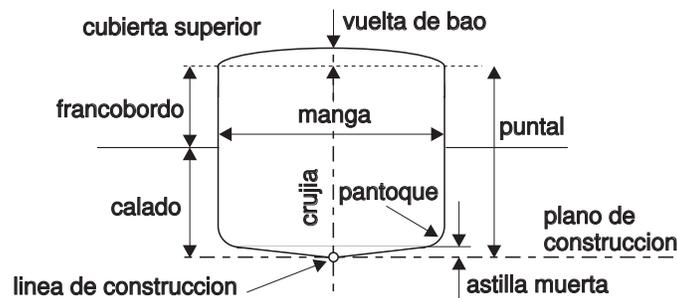


Figura 2.1: Sección transversal del casco de un buque.

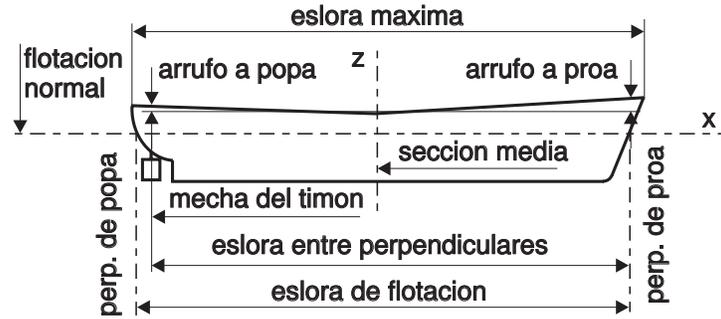


Figura 2.2: Dimensiones de diseño.

del casco que está sumergida es la *carena* y el resto que emerge es la *obra muerta*. Constructivamente el casco tiene un cierto espesor, pero para su representación en cálculo se considera una superficie de diseño, es decir, sin espesor, la cual tiene usualmente un único plano de simetría, longitudinal-vertical, llamado *plano de cruzjía*. En los casos en que la popa y la proa son iguales, también existe otro plano de simetría, transversal-vertical, por ejemplo, en los barcos doble proa y en los “ferry-boats”. El *plano de construcción* es el plano horizontal sobre el cual puede considerarse apoyada la superficie de diseño. Para la representación de la superficie de diseño del casco se emplean básicamente los planos de cruzjía y de construcción. La intersección de ambos planos es la *línea de construcción* o *línea base*. En la figura 2.1 mostramos el significado de los términos: *manga*, *puntal*, *vuelta de bao*, *astilla muerta*, *pantoque* y *francobordo*. El *calado* (*draft*)  $H$  es la distancia vertical desde la quilla hasta la línea de carga de agua, y puede ser referida a la mitad de la nave, o hacia proa, o hacia popa. Nosotros lo entenderemos simplemente como la máxima. La *eslora*  $L$  es, en términos generales, la longitud de la nave. Empero, siendo variable la forma de la proa y de la popa, es necesario considerar varias esloras, ver figura 2.2. La perpendicular de proa es siempre la indicada, la de popa puede variar ligeramente según su forma, pero en el caso de la popa crucero, muy usada actualmente, se la toma en el eje de la mecha del timón. La distancia entre perpendiculares de proa y popa es la *eslora entre perpendiculares*. Todas las dimensiones mostradas son llamadas *dimensiones de diseño* o *dimensiones moldeadas*. El *arrufo* es la curvatura de la cubierta en el sentido de la eslora, es decir, la elevación de la cubierta sobre la horizontal que pasa por su punto más bajo, medida a proa o a popa. La sección transversal del buque en el punto medio de la eslora entre perpendiculares es la *sección media*. La *sección maestra* es la máxima sección transversal y normalmente coincide o es muy próxima a la sección media. La *manga*  $B$  es el ancho máximo. Finalmente, el *desplazamiento*  $W_D$  es el peso en toneladas del volumen de agua  $V_D$  desplazada por la carena, y es igual al peso total del la nave.

### 2.2.2 Coeficientes de forma

En el proyecto naval se usan extensivamente los *coeficientes de forma*, los cuales permiten la comparación entre buques de tamaños muy diferentes. Consideremos la parte sumergida de la nave, es decir, su carena, la cual puede considerarse inscrita en un paralelepípedo cuyas aristas son la eslora  $L$ , la manga  $B$  y el calado  $H$ . El volumen de la carena  $V_D$  será algo menor que el del paralelepípedo, debido al afinamiento de la carena. Entonces, se define como *coeficiente total* o *coeficiente de bloque* al cociente

$$K_b = \frac{\text{volumen de la carena}}{\text{volumen del paralelepípedo}} = \frac{V_D}{LBH}. \quad (2.1)$$

Por otra parte, la línea de flotación encierra una superficie inscrita en el rectángulo de lados  $L$  y  $B$ , de área  $A_f$ . Entonces, se define el *coeficiente de flotación* al cociente

$$K_f = \frac{\text{área de flotación}}{\text{área del rectángulo}} = \frac{A_f}{LB}. \quad (2.2)$$

Asimismo, el volumen de la carena puede considerarse inscrito en un cilindro cuya base es la sección maestra de la carena y su altura es la eslora. Si el área de la sección maestra es  $A_m$ , se define como *coeficiente prismático* o *coeficiente longitudinal* al cociente

$$K_p = \frac{\text{volumen de la carena}}{\text{volumen del cilindro}} = \frac{V_D}{A_m L}. \quad (2.3)$$

Finalmente, la superficie de la sección maestra puede considerarse inscrita en el rectángulo de lados  $B$  y  $H$ . Entonces, se define como *coeficiente de la sección maestra* al cociente

$$K_m = \frac{\text{área de la sección maestra}}{\text{área del rectángulo}} = \frac{V_D}{BH}. \quad (2.4)$$

De esta manera, disponemos de cuatro coeficientes que permiten definir la forma de la carena, su flotación y su sección maestra, por ejemplo, un  $K_b$  pequeño indica una carena fina. Además notemos que se verifica la relación  $K_b = K_p K_m$ . Los valores de proyecto de estos coeficientes dependen del tipo de nave aunque se pueden acotar en los siguientes intervalos:  $0.49 \leq K_b \leq 0.80$ ;  $0.70 \leq K_f \leq 0.74$ ;  $0.64 \leq K_p \leq 0.80$  y  $0.76 \leq K_m \leq 0.99$ .

### 2.2.3 Movimientos y oscilaciones del buque

En el mar, el buque está sometido constantemente a una serie de fuerzas (por ejemplo, debidas a olas, vientos y corrientes marinas), las cuales tratan de alterar su posición de equilibrio. Dicho equilibrio es restablecido por la aparición de fuerzas reactivas, originando así las oscilaciones. Dejemos de lado la traslación causada por la velocidad de avance (constante) del buque. Para el análisis de su movimiento instantáneo, podemos considerar

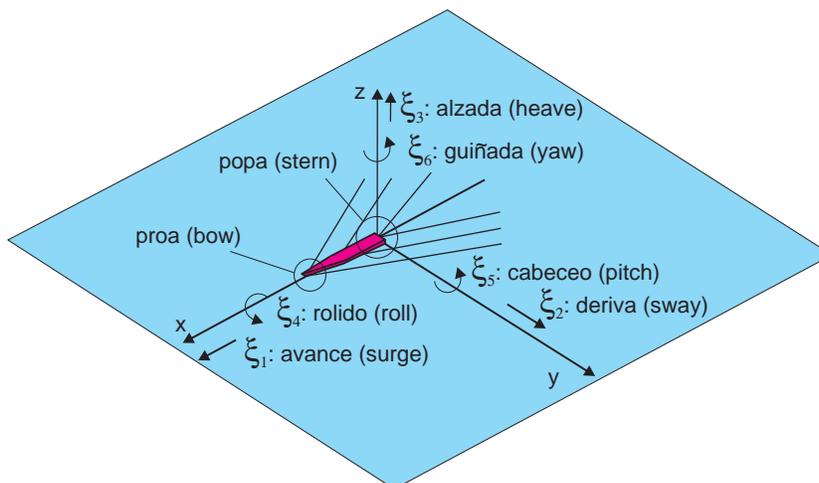


Figura 2.3: Grados de libertad según terna fija a la nave.

al buque como un cuerpo rígido con seis grados de libertad (Newman, 1978; Mandelli, 1986), donde las tres componentes de traslación son: “*avance*”, *deriva* y “*alzada*” (surge, sway and heave), paralelos a la eslora, a la manga y al calado, respectivamente, mientras que las tres componentes de rotación paralelas a los mismos ejes son: *rolido*, *cabeceo* y *guiñada* (roll, pitch and yaw), respectivamente, ver figura 2.3. Las cuatro componentes más importantes son: los de deriva y guiñada, por su influencia en el rumbo del buque, y los de rolido y cabeceo, por su influencia sobre las condiciones marineras del buque y el bienestar de la tripulación.

## 2.3 Vórtices estacionarios en barcos de superficie

Si bien no es nuestro interés un cálculo que tenga en cuenta los vórtices generados por el avance estacionario de un barco, haremos una descripción cualitativa de los mismos (Lugt [42]). Los cascos de las embarcaciones de superficie pueden producir básicamente cuatro tipos notables de vórtices: de popa, de proa, de fondo, y de collar (bilge, stern, bow and necklace vortices), cuya producción e intensidad depende tanto de la geometría de la superficie mojada como de su movimiento relativo al flujo. Los *vórtices de fondo* se forman en la quilla, que es una superficie con bordes agudos, tanto en su zona de proa por el movimiento de avance, como en su zona de popa por un flujo ascendente secundario (Taigori, 1967), donde suelen observarse dos sistemas de vórtices que rotan en sentidos opuestos (ver figura 2.4). Los *vórtices de popa* muestran un cierto parecido con los de fondo de popa, y se forman en las regiones donde la superficie del casco pasa de convexo a cóncavo, Lug [42], donde la formación de vorticidad se debe a la separación del flujo

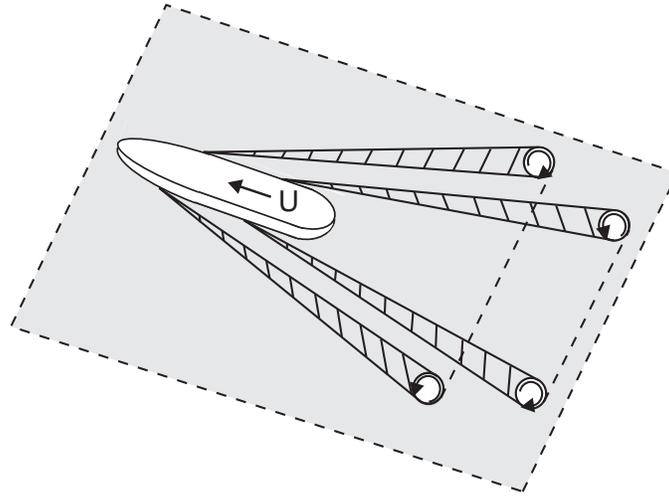


Figura 2.4: Vórtices de fondo (por la quilla).

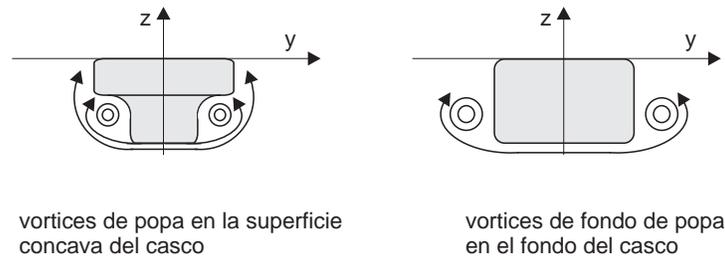


Figura 2.5: Vórtices de popa (por concavidad del casco).

tanto en la quilla como en el fondo de la nave, y su equivalente aerodinámico es el vórtice de fuselaje en los llamados “cuerpos sustentadores” (ver figura 2.5). Los *vórtices de proa* de un barco completo (full ship) son algo semejantes a los “vórtices de collar” (necklace vortices) que se producen en las esquinas de una superficie sólida, pero a diferencia de que la ola de proa es la que determina la forma de superficie libre en esa zona (ver figura 2.6). Los *vórtices encollados* (necklace vortices) se forman detrás de la nave, donde la rotura de ola se produce por generación de una superficie vorticiosa que se propaga en la dirección del flujo. Para altos Froude los vórtices se extienden longitudinalmente bien lejos corriente abajo, mientras que para bajos Froude se produce una rotura de ola, formando un vórtice transversal a los primeros (ver figura 2.7).

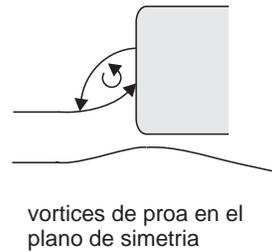


Figura 2.6: Vórtices de proa (por ola de proa).

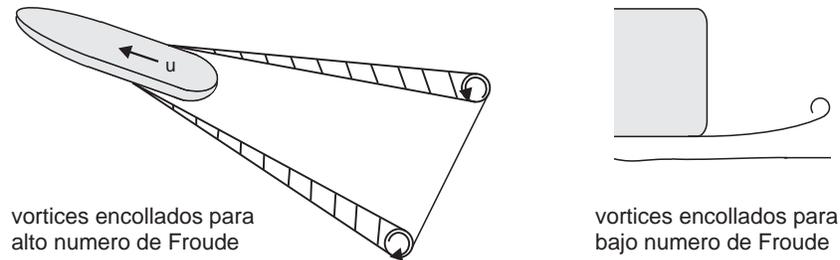


Figura 2.7: Vórtices encollados (por rotura de olas).

## 2.4 Relaciones entre aero/hidro dinámica

Básicamente, podemos categorizar a las relaciones entre aerodinámica e hidrodinámica naval como de dos tipos (Lugt [42]): problemas hidronavales bastante parecidos a sus equivalentes aerodinámicos y problemas hidronavales sin equivalentes aerodinámicos. Muchos de ellos responden al primer tipo, sin embargo, debido al peso relativo diferente en los efectos de flujo, las aproximaciones que son admisibles en unos pueden no serlo en sus contrapartes. Por ejemplo, dependiendo de su localización, la separación de la capa límite puede producir un efecto sensible sobre la sustentación de un ala, mientras que su equivalente detrás de un barco puede ser un efecto secundario para la eficiencia de la propulsión. Por otra parte, los problemas hidronavales sin equivalentes aerodinámicos se relacionan con el hecho de que un barco opera a velocidades relativamente muy bajas sobre una superficie libre de un fluido prácticamente incompresible, a diferencia de un avión que se mueve en el aire a velocidades sub o super sónicas. Aunque ambos comparten ciertas propiedades, por ejemplo, las condiciones de borde en la superficie libre del agua y en la onda de choque del avión supersónico son no lineales y sus posiciones no son conocidas a priori, presentan, empero, efectos distintivos. Por ejemplo, problemas de flujo exclusivamente de interés naval son: formación del patrón de olas en la superficie libre del agua, interacción (propulsión-casco-timón), cavitación, y movimiento de rolido

de la nave (alrededor de su eje longitudinal).

## 2.5 Fuerzas aero/hidro dinámicas

Para el análisis de las fuerzas de naturaleza hidrodinámicas sobre una nave tendremos presente que en general pueden haber tanto superficies sustentadoras como no sustentadoras (o portantes y no portantes). Por ejemplo, en el caso de un velero como el mostrado en la figura 2.8, podemos distinguir los siguientes componentes de la nave: el casco, la quilla, el bulbo, y el timón, en donde quilla es relativamente muy alta. En principio solamente ésta y el timón pueden producir sustentación inducida, cuando la posición relativa de la nave no presenta un plano de simetría que contenga a la velocidad de avance  $\mathbf{u}_s$ . Por este motivo, resumimos a continuación algunas propiedades aero/hidro dinámicas de cada tipo de superficie.

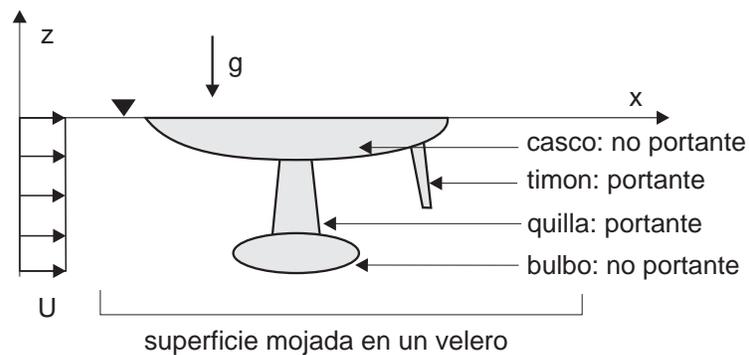


Figura 2.8: Subestructuras principales en un velero y su aptitud para generar sustentación inducida.

### 2.5.1 Ternas según el flujo y según el objeto

Las fuerzas y momentos que actúan sobre un objeto sumergido en un flujo (Abraham, 1967) son referidas usualmente a dos ternas cartesianas con origen común coincidente con el baricentro del objeto: i) una *terna según el flujo*, que es usada para los cálculos hidrodinámicos, donde el eje  $x$  es paralelo al flujo no perturbado, el eje  $z$  antiparalelo al campo gravitatorio  $g$ , y el eje  $y$  es perpendicular a los anteriores, en la secuencia  $(x, y, z)$ , ii) otra *terna según el objeto*, que es usada en cálculos estructurales, donde el eje  $x$  es paralelo al eje longitudinal del objeto (o línea de empuje), y usualmente esta terna coincide con los ejes principales de inercia del objeto.

### 2.5.2 Fuerzas según flujo y según objeto

Como el objeto está inmerso en un flujo real, el movimiento relativo entre objeto y fluido produce tanto un campo de presión normal como un campo de tensiones de corte tangencial a la superficie mojada, cuya suma es la fuerza resultante  $F_R$  sobre el objeto que actúa en un punto llamado *centro de presión*. En general, la fuerza resultante  $F_R$  está inclinada tanto con respecto a la nave como respecto al flujo, y por ello suele descomponerse (ver figura 2.9): i) según la *terna del flujo*, con una fuerza de *sustentación* y otra de *arrastre*, perpendicular y paralela a la velocidad no perturbada, respectivamente (para cálculos hidrodinámicos); ii) según la *terna del objeto*, con una fuerza *normal* y otra *tangencial*, perpendicular y paralela al eje longitudinal del objeto (para cálculos estructurales). Usualmente en lugar del *centro de presión* se emplea el *centro hidrodinámico*, que es el punto donde el momento  $M$  de las fuerzas aero/hidro dinámicas es constante para todo ángulo de ataque  $\alpha$ .

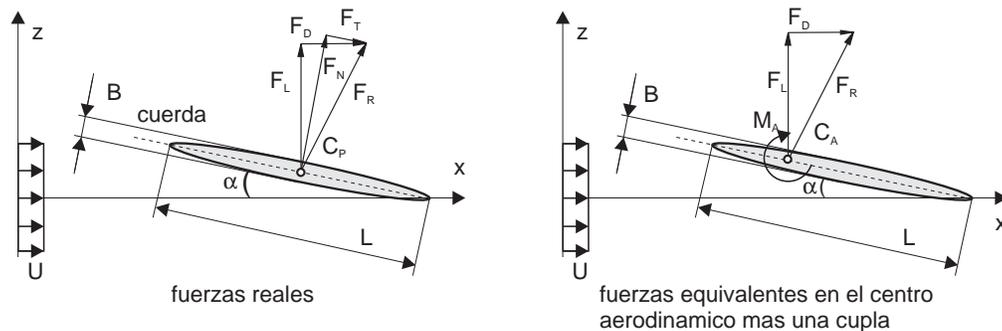


Figura 2.9: Descomposición de la fuerza resultante según, i) terna del flujo (cálculos hidrodinámicos), ii) terna del objeto (cálculos estructurales).

## 2.6 Superficies sustentadoras

### 2.6.1 Coeficientes aero/hidro dinámicos

Las características aero/hidro dinámicas de las superficies portantes (aptas para generar una sustentación apreciable) son resumidas por los coeficientes: de sustentación  $C_L = F_L/q$ , de arrastre  $C_D = F_D/q$ , y de momento  $C_M = M/q$ , y por el ángulo de ataque  $\alpha$ , donde  $q = 0.5\rho_0 u_0^2 S$  es una fuerza de referencia,  $S$  es la superficie mojada, y  $t$  es la longitud de la cuerda. El coeficiente de sustentación  $C_L$  es una función monótona del ángulo de ataque  $\alpha$  desde cero hasta un cierto valor crítico llamado ángulo de *entrada en pérdida* (ver figura 2.10), donde la sustentación cae y el arrastre se incrementa, abruptamente.

### 2.6.2 Arrastre de perfil e inducido

En general, el arrastre para *superficies portantes* se lo divide en: i) *arrastre del perfil*  $D_0$ , ii) y en el *arrastre inducido*  $D_i$ , donde el primero es debido fundamentalmente a la fricción superficial, mientras que el arrastre inducido es un efecto netamente tridimensional del flujo. El *arrastre inducido* es un efecto de orden superior que acompaña a la sustentación inducida, siendo un efecto netamente tridimensional del flujo sobre superficies portantes finitas, y es nulo sólo cuando la *relación de aspecto*  $\lambda = B/L$  es infinita o cuando la sustentación es nula, mientras que en una superficie portante con relación de aspecto finita, la circulación alrededor de la superficie crea intensos vórtices que se desprenden corriente abajo (figura 2.11), y que corresponden a un flujo transversal alrededor de las puntas, desde la zona de mayor presión hacia la de menor presión. Esto causa una *corriente inducida descendente*  $\mathbf{u}_i$  que se suma al flujo no perturbado  $\mathbf{u}_0$ , dando una velocidad efectiva  $\mathbf{u}$  con un ángulo de ataque inducido  $\alpha' \approx (u_i/u_0)$ , que reduce el ángulo de ataque inicial (geométrico). La sustentación  $F_L$  es un poco menor, y el arrastre inducido es aproximadamente  $D_i = F_L \tan \alpha' \approx F_L(u_i/u_0)$ .

## 2.7 Superficies no sustentadoras

En las *superficies no portantes* se observa un *arrastre parásito* suma de dos componentes, un *arrastre pelicular* (o *friccional*) y un *arrastre de forma*. El *arrastre parásito pelicular* es debido a las tensiones de corte en las capas de flujo inmediatamente cercanas al objeto, y siempre es proporcional al área mojada. Mientras que el *arrastre parásito de forma* es debido a la perturbación sobre el flujo creada por el objeto, y es una función de su forma (aguda u obtuso) y posición relativa. De este modo, el arrastre parásito puede variar desde arrastre pelicular puro a un arrastre de forma puro, como lo es en el caso de una placa paralela y perpendicular al flujo, respectivamente. Luego, un cuerpo con formas aero/hidro dinámicas es un objeto con arrastre parásito de forma muy reducido, es decir,

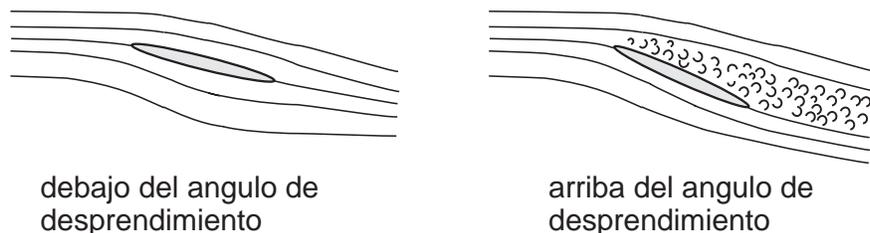


Figura 2.10: Punto de entrada en pérdida para una superficie sustentadora.

que produce muy poca perturbación sobre el flujo incidente.

En los cuerpos con *caras agudas* los coeficientes de arrastre son independientes del número de Reynolds  $Rn$ , y la mayor parte de la resistencia es debida a la diferencia de presión entre las superficies frontal y trasera al flujo. Mientras que en los cuerpos con *caras redondeadas* (por ejemplo, esferas, cilindros y elipsoides), los coeficientes de arrastre dependen sensiblemente del número de Reynolds  $Rn$ , de la rugosidad superficial y el grado de turbulencia del flujo. Por ejemplo, tanto una esfera como un cilindro experimentan una súbdita reducción en el arrastre cuando el número de Reynolds supera un cierto valor crítico. La razón de este comportamiento es que a bajas velocidades, el flujo en la capa límite es marcadamente laminar, pero éste se desprende de la esfera en la misma cara frontal (a unos 83 grados), y una estela amplia se traduce en un arrastre intenso, mientras que a altas velocidades, la capa límite se vuelve turbulenta, llega energía adicional del flujo externo y se separa recién en la cara posterior al flujo (ver figura 2.12).

Finalmente el arrastre total del flujo sobre dos objetos, o dos sub-componentes de un mismo objeto relativamente próximos, es generalmente mayor que la suma de sus componentes individuales. Este incremento (positivo/negativo) es conocido como *arrastre de interferencia*.

## 2.8 Resistencia al avance y potencia de proyecto

En los proyectos navales, la resistencia al avance de una nave de superficie comprende la suma de cuatro resistencias notables, o de primer orden (West, 1967) dadas por: 1) el arrastre de ola, 2) el arrastre pelicular, 3) el arrastre de forma, 4) y el arrastre del viento. Mientras que usualmente se consideran efectos secundarios, o de orden superior, las resistencias causadas por: 5) el arrastre inducido, 6) y el arrastre parásito. A diferencia de

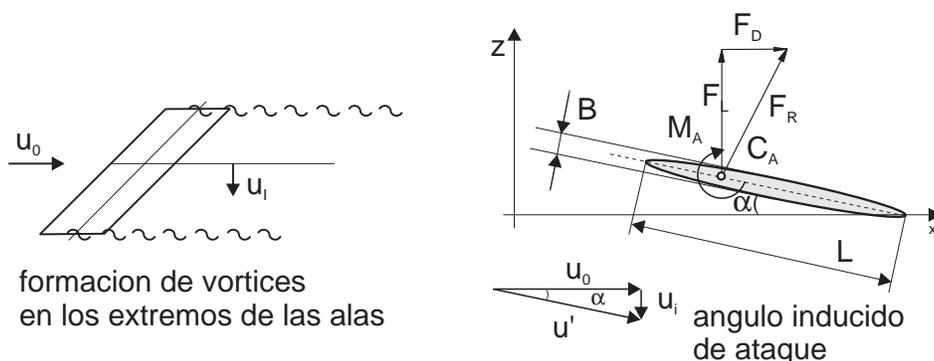


Figura 2.11: Arrastre inducido sobre superficie portante finita.

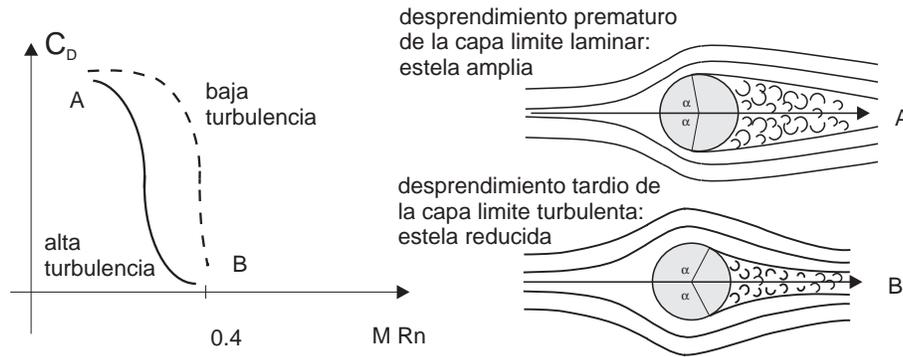


Figura 2.12: Capas límites sobre una esfera: laminar y turbulenta.

los barcos de superficie, para un submarino sumergido sólo son significativas la resistencia de forma y la resistencia pelicular, donde a bajas velocidades éste requiere una potencia propulsiva comparativamente mayor que la de un barco con igual superficie mojada, pero a altas velocidades, cuando la resistencia de ola del barco es alta, el submarino requiere de una potencia considerablemente menor que la del barco de superficie. Pasemos ahora a describir cada una de las resistencias consideradas en el proyecto de las embarcaciones de superficie.

### 2.8.1 Arrastre de ola

El *arrastre de ola* es un efecto de primera importancia, está relacionado con la excitación de un patrón de olas estacionario sobre la superficie libre del agua que se alejan detrás de la nave hacia corriente abajo, la conocida *estela* del barco. Clásicamente sabemos que si la intensidad del campo gravitatorio  $g$  fuera infinita, dicho patrón de olas superficiales desaparecería, y debido a esta dependencia de su existencia con la presencia de un campo gravitatorio, también se las reconoce brevemente como *olas por gravedad* (*gravity waves*). La consecuencia práctica fundamental reside en que la potencia mecánica que este patrón de olas se lleva corriente abajo debe ser suplida en última instancia por la planta motriz de la embarcación (las velas en caso de veleros), ver figura 2.13. La experiencia ingenieril indica que usualmente representa desde un 10 % a un 60 % de la resistencia global al avance en aguas tranquilas. Si bien resulta despreciable a muy bajas velocidades, crece muy rápidamente con la velocidad y para barcos rápidos (por ejemplo fragatas) domina sobre la componente viscosa. El arrastre de ola es además notoriamente muy sensible a la forma y detalles del casco y sus apéndices, por lo que fácilmente es afectada por cambios de diseño relativamente pequeños, y ésta ha sido una razón poderosa para justificar su distinción como componente notable. Además es una función preponderante del número

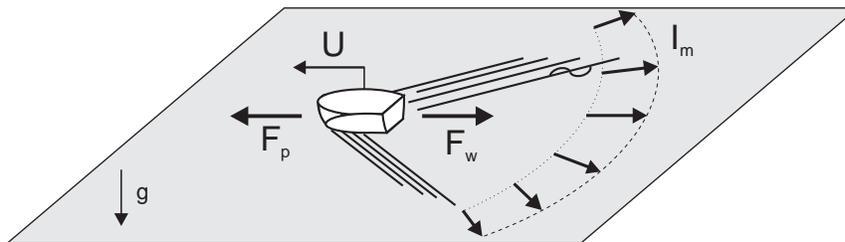


Figura 2.13: Arrastre de ola y su relación con la irradiación de potencia llevada por el patrón de olas hacia corriente abajo de la nave.

de Froude  $Fn = u/\sqrt{gL}$ . Un barco genera al menos dos patrones de ola distintivos, uno en la proa y el otro en la popa. Asimismo surgen otros patrones adicionales causados por abruptos cambios de sección. Estos patrones de olas individuales se combinan para formar un patrón de olas resultante de la nave. Cuando la velocidad de avance cambia se altera la interferencia constructiva/destructiva, que es de naturaleza ondulatoria, por lo que la curva de resistencia en función de la velocidad no es monótona, presentando una serie de máximos y mínimos correspondientes a las interferencias constructivas/destructivas del patrón de olas. El procedimiento de diseño es estimar una velocidad de crucero del barco tal que se ubique en uno de estos mínimos locales. Además Takao (Olgivie, 1977) observa que, i) las olas a lo largo de la nave se amortiguan más rápidamente que cualquier predicción teórica, y es más pronunciado cuanto menor es la velocidad, ii) si se observan dos longitudes de onda a lo largo del casco, entonces el número de Froude es aproximadamente  $Fn = 0.3$ .

Para reducir la resistencia de ola en naves relativamente grandes, se emplea con muy buen éxito la colocación del *bulbo de proa*, el cual genera una *ola secundaria* que cancela parcialmente el sistema de olas primarias generadas por la nave. Un buen diseño debería ser tal que: 1) incremente la velocidad en un 5 %, 2) incremente la capacidad de carga en un 5 % sin incrementar la carga sobre el eje de propulsión, 3) reduzca el consumo de combustible en un 5-10 % sin desmejorar la relación velocidad/capacidad.

Tradicionalmente el arrastre de ola se la ha estimado y reducido en laboratorio mediante ensayos sobre modelos en escala, en donde la teoría indica que en primera aproximación, los patrones de ola del modelo y prototipo resultarán geoméricamente semejantes, si se verifica la igualdad de sus números de Froude, con independencia del número de Reynolds. Como los ensayos experimentales son relativamente lentos y costosos de realizar, se ha propuesto una *interacción de ensayos laboratorio/ numérico*, en donde en la etapa de ensayo en laboratorio sobre los modelos se tiene presente la información estimativa de los ensayos numéricos efectuados sobre computadores digitales.

### 2.8.2 Arrastre pelicular

El *arrastre pelicular* es un efecto de primera importancia, y es una consecuencia única y exclusiva de la viscosidad del fluido. Se lo obtiene por integración de las tensiones tangenciales  $\tau_0 = \tau_0(\mathbf{x})$ , sobre la superficie mojada de la nave  $\Gamma_S$  (Schlichting, 1955),

$$D_f = \int_{\Gamma_S} d\Gamma \tau_0 \sin(\theta) \quad ; \quad (2.5)$$

donde  $\theta$  es el ángulo comprendido entre el versor normal  $\mathbf{n}$  a la superficie y la velocidad del fluido  $\mathbf{u}$ . La experiencia indica que aumenta aproximadamente con el cuadrado de la velocidad. En un buen diseño debería variar gradualmente a lo largo del casco, empero, indeseables fenómenos de separación pueden ocasionar un súbito y notable aumento de su valor.

El arrastre pelicular se manifiesta en el flujo debajo de la nave, por el desarrollo de una capa límite a lo largo del casco, y por la presencia de zonas con flujo separado y de una estela, donde la energía turbulenta es generada y disipada. El incremento de su magnitud se debe principalmente a la rugosidad superficial del casco y sus apéndices, que incluye, entre otras causas, las imperfecciones de forma, las cabezas de los remaches, los cordones de las soldaduras, y las pinturas marinas rugosas. Así, los experimentos han mostrado que el arrastre pelicular en una embarcación puede i) duplicarse en un año si la nave pasa la mayor parte del tiempo en el mar, ii) triplicarse en un verano para una nave atracada en puerto (Landweber). Debido a los tamaños usuales de las embarcaciones, el número de Reynolds es marcadamente muy alto, y el flujo es casi siempre netamente turbulento, excepto por ejemplo, en los veleros.

### 2.8.3 Arrastre de forma (o de presión)

El *arrastre de forma (o de presión)* es un efecto de primera importancia, y es una consecuencia de la perturbación sobre el flujo causada por la nave. Depende sensiblemente de la forma y posición relativa de la nave al flujo, y es posible reducirlo mediante rediseño. Su valor está dado por la integral de la presión sobre la superficie mojada de la nave  $\Gamma_s$ ,

$$D_p = \int_{\Gamma_s} d\Gamma p \cos(\theta) \quad ; \quad (2.6)$$

donde  $p$  es la presión sobre la superficie mojada  $\Gamma_s$ . Cuando el número de Reynolds  $Rn$  es elevado, el arrastre de forma  $D_p$  resulta proporcional al cuadrado de la rapidez no perturbada  $U^2$ , porque la diferencia de presión sobre las superficie del cuerpo son proporcionales a  $\rho U^2$ . Finalmente, en una *nave ancha* avanzando en forma paralela al flujo medio, el *arrastre de forma* es de mayor importancia relativa, mientras que en una *nave delgada* lo es el *arrastre pelicular*.

### 2.8.4 Arrastre del viento

El *arrastre del viento*  $R_v$  es ocasionado por la presión que ejerce el viento sobre la porción emergida del casco y su superestructura, y se la puede estimar con  $R_v = 0.002B^2u^2$ , donde  $B$  es la eslora, y  $u$  la velocidad relativa de la nave al viento. Usualmente es menor al 3 % de la resistencia total, pero en condiciones de tormenta puede ser 10 veces superior. Por ejemplo, un barco a 10 nudos la resistencia del viento es apenas un 3 % de su resistencia total, pero a 20 nudos trepa a un 23 %. En la figura 2.14 mostramos cualitativamente

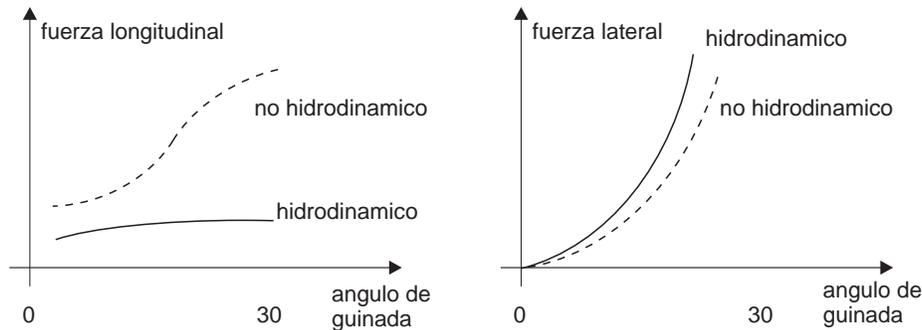


Figura 2.14: Resistencia del viento sobre una nave.

el comportamiento del coeficiente de resistencia al viento  $C_w = F_w/qS$ , donde  $F_w$  es la resistencia del viento (transversal y longitudinal de la nave),  $q = 0.5\rho_a u^2$  es la presión dinámica del aire,  $S$  es la máxima área transversal equivalente de la nave. Para nuestra hipótesis de mar tranquilo el arrastre del viento resulta despreciable.

### 2.8.5 Arrastre parásito

El *arrastre parásito* es otro efecto secundario, y es una consecuencia de los efectos de interferencia entre los diferentes componentes de flujo y/o de la nave, es decir, un efecto de acoplamiento entre sub-partes. Consideremos brevemente el caso de interferencia entre los efectos del movimiento de la nave y los componentes de flujo. Las olas de superficie por gravedad causadas por objetos móviles, se producen siempre que tengamos: i) dos fluidos uniformes pero con densidades diferentes, tales que definan una interfase; ii) una perturbación viajera en la inmediata vecindad de la superficie libre, ya sea emergida, flotando, o sumergida, por ejemplo, una aeronave en vuelo rasante, un barco o submarino (sumergido) en movimiento; iii) y la presencia de un campo gravitatorio. Los fenómenos que intervienen en cada caso son muy complicados en sus componentes y resultan en general acoplados.

Por ejemplo, consideremos el caso de un aeroplano volando muy cerca sobre la superficie del mar. Para volar, las alas del avión generan una fuerza sustentadora dirigida hacia arriba, incrementando la presión debajo de ellas, y como están muy cerca de la superficie libre, ese incremento de presión afecta el campo de la presión atmosférica sobre la misma, generándose también un patrón de olas, a pesar de que el avión no tiene un contacto directo con la superficie del agua. Algo parecido sucede en el caso del submarino. En los tres casos, las perturbaciones móviles experimentan una fuerza de arrastre debido al patrón de olas emitido por ellas, por lo que deben suministrar una potencia adicional para compensarla, aunque, claro está, las magnitudes e importancia relativa son muy diferentes en cada caso. En las naves de superficie se puede presentar el arrastre parásito por interferencia entre algunos componentes sumergidos de la nave, por ejemplo en el caso de los veleros, la interferencia entre la quilla y el timón, donde ambas en general son superficies sustentadoras. Otra posibilidad es la presencia de otras naves relativamente cercanas. En lo que sigue despreciaremos este potencial efecto.

## 2.9 Fuerza generalizada de presión

En cálculo hidronaval suele considerarse (Newman, 1977) una *fuerza generalizada de presión*  $\mathbf{F}$  con seis componentes, tres de traslación ( $F_1, F_2, F_3$ ), y tres de momento según una terna local ( $F_4, F_5, F_6$ ), dada por

$$F_i = \int_{\Gamma} d\Gamma p n_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, 6 ; \quad (2.7)$$

con  $(n_1, n_2, n_3) = \hat{\mathbf{n}}$ , y  $(n_4, n_5, n_6) = \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{n}}$ ; donde  $\Gamma$  es la superficie mojada de la nave,  $p$  es la presión,  $\hat{\mathbf{n}}$  es el versor normal de la superficie mojada de la nave dirigida hacia el agua, y  $\mathbf{x}$  es el vector posición. La presión  $p$  la obtenemos de la ecuación de Bernoulli, y puede ser separada en una componente hidrostática y en otra hidrodinámica. La componente hidrostática puede analizarse sustituyendo  $p = -g\rho z$ , donde las únicas componentes no nulas son  $i = 3, 4, 5$  (Newman, 1977). Mientras que la componente hidrodinámica la obtenemos introduciendo el campo de velocidades  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  en la ecuación de Bernoulli, donde debido a la usual simetría de la nave con respecto al plano medio vertical longitudinal (plano  $y = 0$ ), las únicas contribuciones no nulas son para  $i = 1, 3, 5$ . La componente  $F_3$  de *alzada* (*heave*) y la  $F_5$  de *cabeceo* (*pitch*) son compensadas por el *asentamiento y el equilibrado* estacionario de la nave (*sinkage and trim*), las cuales modifican la posición de equilibrio hidrostático de la nave. Mientras que la componente estacionaria  $F_1$  es la *resistencia global al avance*, que es compensada por la propulsión de la nave.

## 2.10 Diseño hidrodinámico del casco y apéndices

Debido a la muy alta sensibilidad que exhibe el arrastre de ola, con la forma y detalles del casco y sus apéndices, aún con cambios de diseño relativamente pequeños, una de las tareas básicas de proyecto en ingeniería naval es el diseño hidrodinámico del casco y sus apéndices, en donde se adopta la forma hidrodinámica de la superficie en contacto con el agua más apropiada para las condiciones de flujo medias de proyecto. Por *apéndices* entendemos todos aquellos elementos adicionales al casco inmersos en el flujo, como por ejemplo, la quilla, el bulbo y el timón en el caso de un velero de competición. Por *forma hidrodinámica* entendemos una superficie en la cual no se produce separación del flujo incidente, y aunque en principio es una función del número de Reynolds  $Rn$  porque la separación a bajos Reynolds podría desaparecer a altos Reynolds, aquí la asimilamos para condiciones medias de proyecto naval. La calidad de la forma hidrodinámica más apropiada la entendemos en relación a su sensible efecto sobre la resistencia al avance que experimentará la embarcación. La *resistencia global al avance* en el caso de los barcos mercantes determina en una gran proporción la potencia de la planta motriz de la nave y por ende la tasa de consumo del combustible, uno de los factores de primera importancia en la economía del transporte naviero comercial de cargas. Mientras en el caso de los veleros la potencia para contrarrestarla que pueden entregar las velas bajo condiciones nominales de viento resulta prontamente acotada. Por otra parte, la experiencia ingenieril indica que esta resistencia global al avance es determinada fundamentalmente por fuerzas de naturaleza hidrodinámica, las cuales dependen sensiblemente de la forma elegida para la superficie mojada del casco y sus apéndices. En cualquier caso, la disminución de su magnitud en cualquiera de sus componentes constituye una de las tareas básicas del proyecto naval. Sin embargo dicha disminución resulta una tarea complicada principalmente por i) las restricciones impuestas por necesidades prácticas tales como dimensiones reglamentarias, peso bruto y peso neto, costos de construcción y tecnología industrial disponible por la empresa constructora; ii) las pautas de diseño recomendadas por tipo de uso de la nave, estabilidad y maniobrabilidad, por ejemplo, nave mercante, rompehielo, fragata o velero; iii) y la amplia variedad en las condiciones meteorológicas, tales como vientos, mareas y tempestades marítimas, las cuales exigen un substancial aumento de la potencia motriz demandada (cuando ésta exista), comparada con la demandada en mar calmo. En principio, una menor resistencia global al avance se alcanzaría mediante el diseño del casco y sus apéndices para el mejor rendimiento promedio en el rango de operaciones consideradas en el proyecto, pero esto usualmente no es posible debido a i) la dificultad de cuantificar todas las variables y parámetros involucrados, ii) los reducidos plazos de tiempo impuestos en las licitaciones industriales. Para sortear esta dificultad, el

procedimiento práctico para embarcaciones autopropulsadas es considerar separadamente la resistencia en mar tranquilo y en mar agitado. Donde la resistencia en mar tranquilo nos representa una cota inferior en la potencia requerida, y además permite establecer una velocidad de crucero recomendada. Luego, el efecto del mar agitado se lo aproxima mediante una resistencia de olas *agregada*. Un procedimiento parecido se emplea en veleros, pero claro está se considera una velocidad nominal de viento con mar tranquilo. De lo anterior justificamos nuestra restricción al cálculo de la fuerza global en mar tranquilo.

## 2.11 Medición experimental de la resistencia de ola

### 2.11.1 Resistencia residual

En ingeniería marina, es usual combinar la *resistencia de ola* y la *resistencia de presión* en un único término, llamado *resistencia residual*, el cual se supone aproximadamente como una función del número de Reynolds. La combinación no es legítima pero es práctica porque frecuentemente la resistencia de forma es un 2-3 % de la resistencia total, de modo que la resistencia pelicular es la única a considerar como función del Reynolds. Entonces, usando los coeficientes de fricción medidos sobre un modelo en escala reducida, y calculando el área  $A$  de su superficie mojada, podemos obtener la resistencia pelicular. Por ejemplo, Shoenherr da la siguiente fórmula aproximada (West, 1967), para la resistencia pelicular  $F_f$  de una placa suave,  $F_f = 0.5c_f c_\mu \rho A u^2$ , donde  $\rho, u$  son la densidad y la velocidad del flujo, respectivamente,  $c_f$  es un coeficiente adimensional función del número de Reynolds  $c_f = c_f(Rn)$ ,  $c_\mu$  es un coeficiente de rugosidad superficial. El área de la superficie mojada  $A$  puede hallarse por integración o mediante la fórmula aproximada de Taylor  $A = K\sqrt{W_D L}$ , donde  $15 \leq K \leq 16$  es un coeficiente adimensional,  $W_D$  es el desplazamiento del barco [tn],  $L$  es la eslora a nivel del agua. De este modo la función primaria de un modelo de ensayo, es determinar la resistencia residual, donde el modelo es ensayado al mismo Froude pero no al mismo Reynolds del prototipo, y la resistencia pelicular del modelo es obtenida por cálculo y se la resta de la resistencia total (medida experimentalmente), para obtener la resistencia residual, y ésta es graficada en forma adimensional en función del Froude.

Analizemos con un mayor nivel de detalle este procedimiento. En el procedimiento experimental clásico (Wehausen, 1973) consideremos una embarcación avanzando en un mar calmo, donde despreciamos la presión de vapor y la tensión superficial. En tales condiciones, se define la *resistencia global al avance* como el cociente

$$R_G = W/U \quad ; \quad (2.8)$$

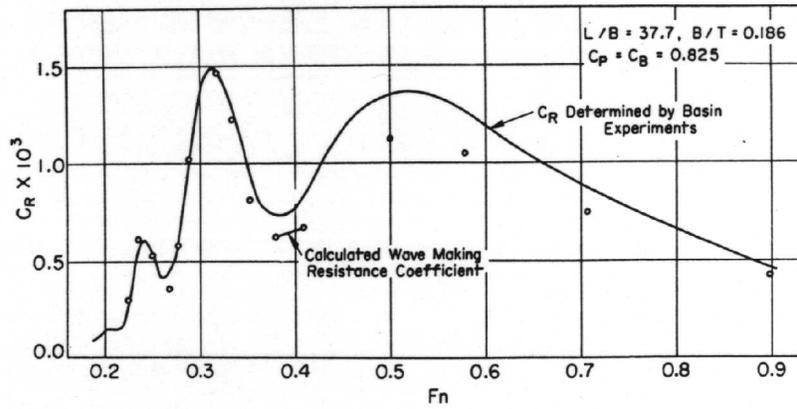


Figura 2.15: Coeficiente de resistencia para una placa plana [Wehausen, 1973 (fig.23)].

donde  $U$  es su rapidez de avance constante, y  $W$  es la potencia que debe entregar la planta motriz de la nave para poder mantener la velocidad estacionaria. Supondremos que la nave pertenece a una cierta *familia* de barcos geoméricamente semejantes entre si, y en principio la resistencia global al avance suponemos que es una función  $R_G(L, U, g, \nu, \rho)$ , donde  $L$  es la eslora,  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $\rho, \nu$  son la densidad y la viscosidad cinemática del agua, respectivamente. Podemos reescribirla en forma adimensional mediante el *coeficiente de resistencia global al avance*

$$C_G = \frac{R_G}{\rho U^2 L^2 / 2} = f\left(\frac{U}{\sqrt{gL}}, \frac{UL}{\nu}\right) = f(Fn, Rn) \quad ; \quad (2.9)$$

donde  $Fn = U/\sqrt{gL}$  es el número de Froude, y  $Rn = UL/\nu$  es el número de Reynolds. En la práctica usualmente tenemos que  $0.1 < Fn < 0.5$ , mientras que para un barco mercante típico  $Fn < 0.3$ . Por otra parte el valor de  $Rn$  depende del tamaño, por ejemplo, en los ensayos con modelos: i) de 5 pies  $1 \times 10^6 \leq Rn \leq 2 \times 10^6$ , ii) de 20 pies  $8 \times 10^6 \leq Rn \leq 20 \times 10^6$ , iii) de 500 pies  $1 \times 10^9 \leq Rn \leq 2 \times 10^9$ . Podemos ver que  $C_G$  representa una superficie en el plano  $(Fn, Rn)$  que será distintiva para la familia de barcos elegida. Ahora supongamos que los experimentos son realizados con un único modelo, en donde prácticamente solo podremos modificar el intervalo de velocidades  $U$  en un cierto rango. Siendo

$$Fn = \frac{1}{\sqrt{gL}} U = \alpha U \quad \rightarrow \quad U = \alpha^{-1} Fn \quad ; \quad (2.10)$$

$$Rn = \frac{L}{\nu} U = \frac{L}{\nu} \alpha^{-1} Fn = \frac{L}{\nu} \sqrt{gL} Fn = \frac{g^{1/2} L^{3/2}}{\nu} Fn = \Lambda Fn \quad . \quad (2.11)$$

En tal caso nos estaremos moviendo en el plano  $(Fn, Rn)$  a lo largo de la recta  $Rn = \Lambda Fn$ , con  $\Lambda = g^{1/2} L^{3/2} / \nu$ , siendo  $g, \nu$  prácticamente constantes. Los ensayos son tales que la eslora del modelo  $L_m$  es mucho menor que la del prototipo  $L_p$ , por lo que será  $\Lambda_m \ll \Lambda_p$ , y los

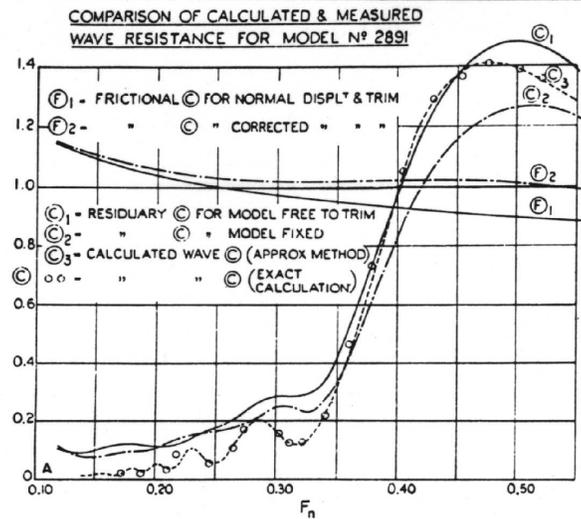


Figura 2.16: Coeficiente de resistencia para modelo Wigley 1805 A (equiv. modelo 2891) [Wehausen, 1973 (fig.20)].

valores sobre el modelo estarían relativamente lejos de los correspondientes al prototipo. En tal caso, los resultados sobre el modelo no nos podrían dar información confiable acerca del prototipo. Este problema fue superado en su momento a partir de la hoy llamada *suposición de Froude*, la cual fue sugerida por observaciones experimentales, y postula que si efectuamos los ensayos con modelos de diferente tamaño, pero pertenecientes a una misma familia de cascos geoméricamente semejantes, y tales que el número  $U/\sqrt{gL}$  se mantenga constante en los ensayos, entonces los patrones de olas observados si serán semejantes. Esta suposición equivale a descomponer el coeficiente de resistencia global  $C_G$  como la suma

$$C_G(Fn, Rn) = C_R(Fn) + C_F(Rn) \quad ; \quad (2.12)$$

por lo que en el plano  $(C_G, Rn)$ , las curvas con  $Fn = cte$  estarán todas a una misma distancia entre si, y que las curvas  $\Lambda = cte$  son todas congruentes, esto es, una de ellas se obtiene a partir de la siguiente mediante un deslizamiento a lo largo de las curvas de  $Fn = cte$ . Por esto los ensayos sobre modelos se hacen para igual Froude y no para igual Reynolds, relativamente más difíciles de realizar. Luego, el coeficiente de resistencia global del prototipo se lo puede estimar con  $(C_G - C_F)_p = (C_G - C_F)_m$ . Si ahora imaginamos descomponer  $C_G$  en dos componentes obtenidas por integración sobre el casco mojado de las componentes normal  $n$  y tangencial  $t$  de la tensión superficial, tendremos  $C_G(Fn, Rn) = C_n(Fn, Rn) + C_t(Fn, Rn)$ , y si admitimos que la componente tangencial está determinada primordialmente por la viscosidad del agua, y que la componente nor-

mal lo está por el efecto de la gravedad (como resultado del patrón de olas), entonces  $C_n(Fn, Rn) \approx C_n(Fn)$  y  $C_t(Fn, Rn) \approx C_t(Rn)$ . A continuación, la fuerza tangencial la podemos aproximar por la fuerza tangencial sobre una placa plana de igual longitud  $L$  y área mojada  $S$  igual a la del casco mojado

$$C_F(Rn) = \frac{R(\text{placa plana})}{\rho U^2 S/2} \quad . \quad (2.13)$$

Luego, el *coeficiente de resistencia residual* que combina la resistencia de ola y de presión en único término es definido como  $C_r(Fn) = C_G - C_F$ , donde suponemos aproximadamente que es sólo una función del número de Froude. Muchas críticas y refinamiento se ha hecho y se puede hacer con respecto a estas definiciones, pero ello escapa a nuestros objetivos, remitiendo al lector interesado al trabajo de Wehausen para más detalles.

### 2.11.2 Gráficas experimentales

#### Ensayos con modelo fijo o con trimado libre

Notemos que en las gráficas experimentales de la resistencia de ola en función del Froude se especifica si el modelo ensayado es i) mantenido en posición fija (model fixed), ii) o si es “libre para trimar” (*model free to trim*), esto es, se le permite rotar libremente alrededor de un eje horizontal transversal al casco, de modo de recuperar su estabilidad longitudinal. Otro tipo de ensayos posible es con “trimado y hundimiento” (*sinkage and trim*), donde además de la estabilidad longitudinal (trimado), se tiene en cuenta el hundimiento relativo cuando se lo carga (sinkage).

#### Coeficiente circular de Froude

Además del coeficiente de resistencia residual, en las gráficas experimentales figuran otras definiciones. Una de ellas es el denominado *Coeficiente Circular de Froude*  $C_w$ , frecuentemente usado en Gran Bretaña, y definido como

$$C_w = \frac{R}{R_0} \quad ; \quad R_0 = \frac{\pi}{250} \rho \Omega_{eq} U^2 \quad ; \quad (2.14)$$

donde  $\Omega_{eq} = V^{2/3}$  es una sección equivalente obtenida del volumen total de la porción sumergida del casco (usualmente sin apéndices),  $\rho$  es la densidad del agua, y  $U$  es la rapidez no perturbada.

#### Placa plana vertical

Esta puede verse como la validación experimental natural de hacer para las teorías del barco delgado. Por ejemplo, las experiencias de Weinblum/Kendrick/Todd (Wehausen,

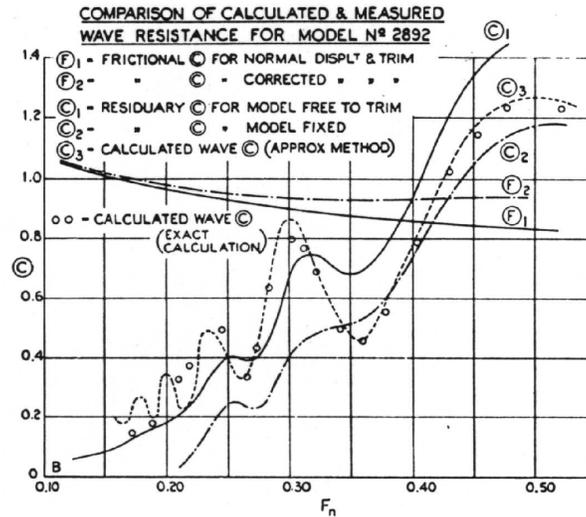


Figura 2.17: Coeficiente de resistencia para modelo Wigley 2892 [Wehausen, 1973 (fig.20)].

1973), para una placa con  $B/L = 0.0265$ ,  $B/H = 0.186$ ,  $K_b = K_p = 0.825$ , donde  $B$ ,  $L$  son la manga y la eslora, respectivamente,  $K_b$ ,  $K_p$  son los coeficientes de bloque y prismáticos, respectivamente, el acuerdo entre teoría y experimento resulta remarcablemente bueno (figura 2.15).

### Cascos de la serie Wigley y de la serie 60

Los cascos de la serie Wigley son “cascos matemáticos”, en el sentido de que no se usan industrialmente, sólo en ensayos de laboratorio de validación y ajuste de los métodos de cálculo. Sus superficies están dadas por expresiones analíticas relativamente simples, de la forma

$$\begin{cases} y = \pm 0.32[1 + \cos(\pi x/8)][1 + \cos(5\pi z/8)] \\ y = \pm 1.33 \cos(\pi x/16) \\ y = \pm b(1 - z^2) \cos(\pi x/16) \end{cases} \quad (2.15)$$

Un casco de la serie Wigley es *muy estilizado* tanto en calado como en manga, por lo que producirá una perturbación muy suave en el flujo, y lo podemos considerar como un “casco tipo Michell” (Stoker, 1957). En las figuras 2.16 y 2.17, mostramos los coeficientes de resistencia (pelicular, residual, y de ola) para los modelos 1850 A  $\equiv$  Modelo 2891, y Modelo 2892, obtenidos por Shearer, tanto en posición fija (model fixed), como libre para “trimar” (free to trim). Se pueden observar la presencia de máximos y mínimos secundarios relativos en la componente de ola, los cuales son una consecuencia de los efectos de interferencia constructiva y destructiva entre los patrones de olas generados en la popa y en la proa del modelo. A diferencia de la serie Wigley, los cascos de la *Serie 60*

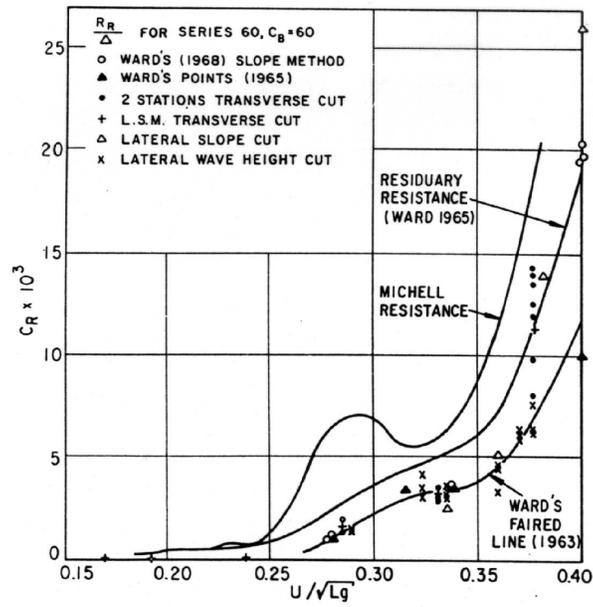


Figura 2.18: Coeficiente de resistencia para cascos de la Serie 60 ( $C_B = 0.60$ ) [Wehausen, 1973 (fig.9)].

si son usados industrialmente. Por ejemplo, la curva de arrastre para un casco de dicha serie con coeficiente de bloque  $K_b = 0.60$  y prismático  $K_p = 0.614$  es mostrado en la figura 2.18.

# Capítulo 3

## El problema de la resistencia de ola

### 3.1 Delimitación del problema

Se expone una delimitación del problema a considerar donde i) para la descripción del flujo elegimos la estrategia computacional por interacción viscosa/invíscida, ii) analizamos las hipótesis necesarias para poder elegir un modelo potencial, iii) formulamos las ecuaciones de flujo potencial con una superficie libre en el continuo, iv) justificamos por qué el sistema de ecuaciones está incompletamente formulado, v) mencionamos dos estrategias de resolución, una clásica en el sentido de introducir una asimetría en el modelo numérico, mediante técnicas de derivada lateral no centradas, y la otra es una alternativa mediante condiciones absorbentes, vi) finalmente introducimos el *ensayo de altura de ola constante*.

Para delimitar el problema de la resistencia de ola consideremos el flujo alrededor de una embarcación en aguas tranquilas, en donde supondremos que el mar se extiende ilimitadamente en su superficie libre, es infinitamente profundo y posee propiedades físicas uniformes. La embarcación avanza con rapidez uniforme en el tiempo, y en principio, en línea recta. Aún en tal idealización podemos identificar los siguientes fenómenos de flujo: un patrón de olas resultante generado por la nave, resistencia inducida, corrientes en remolino y estela detrás de la nave, usualmente rotura de olas, efectos de cavitación, a veces formación de espuma, y los efectos de la tensión superficial. Todos estos fenómenos se encuentran acoplados entre si, y son parcialmente gobernados por leyes físicas diferentes, con distintas escalas de tiempo y longitud. Para su predicción se requieren modelos matemáticos que cubran uno o más de ellos. Empero para el tratamiento de la componente de ola omitimos los acoplamientos causados por:

1) los efectos de la resistencia inducida, aunque una aproximación de su efecto sobre la superficie libre es factible mediante una adaptación de los procedimientos usados en aeronáutica. Estos efectos se presentarán en casos de maniobra particulares, por ejemplo,

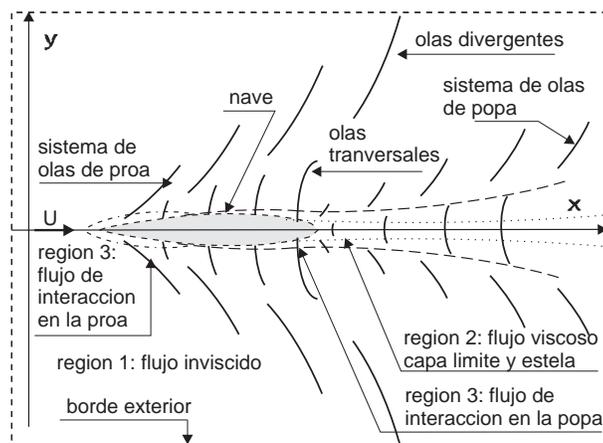


Figura 3.1: Patrones olas y regiones para la interacción viscosa / inviscida.

en el caso de veleros cuando los ángulos de deriva  $\alpha$  y de escora  $\beta$  son ambos no nulos;

- 2) las corrientes en remolino causadas por la propulsión, que afectan tanto la predicción de las olas en la zona del yugo de popa, como el equilibrado de la nave;
- 3) los efectos de la cavitación en el agua. Recordemos que la cavitación es la formación de burbujas de vapor en el interior de un líquido cuando se producen fuertes reducciones en la presión (a temperatura constante). Su efecto más pernicioso es la *destrucción* de la paredes en contacto con el flujo, debida a picos de presión, por lo que se le presta especial atención en la industria;
- 4) los efectos de la rotura de olas, el cual muestra poca incidencia sobre el comportamiento global del flujo, y dista todavía de una descripción física y matemática satisfactoria;
- 5) los efectos de las formación de burbujas por las mismas razones del punto anterior, aunque de interés para su detección electrónica o para un mejor tratamiento de la intersección de la superficie libre con la del casco;
- 6) finalmente los efectos de la tensión superficial, por ser insignificantes para naves a escala completa.

Como resultado de las simplificaciones introducidas, el problema delimitado en principio conduce a un problema de flujo viscoso con densidad uniforme, debajo de una embarcación que avanza generando un patrón de olas hacia corriente abajo, sobre una superficie libre de relativa gran extensión comparada con la eslora de la nave, en condiciones estacionarias en el tiempo, sin acoplamientos significativos con los otros fenómenos de flujo.

## 3.2 Interacción viscosa/invíscida

En fluidodinámica computacional está bien establecido la posibilidad de emplear diferentes niveles dinámicos en la aproximación de la descripción de un flujo (Hirsch, 1992). Para ciertos casos de flujo particulares se puede emplear el nivel dinámico de aproximación dado por la *interacción viscosa / invíscida*, que en opinión de Hirsch es lo más notable en mecánica de fluidos desde las ecuaciones de Navier Stokes. La descripción por *interacción viscosa / invíscida* se basa en los fenómenos experimentales observados cuando el número de Reynolds es suficientemente alto, donde se puede concebir al flujo como *dividido* en regiones, con un grado de acoplamiento entre ellas variable según el problema y las condiciones de flujo, donde el flujo en cada región muestra un cierto comportamiento aparente global distintivo. Así, en el problema de la resistencia de ola, podemos distinguir tres regiones notables de flujo (figura 3.1) i) región 1: es la zona de flujo *externa* de naturaleza *aparentemente invíscida* y comprende una gran porción relativa del flujo; ii) región 2: es la zona de flujo *interno* de naturaleza *netamente viscosa* (disipativa), comprende una capa límite y una estela vorticiosa desprendida, de tamaño relativamente pequeño, iii) región 3: es la zona de flujo *de acoplamiento* entre las dos anteriores.

La principal interacción entre los flujos de cada zona proviene de los efectos de desplazamiento de las líneas de corriente que conduce a cuerpos equivalentes más anchos que los originales y que en general, terminan por ser semi infinitos. Esto conlleva un cambio en la distribución de presiones sobre el cuerpo y el proceso se realimenta. Si bien la aplicación tradicional de estos métodos se limita a situaciones donde la interacción es *débil*, esto es, cuando el flujo es no separado y los gradientes de presión normales a la superficie mojada son débiles, desarrollos posteriores han permitido su extensión a problemas donde la interacción es *fuerte*. La subregión invíscida está delimitada en parte por la capa límite, cuyo espesor es desconocido al inicio porque el cómputo viscoso / invíscido tiene que empezar con el cómputo del campo de presión. Al principio la frontera del subflujo invíscido se toma directamente sobre las paredes sólidas, lo cual resulta razonablemente justificable en base al espesor delgado de la capa límite, luego se resuelven las ecuaciones de la capa límite, resultando un primer espesor, y se empieza a iterar.

Dos regiones con un acoplamiento notable son los flujos en la *zona de proa* y en la *zona de popa*, de naturaleza muy compleja, donde poco es lo que se conoce. Por ejemplo, recientes experimentos referidos a los efectos de escala en los patrones de olas cercanos sugieren una dependencia con el número de Reynolds  $Rn$  en el patrón de olas de proa, tanto en amplitud como en el ángulo de divergencia (Tahara/Stern/Rosen, 1992). En lo que sigue no las tendremos en cuenta porque requieren de un estudio muy particular.

Desde un punto de vista matemático la interacción viscosa / invíscida puede asimi-

larse a un problema de *expansiones singulares*. Recordemos que si una cierta ecuación diferencial y sus condiciones de borde dependen de un parámetro  $\varepsilon$ , el problema de perturbación es en general definido como el problema de hallar su solución para pequeños valores de  $\varepsilon$  a partir de la solución conocida para  $\varepsilon = 0$ . En un problema de perturbación *regular*, el *orden* de la ecuación y el *número* de las condiciones de borde permanecen *fijas* durante el procedimiento. En cambio, en un problema de perturbación *singular*, el orden de la ecuación *disminuye* para  $\varepsilon = 0$ , y consecuentemente algunas de las condiciones de borde tienen que ser eliminadas. Ahora bien, en el caso de un flujo viscoso incompresible se distinguen dos casos límites según que el número de Reynolds sea muy bajo o muy alto. Para bajos números de Reynolds, las perturbaciones singulares de primer orden de las ecuaciones de Navier-Stokes en las regiones de flujo exterior/interior corresponden a los flujos de Oseen/Stokes, respectivamente, donde por exterior/interior entendemos las zonas de flujo lejana/cercana a la pared sólida, respectivamente. En cambio, para altos números de Reynolds, las perturbaciones singulares de primer orden de las ecuaciones de Navier-Stokes en las regiones de flujo exterior/interior conducen a las ecuaciones de flujo invíscido y de la capa límite, respectivamente. Las primeras resultan de despreciar los términos viscosos, y al hacerlo baja el orden de las ecuaciones en un grado, por lo que una de las condiciones de borde tiene que ser omitida. Mientras que las segundas son del mismo orden que las de Navier-Stokes, por lo que el número de condiciones de borde se conserva.

Así, para números de Reynolds suficientemente altos los efectos viscosos sólo prevalecen dentro de la capa límite de espesor variable  $\delta$ , la cual empalma el campo de velocidad en el flujo con la condición de adherencia en la pared, mientras que el flujo exterior a esa capa es prácticamente invíscido. A primer orden en  $\delta$  la presión dentro de la capa límite es igual a la del flujo exterior, y el flujo exterior invíscido no es afectado apreciablemente por los efectos viscosos (Schmitt/Schneider, 1989). Además en el caso límite en que  $Rn \rightarrow \infty$  la región de recirculación degenera en una capa vorticiosa que se origina en los bordes agudos del objeto y es una superficie libre a través de la cual la presión es continua.

### 3.3 Exigencias en el mallado

Por otra parte, si bien no es completamente lícito desacoplar los efectos viscosos de los efectos del patrón de olas, ambos fenómenos por separado muestran escalas de tiempo y de longitud muy diferentes entre sí, por lo que imponen exigencias muy disímiles en los métodos numéricos a emplear i) el flujo viscoso es un fenómeno con escalas de longitud relativamente pequeñas, y exige una buena resolución en los detalles del casco y

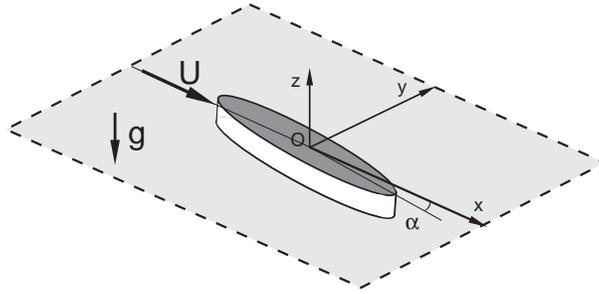


Figura 3.2: Sistema de referencia cartesiano.

sus apéndices, a fin de lograr una aceptable aproximación para los muy altos gradientes cercanos a los mismos; ii) en contraposición, el patrón de olas es un fenómeno de escalas de longitud relativamente grandes, comparables con la eslora de la nave, y exige una extensión relativamente grande para porción de la superficie libre a considerar. Por estas dos razones, para que una malla 3D orientada a un método numérico basado en una formulación viscosa sea ingenierilmente aceptable para el problema delimitado, en principio debe ser i) relativamente refinada en las cercanías de la nave, para una razonable aproximación de los muy altos gradientes de velocidad; ii) pero además debe extenderse bastante en la porción de la superficie libre considerada. Ambas condiciones simultáneas conducen a que el número de nodos/elementos a manipular pueda resultar bastante engorroso, tanto en pre-procesamiento, procesamiento y pos-procesamiento, así como en la identificación y depuración de los errores introducidos en el cálculo práctico.

La interacción *viscosa / invíscida* nos sugiere la estrategia de dividir el problema en dos, en donde en el problema invíscido se resuelve el patrón de olas con ecuaciones simplificadas y sobre una extensión relativamente grande de la porción de la superficie libre considerada, mientras que en el problema viscoso se resuelve el flujo viscoso en la inmediata vecindad de la nave, con una malla menos extendida. En lo que sigue nos restringiremos a una estrategia para la resolución invíscida.

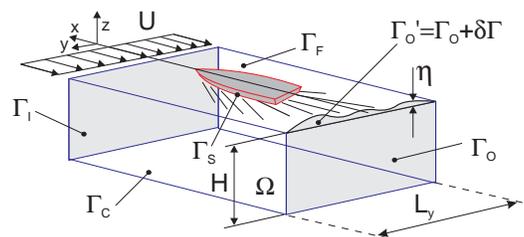


Figura 3.3: Descripción geométrica del problema de la resistencia de ola sobre naves.

### 3.4 Aplicabilidad de la incompresibilidad

Veamos antes si la incompresibilidad del agua en este problema resulta aplicable. Decimos que un fluido se comporta como si fuera incompresible cuando los incrementos en la densidad local del fluido debido a los incrementos de presión resultan despreciables, y para ello (Batchelor, 1974) se deben cumplir que  $(u/c)^2 \ll 1$ , y  $gL/c^2 \ll 1$ , donde  $c$  es la rapidez de propagación del sonido en el fluido,  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $u = \max_{t,\mathbf{x}} |\Delta u(x,t)|$  es la máxima variación temporal y espacial de la velocidad en la región de flujo, y  $L$  es una longitud característica del problema. En principio, cuando no se cumple la primera condición debemos considerarlo como un problema de la dinámica de gases, y cuando no se cumple la segunda condición, como uno de meteorología dinámica, y en la práctica usual la más importante es la primera. Introduciendo los números de Mach  $Mn = u/c$ , y de Froude  $Fn = u/\sqrt{gL}$ , las podemos re-escribir

$$\begin{cases} Mn^2 = (u/c)^2 \ll 1 \\ (Mn/Fn)^2 = (\sqrt{gL}/c)^2 \ll 1 \end{cases} . \quad (3.1)$$

En nuestro caso,  $c \sim 1470$  [m/s] para agua a 15 [C<sup>0</sup>],  $g = 9.81$  [m/s<sup>2</sup>], la eslora de la nave la podemos acotar en  $L < 300$  [m]. Para acotar  $u$  tendremos presente que las velocidades de avance de las embarcaciones usuales son relativamente muy reducidas, y que también lo serán las del patrón de olas, de modo que podemos estimar  $u < 40$  [nudos]  $\sim 21$  [m/s], donde el factor de conversión de unidades es

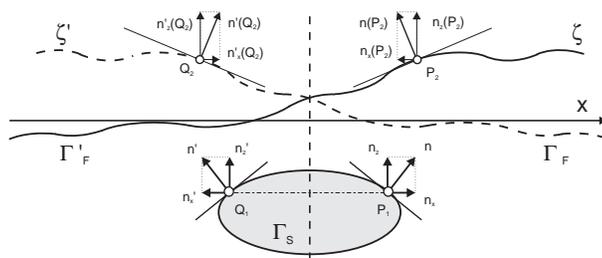
$$1 \text{ nudo} = 1 \text{ milla marina por hora} \approx \frac{1850 \text{ metros}}{1 \text{ hora}} \sim 0.51 \text{ [m/s]}; \quad (3.2)$$

tendremos

$$Mn^2 = (u/c)^2 \sim (21 \text{ [m/s]})/(1470 \text{ [m/s]})^2 \sim 2 \times 10^{-4} \ll 1 \quad ; \quad (3.3)$$

$$(Mn/Fn)^2 = (\sqrt{gL}/c)^2 = (\sqrt{9.81 \text{ [m/s}^2\text{]} 300 \text{ [m]}}/(1470 \text{ [m/s]}))^2 \sim 0.0014 \ll 1 \quad ; \quad (3.4)$$

vemos que ambas condiciones se cumplen fuertemente, y en consecuencia es aceptable suponer la incompresibilidad del agua para este problema, que matemáticamente equivale a  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . Finalmente, como el flujo externo es invíscido e incompresible, su velocidad  $\mathbf{u}$  se puede expresar en la forma  $\mathbf{u} = \nabla\Phi + \nabla \times \mathbf{A}$ , donde  $\Phi$  es un campo potencial escalar definido a menos de una constante arbitraria,  $\mathbf{A}$  es un campo potencial vectorial definido a menos de un vector constante.

Figura 3.4: Simetrías en el versor normal  $\mathbf{n}$ .

### 3.5 Aplicabilidad de la capa límite

La clásica aproximación de la capa límite es una consecuencia de la observación experimental de Prandtl, donde en un flujo viscoso incompresible, sin separación y para altos números de Reynolds se pueden distinguir subregiones de flujo donde los efectos viscosos están confinados y resultan predominantes. Estas subregiones tienen un espesor relativo  $\delta/L \sim 1/\sqrt{Rn}$ , pequeños para números de Reynolds muy altos ( $Rn \gg 1$ ), y se disponen sobre las paredes sólidas tanto de los cuerpos inmersos como las que delimitan el flujo. Cada una de éstas constituye una *capa límite* del flujo, mientras que la subregión de flujo restante se comporta prácticamente como invíscida. En los flujos en donde las regiones con efectos viscosos predominantes permanecen confinadas junto a las paredes sólidas, se dice que *no hay desprendimiento de la capa límite*, y el cálculo de la presión puede independizarse del cálculo de la velocidad viscosa. Esta conduce a la aproximación de las ecuaciones de la capa límite. Sus ecuaciones son una notoria simplificación de las ecuaciones de Navier Stokes, y son relativamente más sencillas de resolver, siendo cercanas a las ecuaciones diferenciales, en derivadas parciales, de segundo orden parabólicas.

En nuestro caso, tanto porque la viscosidad del agua es muy reducida como por las velocidades y longitudes que intervienen los números de Reynolds resultan mucho mayores que la unidad  $Rn \gg 1$ . Por ejemplo, en la medición experimental de la resistencia de ola sobre modelos, hemos mencionado que  $1 \times 10^6 < Rn < 2 \times 10^9$ , y crece con el aumento de la escala, por lo que en nuestro problema las capas límites serán en general muy delgadas. En contraposición, en el flujo real se observa un flujo separado en la zona del yugo de popa de la nave, lo que sumado a las corrientes de torbellino de la propulsión, hace que el fenómeno resultante sea de naturaleza muy complicada. En primera aproximación lo supondremos despreciable. En conclusión, supondremos que las capas límites se mantienen delgadas, y despreciaremos los efectos de separación de flujo en la zona de la popa de la nave.

## 3.6 Aplicabilidad de la irrotacionalidad

Para la región invíscida se puede optar por la resolución directa de las ecuaciones de Euler, pero bajo condiciones particulares de flujo éstas se pueden simplificar a las ecuaciones del potencial. Las de Euler resultan más generales y contemplan parcialmente la presencia de los efectos causados por la vorticidad, donde decimos parcialmente por lo siguiente. La vorticidad es definida como  $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$ , y su ecuación con efectos viscosos se la puede obtener de la de Navier Stokes suponiendo que: la viscosidad del fluido es uniforme, la fuerza de masa es conservativa y la densidad es barotrópica  $\rho = f(p)$  (sólo función de la presión  $p$ ). La ecuación resultante se la puede escribir como  $\partial_t \omega + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = (\omega \cdot \nabla) \omega + \nu \Delta^2 \omega$ , donde el primer término del miembro derecho es el distintivo de la vorticidad. Cuando la viscosidad  $\nu$  es cero el término viscoso  $\nu \Delta^2 \omega$  es nulo. Por otra parte, el teorema de circulación de Kelvin establece que en un flujo invíscido, barotrópico y con fuerzas de masa conservativas, la circulación  $\Gamma(t)$  de la velocidad  $\mathbf{u}$  alrededor de una línea fluida cerrada  $\Upsilon$  es temporalmente invariante

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0 \quad \text{donde} \quad \Gamma = \oint_{\Upsilon} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} \quad . \quad (3.5)$$

En particular, si en algún instante  $t_0$  sabemos que el flujo es irrotacional, entonces en el futuro ( $t > t_0$ ) también lo será. Pero el término viscoso de la ecuación *descongela* la línea vorticiosa de la línea de fluido, separándolas, y representa la difusión de la vorticidad a través del fluido, ocasionando un corrimiento de las líneas vorticiosas a través de las líneas de fluido. Entonces, si bien la vorticidad no puede crearse en el interior del flujo, sí puede dispersarse en su interior, y la modificación de su intensidad sólo puede darse por difusión viscosa. Existen diversos mecanismos para la generación de la vorticidad, siendo el más conocido la presencia de una pared sólida donde el flujo viscoso se adhiere a ella, aunque otra posibilidad algo más sutil (Batchelor, 1974) es la presencia de una superficie libre, en donde la presión es constante y las tensiones tangenciales son nulas. Nosotros supondremos irrotacionalidad en el flujo invíscido, porque asumiremos que se cumplen las siguientes condiciones 1) la viscosidad del agua es muy pequeña, por lo que la difusión vorticiosa es despreciable; ii) el flujo incidente es irrotacional en todo instante; iii) la vorticidad engendrada en la superficie libre es convectada por el flujo en la dirección tangencial a la superficie libre hacia aguas abajo, y resulta despreciable; iv) la posición relativa de la nave con respecto al flujo incidente es tal que los efectos de sustentación hidrodinámica ocasionados por una circulación sobre partes de la nave son nulos o despreciables, lo que implica que los ángulos de deriva y de escora son nulos o muy reducidos. Luego, la velocidad invíscida se reduce al gradiente escalar  $\mathbf{u} = \nabla \Phi$ , y la ecuación de conservación de masa se reduce a la ecuación de Laplace  $\Delta \Phi = 0$ .

## 3.7 Formulación potencial para la resistencia de ola

Por lo argumentado en los puntos previos, el problema de la resistencia de ola lo asimilamos a un problema de flujo invíscido, incompresible e irrotacional, alrededor de una nave que avanza en la superficie libre de un fluido inmóvil, con velocidad uniforme  $\mathbf{u}_s$ . El régimen de flujo será estacionario y no desprendido, y las propiedades físicas del agua serán uniformes, no hay corrientes en su interior ni influencia de vientos de superficie, ni otros efectos secundarios (superficies vorticosas, corrientes en torbellino, resistencia inducida, burbujas o rotura de olas). Como el problema descrito resulta invariante bajo una transformación galileana, es equivalente considerar al baricentro de la nave inmóvil, y suponer al flujo avanzando en la dirección opuesta con velocidad  $\mathbf{u}_\infty = -\mathbf{u}_s$  corriente arriba. Entonces, consideramos una nave que avanza a velocidad constante en un canal de sección constante el cual, por simplicidad, lo supondremos como un rectángulo de profundidad  $H$  y ancho  $L_y$ , ver figura (3.3). El fluido a ser modelado ocupa la región  $\Omega$  la cual es limitada por: las paredes del canal (laterales y del fondo)  $\Gamma_C$ , los bordes de entrada/salida  $\Gamma_{I/O}$ , la superficie mojada de la nave  $\Gamma_S$  y la superficie libre  $\Gamma_F$ . El eje  $x$  es paralelo a la velocidad no perturbada  $\mathbf{u}_\infty$  corriente arriba, el eje  $z$  positivo hacia arriba y el eje  $y$  tal que resulte una terna derecha en la secuencia  $(x, y, z)$ . El campo potencial de velocidades  $\mathbf{u}$  está dado por  $\mathbf{u} = \nabla\Phi$ , donde  $\Phi$  es el potencial total, el cual satisface la ecuación de Laplace en la región de flujo  $\Omega$  y puede descomponerse como  $\Phi = \mathbf{u}_\infty \mathbf{x} + \phi$  donde  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  es el vector posición y  $\phi$  es el potencial de perturbación. La posición de la superficie libre  $\Gamma_F$  está dada por la función univaluada  $z = \zeta(x, y)$ , donde  $\zeta$  es la elevación (con signo) de la superficie libre respecto al plano de referencia  $z = 0$  el cual es también el plano de equilibrio hidrostático.

### 3.7.1 Condición de borde cinemática

La condición de borde cinemática es la de resbalamiento  $\partial_n \Phi = 0$  sobre las paredes del canal, fondo y superficie libre. Alternativamente, pueden considerarse también el caso de imponer condiciones de borde Dirichlet en el fondo  $\Phi = U_\infty x$ . Las componentes cartesianas de la normal en la superficie libre  $z = \zeta(x, y)$  las expresamos a partir del producto vectorial  $\mathbf{n} = \mathbf{r}_{,u} \times \mathbf{r}_{,v}$ , donde  $\mathbf{r} = (x, y, \zeta)$  es el vector posición y  $u, v$  son las coordenadas paramétricas de la superficie, que aquí se reducen a  $u \equiv x, v \equiv y$ . Tendremos  $\mathbf{r}_{,u} = (1, 0, \zeta_x)$  y  $\mathbf{r}_{,v} = (0, 1, \zeta_y)$ , resultando  $\mathbf{n} = [-\zeta_x, -\zeta_y, 1]$ . Luego, la condición cinemática en la superficie libre la podemos re-escribir en sus componentes cartesianas como

$$-\zeta_x \Phi_{,x} - \zeta_y \Phi_{,y} + \Phi_{,z} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_F . \quad (3.6)$$

### 3.7.2 Condición de borde dinámica

Tanto la ecuación de Laplace como las condiciones de borde cinemáticas serían suficientes si la posición de la superficie libre  $\zeta$  fuera conocida a priori, pero éste no es caso, debemos agregar un condición adicional. Esto es hecho por medio de la ecuación de Bernoulli

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + gz = C \quad \text{en } \Omega, \quad (3.7)$$

la cual relaciona la presión  $p$ , la velocidad  $\nabla\Phi$  y la altura  $z$ , donde  $\rho$  es la densidad del fluido. Despreciamos la presión de vapor y la tensión superficial de vapor del agua, entonces el equilibrio mecánico de la interfase aire/agua conduce a que la presión  $p$  es la misma en ambas caras e igual a la presión atmosférica  $p_{atm}$ , la cual supondremos también como constante. Entonces  $p = p_{atm}$  y en infinito corriente arriba  $p_{atm}/\rho + 1/2u_\infty^2 + 0 \equiv C$ , donde sin pérdida de generalidad adoptamos  $p_{atm} = 0$ .

### 3.7.3 Condiciones de radiación

Las “condiciones de radiación” deberían permitir, básicamente, el flujo de energía en la forma de olas radiantes que se propagan corriente abajo  $\Gamma_O$ . En contraste, no deben haber olas corriente arriba  $\Gamma_I$  de modo que imponemos simplemente que el potencial debería aproximarse al no perturbado allí. Notemos que el diferente tratamiento en  $\Gamma_I$  y en  $\Gamma_O$  es el único elemento que puede romper la simetría  $x \rightarrow -x$ , y asegurar un patrón de olas correcto. Otra forma es hacerlo a nivel discreto mediante la adición de un mecanismo disipativo o con técnicas de derivadas contra-corriente, en cuyo caso las podemos obviar a nivel del continuo.

### 3.7.4 Sistema de ecuaciones gobernantes

Las ecuaciones gobernantes para el par solución  $\{\Phi, \zeta\}$  del modelo de flujo potencial son resumidas como:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\Phi = 0 & \text{en } \Omega ; \\ \partial_n\Phi = 0 & \text{sobre } \Gamma_S + \Gamma_C ; \\ \zeta = (u_\infty^2 - |\nabla\Phi|^2)/(2g) & \text{sobre } \Gamma_F ; \\ -\zeta_x\Phi_{,x} - \zeta_y\Phi_{,y} + \Phi_{,z} = 0 & \text{sobre } \Gamma_F ; \\ \text{condiciones de radiación} & \text{sobre } \Gamma_{I/O} . \end{array} \right. \quad (3.8)$$

## 3.8 Dificultades intrínsecas

El problema potencial, a nivel del continuo y sin condiciones explícitas de radiación, exhibe dos dificultades intrínsecas:

### 3.8.1 No linealidad cinemática y dinámica

La posición de la superficie libre  $\zeta$  es desconocida a priori, donde las condiciones de borde a imponer sobre ella, tanto la cinemática como la dinámica son no lineales. Esto constituye una formidable complicación para los métodos de solución, y ha conducido al desarrollo de una extensa familia de métodos tanto linealizados como no lineales, los que se traducen luego en métodos semianalíticos y numéricos específicos, como por ejemplo, el código lineal DAWSON (1989) y el no lineal RAPID (1996) desarrollados en MARIN (Maritime Research Institute Netherlands) detallados en la tesis de Raven (1996).

### 3.8.2 Problema hidrodinámico incompleto

El sistema de ecuaciones gobernante del par solución  $\{\Phi, \zeta\}$  dado por la ecuación de conservación de masa más las condiciones de borde cinemática y dinámica conduce a un *problema hidrodinámico incompletamente formulado*, en el sentido de Birkhoof, porque no determina unívocamente el flujo alrededor de la nave, y esto puede evidenciarse mediante las siguientes consideraciones de simetría. Para ello, consideremos un *cuerpo simétrico* bajo la operación geométrica de reflexión con respecto al plano  $x = 0$ , por ejemplo, un elipsoide sumergido, y sea  $(\Phi, \zeta)$  un par solución del sistema

$$\begin{cases} \Phi_{,xx} + \Phi_{,yy} + \Phi_{,zz} = 0 & \text{en } \Omega ; \\ n_x \Phi_{,x} + n_y \Phi_{,y} + n_z \Phi_{,z} = 0 & \text{sobre } \Gamma_S ; \\ n_x \Phi_{,x} + n_y \Phi_{,y} + n_z \Phi_{,z} = (\mathbf{u}_\infty, \hat{\mathbf{n}}) & \text{sobre } \Gamma_\infty ; \\ \zeta = (u_\infty^2 - |\nabla\Phi|^2)/(2g) & \text{sobre } \Gamma_F ; \\ -\zeta_{,x} \Phi_{,x} - \zeta_{,y} \Phi_{,y} + \Phi_{,z} = 0 & \text{sobre } \Gamma_F. \end{cases} \quad (3.9)$$

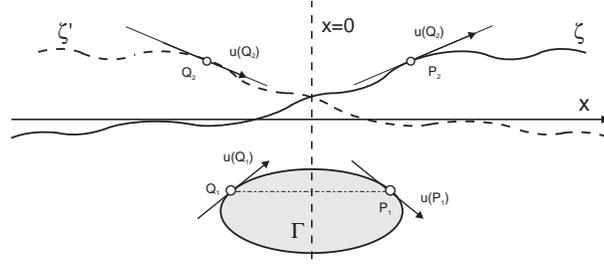
Podemos mostrar que el problema resulta invariante bajo una simetría de reflexión con respecto al plano  $x = 0$ . Efectivamente, construyamos el par  $(\Phi', \zeta')$  en la forma

$$\begin{cases} \Phi'(x, y, z) = -\Phi(-x, y, z) \\ \zeta'(x, y) = +\zeta(-x, y) \end{cases} ; \quad (3.10)$$

resulta que este par es también solución de las ecuaciones anteriores. Para mostrarlo, introduzcamos por conveniencia los puntos genéricos  $P = (x, y, z)$ ,  $Q = (-x, y, z)$ , simétricos según  $x$ , y consideremos las siguientes simetrías.

#### Simetrías en el versor normal

Para las simetrías en el versor normal  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$  en las superficies de borde finitas, tengamos presente la figura 3.4 y consideremos separadamente, la superficie del cuerpo  $z = f(x, y)$  y la superficie libre  $\zeta'(x, y)$ . Por construcción, la superficie del cuerpo  $z = f(x, y)$

Figura 3.5: Simetrías en la velocidad  $\mathbf{u}$ .

es simétrica bajo la reflexión con respecto al plano  $x = 0$ , es decir,  $f(x, y) = f(-x, y)$ . Su normal evaluada en  $P$  es

$$\hat{\mathbf{n}}_P = [-f_{,x} \quad -f_{,y} \quad 1]_P^T \quad ; \quad (3.11)$$

donde  $[...]^T$  denota vector columna (en notación matricial), el supraíndice  $T$  denota la traspuesta, mientras que evaluada en  $Q$  es

$$\hat{\mathbf{n}}_Q = [-f_{,x} \quad -f_{,y} \quad 1]_Q^T = [+f_{,x} \quad -f_{,y} \quad 1]_P^T \quad . \quad (3.12)$$

En cambio, la superficie libre  $\zeta'$  en general no será simétrica con respecto al plano  $x = 0$ , esto es,  $\zeta'(x, y) \neq \zeta'(-x, y)$ . Su normal evaluada en  $P$  es

$$\hat{\mathbf{n}}'_P = [-\zeta'_{,x} \quad -\zeta'_{,y} \quad 1]_P^T \quad . \quad (3.13)$$

Por construcción  $\zeta'(x, y) = \zeta(-x, y)$ , y

$$\hat{\mathbf{n}}'_P = [+ \zeta_{,x} \quad -\zeta_{,y} \quad 1]_Q^T \quad ; \quad (3.14)$$

es decir, tanto en la superficie del cuerpo como en la superficie libre tendremos

$$[+n'_x(P) \quad n'_y(P) \quad n'_z(P)]^T = [-n_x(Q) \quad n_y(Q) \quad n_z(Q)]^T \quad ; \quad (3.15)$$

esto es, el campo de normales es antisimétrico en su componente  $n_x$  y simétrico en sus componentes  $n_y, n_z$ .

### Simetrías en la velocidad

Para las simetrías en la velocidad  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ , en particular, en las superficies de borde finitas, ahora tengamos presente la figura 3.5. La velocidad para  $\Phi'(P)$  evaluada en  $P$  es

$$\mathbf{u}'_P = [\Phi'_{,x} \quad +\Phi'_{,y} \quad +\Phi'_{,z}]_P^T \quad ; \quad (3.16)$$

introduciendo la definición de  $\Phi'(P)$

$$\mathbf{u}'_P = [\Phi_{,x} \quad -\Phi_{,y} \quad -\Phi_{,z}]_Q^T \quad ; \quad (3.17)$$

pero la velocidad para  $\Phi(Q)$  es

$$\mathbf{u}_Q = [\partial_x \Phi \quad \partial_y \Phi \quad \partial_z \Phi]_Q \quad ; \quad (3.18)$$

entonces genéricamente para la velocidad

$$[u'_x \quad u'_y \quad u'_z]_P = [u_x \quad -u_y \quad -u_z]_Q \quad \text{para } P, Q \in (\Omega \cup \Gamma) \quad ; \quad (3.19)$$

esto es, el campo de velocidad es simétrico en su componente  $u_x$  y antisimétrico en sus componentes  $u_y, u_z$ , y el módulo resulta invariante

$$|\nabla \Phi'(P)|^2 = |\nabla \Phi(Q)|^2 \quad \text{para } P, Q \in (\Omega \cup \Gamma) \quad . \quad (3.20)$$

Entonces, las condiciones de borde cinemáticas para  $\Phi'(P)$  las podemos expresar en función de las correspondientes a la original  $\Phi(Q)$

$$n'_x u'_x + n'_y u'_y + n'_z u'_z|_P \equiv -n_x u_x - n_y u_y - n_z u_z|_Q = 0 \quad . \quad (3.21)$$

### Simetría en la altura

Análogamente, la elevación  $\zeta'(x, y)$  la expresamos en función de la elevación correspondiente a la original  $\zeta(-x, y)$

$$\zeta'(x, y) = \frac{1}{2g} \left( u_\infty^2 - |\nabla \Phi(P)|^2 \right) \quad ; \quad (3.22)$$

mientras que la elevación  $\zeta(x, y)$  está dada por

$$\zeta(x, y) = \frac{1}{2g} \left( u_\infty^2 - |\nabla \Phi(Q)|^2 \right) \quad ; \quad (3.23)$$

como  $|\nabla \Phi'(P)|^2 = |\nabla \Phi(Q)|^2$ , concluimos que  $\zeta'(x, y) \equiv \zeta(-x, y)$ .

### Simetría en la ecuación diferencial

Finalmente, la ecuación diferencial para  $\Phi'(P)$  la podemos expresar en función de la correspondiente a la solución  $\Phi(Q)$

$$+\Phi'_{,xx}|_P + \Phi'_{,yy}|_P + \Phi'_{,zz}|_P = -\Phi_{,xx}|_Q - \Phi_{,yy}|_Q - \Phi_{,zz}|_Q = 0 \quad \text{para } P, Q \in \Omega. \quad (3.24)$$

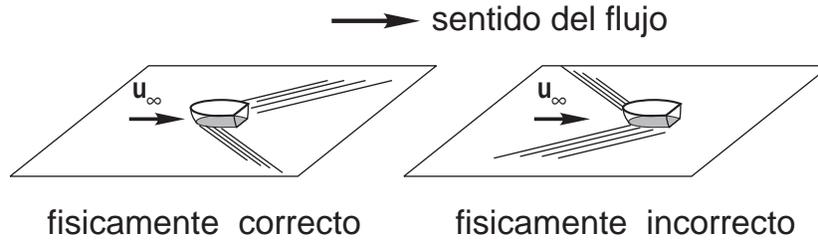


Figura 3.6: La derivada lateral corriente arriba descarta las soluciones no físicas, en las cuales el patrón de olas se propaga corriente arriba.

### Antisimetría de la resistencia de ola

Como conclusión de lo anterior, si en el problema original hallamos el par solución  $\{\Phi(x, y, z), \zeta(x, y, z)\}$ , entonces el par reflejado  $\{-\Phi(x, y, z), \zeta(-x, y, z)\}$  es también solución. Pero en tal caso, la resistencia de ola en la solución reflejada es de igual módulo pero de sentido contrario al del sistema original. Para mostrar este resultado, empecemos teniendo en cuenta que la resistencia de ola puede hallarse a partir de la integración de la fuerza de presión sobre la superficie mojada de la nave, proyectada en la dirección  $x$ ,

$$F'_x = \int_{\Gamma} d\Gamma p'(\mathbf{x})(\hat{\mathbf{n}}', \hat{\mathbf{x}}) = \int_{\Gamma} d\Gamma p'(\mathbf{x})n'_x(\mathbf{x}) \quad . \quad (3.25)$$

Ahora bien, el campo de presión  $p'(\mathbf{x})$  es simétrico,  $p'(P) = p(Q)$ , mientras que el campo de las normales  $n'_x(\mathbf{x})$  es antisimétrico en su componente  $n_x$ , es decir,  $n'_x = -n_x$ , en consecuencia  $F'_x = -F_x$ . De ese modo se abren dos posibilidades para el par solución  $\{\Phi, \zeta\}$ : o bien es simétrico y la resistencia de ola entonces resulta nula, o bien no es unívoco. Descartada la primera posibilidad, concluimos que la nuestra definición del problema hidrodinámico es *incompleta*. Entonces, debemos imponer alguna otra condición adicional para seleccionar las soluciones con *sentido físico*, y que entre otras consideraciones, aquellas en que la resistencia de ola resulte *positiva*, esto es, su orientación es la misma que la del flujo exterior, y el patrón de olas debe propagarse corriente abajo.

## 3.9 Técnicas de derivada contra-corriente

La dificultad hallada es parecida a la encontrada en el flujo transónico cuando el número de Mach es superior al crítico, en donde también se presentan una multiplicidad de soluciones con ondas de choque tanto de expansión como de compresión. La solución físicamente aceptable es aquella sin ondas de choque con expansión, y además la tasa de generación de entropía es estrictamente positiva en todo el flujo (proceso termodinámico irreversible). En la irreversibilidad participan una serie de fenómenos, entre ellos, los de naturaleza

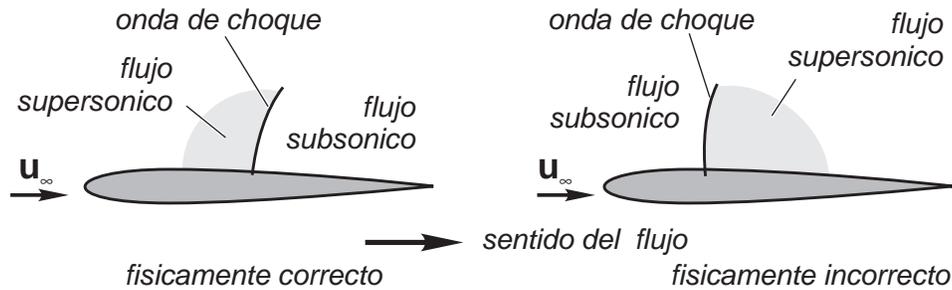


Figura 3.7: Las soluciones físicamente admisibles y la derivada lateral contra-corriente, muestran una cercana analogía en aerodinámica transónica.

disipativa y difusiva. Para superar la dificultad hallada en el caso del flujo transónico, se suele utilizar el artilugio de agregar una difusividad numérica al sistema de ecuaciones, que es equivalente al uso de esquemas en diferencias finitas orientadas corriente arriba, o derivadas contra-corriente. Algo equivalente se suele hacer para el problema de olas de barcos. De hecho la etapa fundamental del método de Dawson define una técnica muy particular de hacerlo, exclusiva para este problema, y ni siquiera en el código no lineal RAPID (Raven, 1996) se ha implementado una forma substancialmente mejor de hacerlo.

### 3.10 El ensayo de la altura de ola constante

Debido a que el patrón de olas se propaga en un único sentido hacia corriente abajo, hacemos la siguiente observación de lo que sucede en las condiciones cinemáticas lejanas. Como en la superficie libre corriente arriba no llega ningún patrón de olas generadas por la nave, la velocidad total debe tender a la del flujo exterior no perturbado, o lo que es equivalente, la velocidad de perturbación  $\nabla\phi$  tiende a cero, mientras que en corriente abajo se observa la presencia de un patrón de olas estacionario acotado, y en consecuencia, la velocidad de perturbación  $\nabla\phi$  es no nula, es decir

$$\begin{cases} |\nabla\phi|^2 \rightarrow 0 & \text{para } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty^- ; \\ |\nabla\phi|^2 < A & \text{para } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty^+ ; \end{cases} \quad (3.26)$$

donde  $0 < A < \infty$  es una constante positiva acotada. Este par de condiciones cinemáticas para la superficie libre en corriente arriba y abajo, las podemos asimilar como equivalentes a una *condición de radiación*, en el sentido de que imponen una orientación privilegiada para la radiación de la potencia, dado que el patrón de olas se está llevando hacia corriente abajo una cierta potencia mecánica, que es suplida en definitiva por la planta motriz de la embarcación. Podemos inferir entonces, la presencia de ondas viajeras estacionarias en nuestro problema. Ahora, si la irradiación de potencia es constante en el tiempo

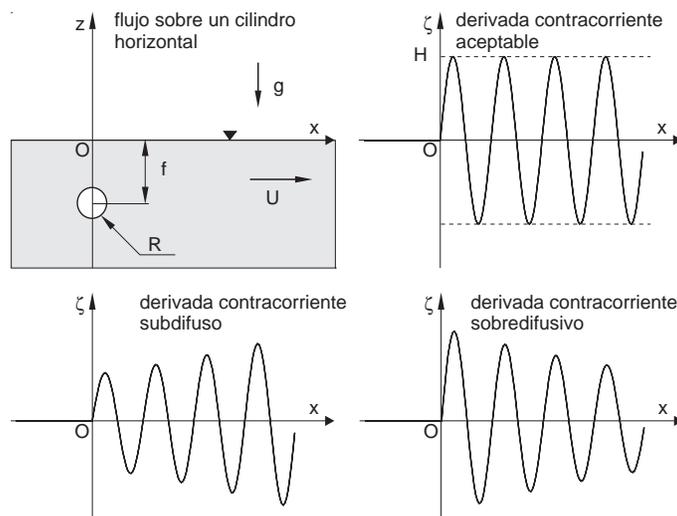


Figura 3.8: El ensayo de la altura de ola constante permite descartar los casos sobredifusivo y subdifusivo.

(condiciones estacionarias), y en ausencia de efectos físicos de naturaleza disipativa i) en 3D aunque el frente de ondas se va ampliando en aguas abajo, las amplitudes de olas se mantienen constantes en una cierta norma asociada con la energía, ii) en 2D (frente de ancho constante) no hay otra posibilidad de disipación de potencia, por lo que las amplitudes de olas *deberán mantenerse constantes* en corriente abajo. El caso 2D nos sugiere un método para la validación del esquema numérico, ya que su calidad se puede estimar por inspección de las amplitudes de olas, las cuales deben mantenerse aproximadamente constantes en corriente abajo, relativamente lejos de la perturbación, verificación que podríamos denominar como un *ensayo de la altura de ola constante*. Aunque sin llevarlo a la categoría de ensayo básico, el trabajo de Dawson (1977), de hecho, lo empleó para seleccionar un esquema muy particular para el operador discreto sobre la superficie libre, que en una formulación en velocidades, conduce un esquema en diferencias finitas de cuarto orden, contra-corriente, donde la tercera derivada de la velocidad es descartada. Por ejemplo, en la figura 3.8 consideramos un cilindro circular de radio  $R$ , sumergido a una profundidad  $f$  en un flujo uniforme con velocidad no perturbada  $U$  y en posición horizontal, con tres posibilidades en la altura de ola: constante, sobreamortiguada y subamortiguada, siendo aceptable únicamente el primero caso. La relativa facilidad de hacer este ensayo 2D (o cuasi 2D) y la claridad que transmite el resultado en el comportamiento de la altura de ola, justifica reconocerlo como un *ensayo básico de validación* para el esquema numérico en la superficie libre.

# Capítulo 4

## Linealizaciones en la superficie libre

### 4.1 Resumen

Se expone una linealización del problema de la resistencia de ola mediante técnicas de perturbación usadas en mecánica de fluidos, obteniendo un sistema de ecuaciones linealizadas para el incremento del par solución (potencial-altura). La descripción comprende: i) un resumen de parametrizaciones en el problema de barcos: barco esbelto (*slender ship*), barco delgado (*thin ship*), y barco ancho (*thick ship*), con sus problemas de flujo básico respectivos: sobre un “alambre” recto horizontal, sobre una placa plana vertical, y sobre el barco con gravedad infinita, ii) una linealización para el barco ancho a partir de la solución del flujo básico (o límite), en el cual la posición de la superficie libre inicial coincide con el plano de equilibrio hidrostático (sin olas), y será luego empleada en capítulos posteriores.

### 4.2 Parametrización en el problema delimitado

Adaptemos algunos conceptos clásicos de la teoría de las perturbaciones empleados en la mecánica de fluidos (van Dyke, 1975). Consideremos el flujo potencial alrededor de una nave de eslora  $L$  y manga  $B$ , con velocidad no perturbada en el infinito corriente arriba  $\mathbf{u}_\infty = -\mathbf{u}_s$ , bajo la acción de un campo gravitatorio de intensidad uniforme  $g$ . Para su descripción asintótica podemos introducir tres parámetros: la *relación de esbeltez*  $\lambda_B = B/L$ , la *relación de calado*  $\lambda_H = H/L$ , y el *número de Froude*  $Fn = u_\infty/\sqrt{gL}$ . Suponemos que en principio el par solución  $\{\phi, \eta\}$  dependerá de estos parámetros, es decir,  $\{\phi(\mathbf{x}, \lambda_B, \lambda_H, Fn), \zeta(\mathbf{x}, \lambda_B, \lambda_H, Fn)\}$ , lo cual nos conduce a tres clases de linealizaciones básicas: cuando tanto la relación de esbeltez  $\lambda_B$  como la de calado  $\lambda_H$  son mucho menores que la unidad, tendremos las del *barco esbelto* (*slender ship*); cuando solo lo sea la relación

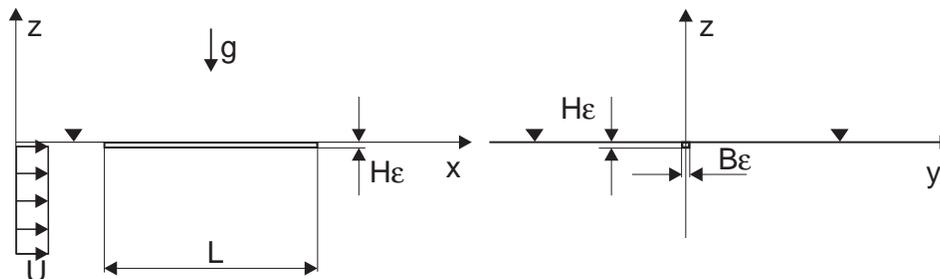


Figura 4.1: Flujo básico para el barco esbelto visto como el flujo alrededor de un “alambre”.

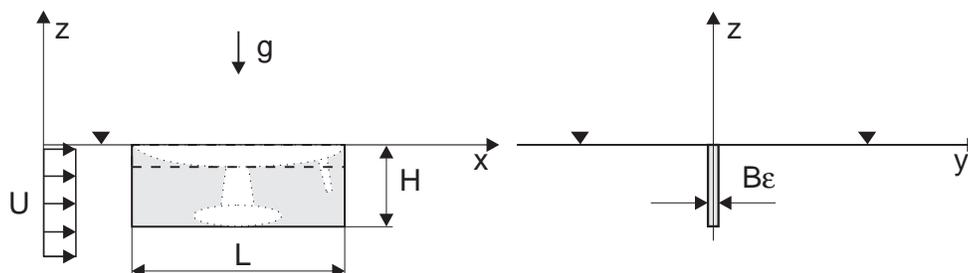


Figura 4.2: Flujo básico para el barco delgado visto como el flujo alrededor de una placa plana.

de esbeltez  $\lambda_B$ , tendremos las del *barco delgado* (*thin ship*), y finalmente cuando solo lo sea el número de Froude  $Fn$ , tendremos las del *barco ancho* (*thick ship*).

### 4.2.1 Flujo básico para el barco esbelto

En el barco esbelto (*slender ship*), tanto la relación de esbeltez  $\lambda_B$  como la relación de calado  $\lambda_H$  son mucho menores que la unidad, esto es,  $0 \leq \lambda_B, \lambda_H \ll 1$ . Su problema de *flujo básico* se puede obtener tomando el límite para  $\lambda_B, \lambda_H \rightarrow 0$ , con eslora  $L$  fija. En el límite, el barco degenera en un “alambre”, pero en principio el problema resulta mal formulado (Ogilvie, 1977), por lo que su solución requiere de un estudio adicional.

### 4.2.2 Flujo básico para el barco delgado

En cambio, en el barco delgado (*thin ship*) sólo la relación de esbeltez  $\lambda_B$  es mucho menor que la unidad, esto es,  $0 \leq \lambda_B \ll 1$ . Su problema de *flujo básico* resulta relativamente simple de obtener, tomando el límite para  $\lambda_B \rightarrow 0$ , con eslora  $L$  fija y manga  $B \rightarrow 0$ . En el límite, el barco degenera en una placa vertical, ver figura 4.2, donde las condiciones de

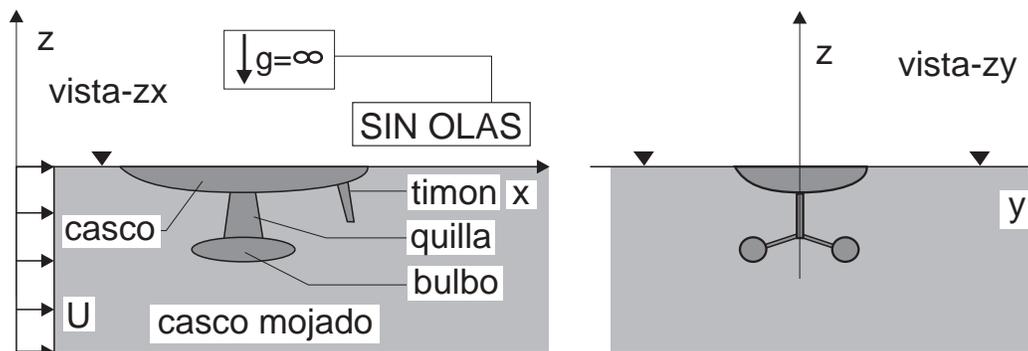


Figura 4.3: Flujo básico para el barco lento visto como el flujo bajo aceleración gravitatoria infinita.

borde se imponen en ambas caras de la placa.

### 4.2.3 Flujo básico para el barco lento

En cambio, si el número de Froude  $Fn$  es mucho menor que la unidad, esto es,  $Fn \ll 1$ , diremos que es un *barco lento*. A diferencia de los casos anteriores, la definición del problema de *flujo básico* para el barco lento resulta en principio *múltiple*, en el sentido de que lo podemos obtener en diferentes formas, modificando los parámetros  $(L, u_\infty, g)$  que figuran en el número de Froude de modo de tomar un límite para  $Fn \rightarrow 0$ . Como nos interesa resolver aproximadamente nuestro problema para una embarcación de *forma geométrica* dada no alteraremos ni la relación de esbeltez  $\lambda_B$  ni la de calado  $\lambda_H$ . Por lo que nos queda libre solamente los parámetros  $(u_\infty, g)$ , y resulta plausible definirlo tomando el límite parcial  $g \rightarrow \infty$ , obteniendo de ese modo una notable simplificación geométrica, en la cual la superficie libre  $\zeta(x, y)$  coincide con el plano  $z = 0$ . Este resultado es inmediato por inspección de la condición dinámica en la superficie libre  $\Gamma_F$ , ecuación 3.8.d.

Es decir, en tal flujo básico desaparece el patrón de olas, como se muestra en la figura 4.3. Aunque parezca quizás un tanto artificial, este problema de flujo básico es relativamente mucho más fácil de resolver, y es conocido en la especialidad con diversos nombres, los más difundidos son “*flujo con una pared rígida*” (*rigid wall flow*) y “*flujo del cuerpo doble*” (*double body flow*). En este último caso, es equivalente al flujo obtenido al considerar la imagen especular del dominio de flujo con respecto al plano  $z = 0$ , en donde el *cuerpo doble* comprenderá la porción mojada de la nave y su imagen especular al mencionado plano, como se muestra en la figura 4.4. Luego de resolver el problema de flujo básico, restauramos la intensidad de la gravedad  $g$  a su valor original, entonces se formará un patrón de olas detrás de la nave. Para bajas velocidades de avance de la

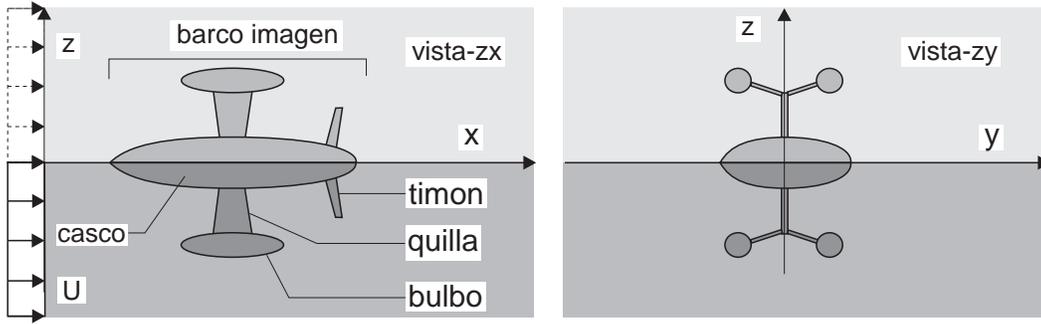


Figura 4.4: Equivalencia entre flujo con gravedad infinita y el flujo del cuerpo doble.

nave, o lo que es equivalente, para bajos números de Froude, el patrón de olas será de amplitudes medias relativamente pequeñas, y podemos considerarlo como una perturbación del problema básico sin olas. En base a algún procedimiento sistemático de perturbación calculamos correcciones al flujo básico, en donde en la primera etapa implica una linealización. En la amplia gama de posibilidades para las linealizaciones del barco lento, en las condiciones cinemática y dinámica de la superficie libre, podemos mencionar las propuestas por Baba/Takekuma (1975), Newman (1976), Dawson (1977), Eggers (1983), Brandsma/Hermans (1985), y la de Nakos (1990), analizadas en detalle en la tesis de Raven (1996).

### 4.3 Expansión en el barco delgado y lento

Veamos a continuación solamente el caso del *barco delgado y lento*. Este caso es uno de los más sencillos para empezar con una expansión, porque suponemos que la perturbación en el flujo ocasionada por la *velocidad* y por la *forma* de la nave es pequeña. Una reducida velocidad de avance  $\mathbf{u}_\infty$ , que equivale a un reducido número de Froude de la nave, nos permite introducir una expansión en el potencial  $\Phi$ , que junto con una gran esbeltez  $\lambda_B$  en el casco, nos permiten obtener una condición linealizada de superficie libre *combinada* (dinámica + cinemática), debida a Kelvin. Como el potencial de perturbación  $\phi$  es aproximadamente proporcional a la rapidez no perturbada  $u_\infty$  (o equivalentemente al Froude), si ésta es pequeña, entonces  $\phi$  también lo será, por lo que podemos hacer una expansión asintótica a primer orden en  $\varepsilon \equiv Fn$ , es decir  $\phi = \psi\varepsilon$ , de modo que en el potencial total tendremos  $\Phi = \mathbf{u}_\infty^T \mathbf{x} + \psi\varepsilon$ , cuyo gradiente es  $\nabla\Phi = \mathbf{u}_\infty + \nabla\psi\varepsilon$ , y el cuadrado de su módulo es

$$|\nabla\Phi|^2 = |\mathbf{u}_\infty|^2 + 2(\mathbf{u}_\infty^T \nabla\psi)\varepsilon + |\nabla\psi|^2\varepsilon^2 \quad . \quad (4.1)$$

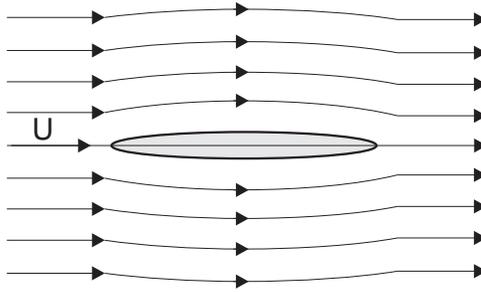


Figura 4.5: Velocidad transversal despreciable en barco delgado.

La altura  $\zeta$  a primer orden estará dada por

$$\zeta = \frac{1}{2g} (u_\infty^2 - |\nabla\Phi|^2) = -\frac{1}{g} \{ (u_\infty^T \nabla\psi)\varepsilon - |\nabla\psi|^2\varepsilon^2 \} = -\frac{1}{g} (\mathbf{u}_\infty^T \nabla\psi)\varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad ; \quad (4.2)$$

pero  $\mathbf{u}_\infty = u_\infty \hat{\mathbf{x}}$ , de modo que,  $\mathbf{u}_\infty^T \nabla\psi = u_\infty \partial_x \psi$ , y entonces una expansión asintótica de la altura  $\zeta$  para el *barco lento* la escribimos en la forma

$$\zeta = -\frac{u_\infty}{g} \frac{\partial\psi}{\partial x} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad ; \quad (4.3)$$

y en forma adimensional

$$\tilde{\zeta} = -Fn^2 \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{x}} + O(\varepsilon^2) \quad ; \quad (4.4)$$

donde  $\tilde{\psi} = \psi/u_\infty L$ ,  $\tilde{\zeta} = \zeta/L$ ,  $\tilde{x} = x/L$ . Ahora hallemos una única condición de borde linealizada (cinemática y dinámica). La condición de borde cinemática sobre superficie libre es

$$-\frac{\partial\zeta}{\partial x} \frac{\partial\Phi}{\partial x} - \frac{\partial\zeta}{\partial y} \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0 \quad ; \quad (4.5)$$

donde las componentes cartesianas de la velocidad expandidas son

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = u_\infty + \frac{\partial\psi}{\partial x} \varepsilon \quad , \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\partial\psi}{\partial z} \varepsilon \quad ; \quad (4.6)$$

mientras que para las derivadas en la superficie libre expandidas tendremos

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x} = -\frac{u_\infty}{g} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad ; \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial y} = -\frac{u_\infty}{g} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial\psi}{\partial x} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad . \quad (4.8)$$

Hagamos ahora otra suposición adicional. Si ahora solo admitimos un *barco lento y delgado*, entonces, como además el casco es delgado ( $\lambda_B$  pequeño), el campo de velocidades

es casi uniforme según la dirección  $x$  no perturbada, por lo que las derivadas transversales al flujo son despreciables, como se desprende de la observación de la figura 4.5, es decir,

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 + O(\lambda_B) \quad ; \quad (4.9)$$

agrupando los términos en igual potencias de  $\varepsilon$  obtenemos la clásica condición combinada de superficie libre linealizada (cinemática + dinámica) debida a Kelvin

$$\left( \frac{u_\infty^2}{g} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \varepsilon + O(\varepsilon^2) + O(\lambda_B) = 0 \quad ; \quad (4.10)$$

hacemos notar que ésta es válida sólo para el *barco lento y delgado*, donde  $\varepsilon, \lambda_B$  son pequeños,  $K = g/u_\infty^2$  es el número de onda característico. Para el flujo básico de la placa plana  $\lambda_B = 0$ , ésta se reduce a una de  $O(\varepsilon, 0)$ .

## 4.4 Expansión en el barco ancho y lento

En una etapa genérica  $k$  de un proceso de perturbación en nuestro problema tendremos el par solución  $\{\phi^k, \zeta^k\}$ , potencial y elevación, respectivamente. Aquí  $k = 0$  corresponde al problema de *flujo básico* y  $k = 1$  corresponde al *flujo perturbado*. Con el objeto de obtener el par solución  $\{\phi^1, \zeta^1\}$  hagamos la expansión asintótica  $\{\phi^1, \zeta^1\} = \{\phi^0 + \psi\varepsilon, \zeta^0 + \eta\varepsilon\}$ , a primer orden en  $\varepsilon$ , con  $\varepsilon = \text{Fr}$  y  $0 < \varepsilon \ll 1$  para el barco lento, donde  $\{\psi, \eta\}$  es el par solución (incremental) compuesto por el potencial de ola  $\psi$  y la altura de ola  $\eta$ . Ambos potenciales  $\phi^{0,1}$  son armónicos  $\Delta\phi^{0,1} = 0$  en sus respectivos dominios  $\Omega^{0,1}$ , y también asumimos que las elevaciones  $\zeta^{0,1}$  son univaluadas y suficientemente pequeñas, por lo que el par solución (incremental)  $\{\varepsilon\psi, \varepsilon\eta\} = \{\phi^1 - \phi^0, \zeta^1 - \zeta^0\}$  es también pequeño cuando  $\varepsilon \ll 1$ . A continuación, las condiciones de borde cinemáticas y dinámicas, linealizadas sobre la superficie libre del flujo básico, serán expresadas en términos del par solución  $\{\psi, \eta\}$ .

### 4.4.1 Condición de borde dinámica linealizada

En las etapas 0, 1 (flujos básico y perturbado, respectivamente) tendremos los potenciales totales  $\Phi^{0,1} = \mathbf{u}_\infty^T \mathbf{x} + \phi^{0,1}$  y los gradientes  $\nabla\Phi^{0,1} = \mathbf{u}_\infty + \nabla\phi^{0,1}$ . Los módulos de los gradientes y su diferencia son

$$|\nabla\Phi^{0,1}|^2 = u_\infty^2 + 2\mathbf{u}_\infty^T \nabla\phi^{0,1} + |\nabla\phi^{0,1}|^2 \quad ; \quad (4.11)$$

$$|\nabla\Phi^1|^2 - |\nabla\Phi^0|^2 = 2\mathbf{u}_\infty^T (\nabla\phi^1 - \nabla\phi^0) + (|\nabla\phi^1|^2 - |\nabla\phi^0|^2) \quad . \quad (4.12)$$

Expandiendo  $\phi^1$  a primer orden en  $\varepsilon$  tendremos

$$\nabla\phi^1 = \nabla\phi^0 + \nabla\psi\varepsilon \quad ; \quad (4.13)$$

y entonces

$$|\nabla\phi^1|^2 - |\nabla\phi^0|^2 = 2\nabla\phi^{0T}\nabla\psi\varepsilon + |\nabla\psi|^2\varepsilon^2 \quad ; \quad (4.14)$$

introduciendo (4.14) en (4.12)

$$|\nabla\Phi^1|^2 - |\nabla\Phi^0|^2 = 2(\mathbf{u}_\infty + \nabla\phi^0)^T\nabla\psi\varepsilon + O(\varepsilon^2) = 2\mathbf{u}_0^T\nabla\psi\varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad ; \quad (4.15)$$

Ahora, las ecuaciones de Bernoulli en las etapas 0, 1 son

$$\frac{1}{2}|\nabla\Phi^{0,1}|^2 + g\zeta^{0,1} = \frac{1}{2}u_\infty^2 + r^{0,1} \quad \text{sobre } \Gamma^{0,1} \quad ; \quad (4.16)$$

donde  $r^{0,1}$  son los residuos 0, 1, desde que en el proceso asintótico suponemos que la condición dinámica no se cumple exactamente, y en tal caso nos dará un término fuente para las ecuaciones perturbadas. Ahora, su diferencia es

$$\frac{1}{2}\{|\nabla\Phi^1|^2 - |\nabla\Phi^0|^2\} + g(\zeta^1 - \zeta^0) = (r^1 - r^0) \quad \text{sobre } \Gamma^{0,1} \quad ; \quad (4.17)$$

introduciendo (4.15) y la primera expansión  $\eta\varepsilon = \zeta^1 - \zeta^0$ , tendremos

$$\mathbf{u}_0^T\nabla\psi\varepsilon + g\eta\varepsilon + O(\varepsilon^2) = \Delta r \quad ; \quad (4.18)$$

donde  $\Delta r = r^1 - r^0$ . Dado que  $\mathbf{u}_0$  es evaluado en  $\Gamma^0$  y  $\nabla\phi^{0,1}$  lo son en  $\Gamma^{0,1}$ , deberíamos conocer la localización de las dos superficies de borde  $\Gamma^{0,1}$ , pero podemos introducir un procedimiento simplificado por medio de un cálculo de transferencia (van Dyke, 1975). Para considerar solamente superficies de borde conocidas transferimos todas las variables de flujo a la superficie de referencia  $\Gamma_0$ , entonces  $\phi^1(\mathbf{x}') \approx \phi^1(\mathbf{x})$  y  $\psi^1(\mathbf{x}') \approx \psi^1(\mathbf{x})$  más términos  $O(\varepsilon)$ , esto es, un simple desplazamiento de borde. Luego, todos los términos en la ecuación (4.18) son evaluados en  $\Gamma^0$  y obtenemos

$$g\eta = -\mathbf{u}_0^T\nabla\psi + \Delta r \quad \text{sobre } z = 0 \quad . \quad (4.19)$$

#### 4.4.2 Condición de borde cinemática linealizada

La superficie libre base  $\Gamma^0$  es el plano  $z = 0$ , mientras que la perturbada  $\Gamma^1$  puede escribirse como  $z = \varepsilon\eta(x, y)$ , y será cercana a la primera para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño. Sobre el plano  $z = 0$  tendremos que su versor normal  $\mathbf{n}(\mathbf{x}) = (0, 0, 1)$  es constante, y sobre la perturbada será  $\mathbf{n}(\mathbf{x}') = (-\varepsilon\eta_{,x}, -\varepsilon\eta_{,y}, 1)$ , a primer orden en  $\varepsilon$ . Luego, su cambio puede escribirse como

$$\delta\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}(\mathbf{x}') - \mathbf{n}(\mathbf{x}) = (-\varepsilon\eta_{,x}, -\varepsilon\eta_{,y}, 0) + O(\varepsilon^2) \quad ; \quad (4.20)$$

donde  $\mathbf{x}' \in \Gamma^1$  y  $\mathbf{x} \in \Gamma^0$ . Para la transferencia de su gradiente consideramos

$$\nabla \phi^1(\mathbf{x}') = \nabla \phi^1(\mathbf{x}) + \nabla \nabla^T \phi^1(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) \eta \varepsilon \quad ; \quad (4.21)$$

introduciendo (4.13) y suponiendo que  $\nabla \nabla^T \phi^{0,1}$  son simétricos, podemos escribir

$$\nabla^T \phi^1(\mathbf{x}') = \nabla^T \phi^0(\mathbf{x}) + \nabla^T \psi(\mathbf{x}) \varepsilon + \mathbf{n}^T(\mathbf{x}) \nabla \nabla^T \phi^0(\mathbf{x}) \eta \varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad . \quad (4.22)$$

La condición de borde cinemática en la superficie libre  $\Gamma^1$  del flujo perturbado es

$$\nabla^T \phi^1(\mathbf{x}') \mathbf{n}(\mathbf{x}') = 0 \quad \text{sobre } \Gamma^1 \quad ; \quad (4.23)$$

donde el versor normal es

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}') = \mathbf{n}(\mathbf{x}) + \delta \mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad . \quad (4.24)$$

Introduciendo las expresiones perturbadas (4.22) y (4.24) en (4.23)

$$\nabla^T \phi^1 \mathbf{n} = \nabla^T \phi^0 \mathbf{n} + \nabla^T \psi \mathbf{n} \varepsilon + \nabla^T \phi^0 \delta \mathbf{n} + \mathbf{n}^T (\nabla \nabla^T \phi^0) \mathbf{n} \eta \varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad . \quad (4.25)$$

donde los miembros izquierdos y derechos son evaluados sobre  $\mathbf{x}' \in \Gamma^1$  y  $\mathbf{x} \in \Gamma^0$ , respectivamente. Por otra parte, la velocidad de borde en el flujo básico está contenida por el plano  $z = 0$  y entonces  $\nabla^T \phi^0 \mathbf{n} = 0$ . Ahora

$$\nabla^T \phi^0 \delta \mathbf{n} = -\varepsilon \eta_{,x} \phi_{,x}^0 - \varepsilon \eta_{,y} \phi_{,y}^0 + O(\varepsilon^2) \quad ; \quad (4.26)$$

Para el último término, podemos escribir  $\mathbf{n}^T (\nabla \nabla^T \phi^0 \mathbf{n}) = \mathbf{n}^T \mathbf{t}$ , donde

$$t_i = \frac{\partial^2 \phi^0}{\partial x_i \partial x_j} n_j = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \phi^0}{\partial x_j} n_j \right) \quad \text{para } i, j = 1, 2, 3 \quad ; \quad (4.27)$$

donde hemos empleado la convención de Einstein de la suma sobre los índices repetidos y hemos tenido en cuenta que  $\mathbf{n}(\mathbf{x}) = (0, 0, 1)$  es un vector constante, de modo que se puede reducir a

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \phi^0}{\partial x_j} n_j \right) = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \phi^0}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \phi^0}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \phi^0}{\partial z} \right] \quad . \quad (4.28)$$

La componente  $z$  del campo de velocidades de borde  $u_{0z} = \partial_z \phi^0$  sobre todo el plano  $z = 0$  es nula, luego  $\partial_x(u_{0z}) = \partial_y(u_{0z}) = 0$  sobre  $z = 0$  y

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \phi^0}{\partial x_j} n_j \right) = \left[ 0, 0, \frac{\partial^2 \phi^0}{\partial z^2} \right] \quad \text{sobre } z = 0 \quad . \quad (4.29)$$

Agrupando estos resultados parciales tendremos

$$\varepsilon \left( \frac{\partial \psi}{\partial n} + \eta \frac{\partial^2 \phi^0}{\partial z^2} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \phi^0}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \phi^0}{\partial y} \right) + O(\varepsilon^2) = 0 \quad . \quad (4.30)$$

Como  $\phi^0$  es armónica en  $\Omega^0$  tendremos  $\partial_{zz}\phi^0 = -\partial_{xx}\phi^0 - \partial_{yy}\phi^0$ , y

$$-\partial_n\psi + \partial_x(\eta\partial_x\phi^0) + \partial_y(\eta\partial_y\phi^0) = 0 \quad \text{sobre } z = 0, \text{ a primer orden.} \quad (4.31)$$

De este modo, obtenemos la condición de borde cinemática linealizada sobre el plano de equilibrio hidrostático dada por

$$\partial_n\psi = \nabla^T(\mathbf{u}_0\eta) \quad \text{sobre } z = 0 ; \quad (4.32)$$

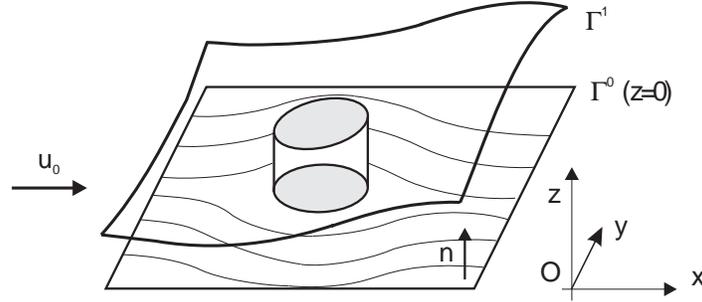


Figura 4.6: Interpretación física del flujo normal a la superficie libre iterada  $\Gamma^0$ .

Su interpretación física puede ser la siguiente. Consideremos el teorema de la divergencia para la velocidad modificada  $\mathbf{w} = \eta\mathbf{u}_0$

$$\int_{\Omega} d\Omega (\nabla \cdot \mathbf{w}) = \int_{\Gamma} d\Gamma (\mathbf{w}, \mathbf{n}) \quad (4.33)$$

donde  $\Omega, \Gamma$  son el volumen de la región y su superficie de borde, respectivamente. Su expresión en coordenadas cartesianas

$$\int_{\Omega} dx dy dz (\partial_x w_x + \partial_y w_y + \partial_z w_z) = \int_{\Gamma} (w_x dy dz + w_y dz dx + w_z dx dy) = Q_n \quad (4.34)$$

donde  $Q_n$  es el flujo neto de  $\mathbf{w}$  a través de la superficie cerrada  $\Gamma$ . Como  $w_z = 0$  sobre el plano  $z = 0$ , consideremos su equivalente plano (con profundidad  $z$  unitaria)

$$\int_{\Omega} dx dy (\partial_x w_x + \partial_y w_y) = \int_{\Gamma} (w_x dy + w_y dx) = Q_n \quad (4.35)$$

Como la condición de borde linealizada  $\partial_n\psi$  en la superficie de equilibrio hidrostático ( $z = 0$ ) es proporcional a la divergencia del campo planar  $\mathbf{w}$ , entonces también es equivalente al *flujo neto*  $Q_n$  de la velocidad modificada  $\mathbf{w}$  a través de cualquier curva cerrada contenida en dicho plano, ver figura 4.6.

### 4.4.3 Formulación para el potencial de perturbación

El sistema de ecuaciones linealizadas para el par solución  $\{\psi, \eta\}$  es:

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0 & \text{en } \Omega ; \\ \partial_n\psi = 0 & \text{sobre } \Gamma_S + \Gamma_C ; \\ g\eta = -\mathbf{u}_0^T \nabla\psi + \Delta r & \text{sobre } z = 0 ; \\ \partial_n\psi = \nabla^T(\mathbf{u}_0\eta) & \text{sobre } z = 0 ; \\ \text{condiciones de radiación} & \text{sobre } \Gamma_{I/O} . \end{cases} \quad (4.36)$$

donde  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_\infty + \nabla\phi^0$  es campo de velocidad de borde sobre el plano de equilibrio hidrostático  $z = 0$ ,  $\phi^0$  es el potencial de perturbación del flujo básico, y  $\Delta r = r^1 - r^0$  es el decremento del residuo de la condición de borde dinámica entre los flujos básico y perturbado. A continuación, en el problema de flujo perturbado imponemos que dicho residuo sea nulo, es decir,  $r^1 \equiv 0$ , y entonces

$$\partial_n\psi = -\frac{1}{g}\nabla^T\mathbf{u}_0\mathbf{u}_0^T\nabla\psi - \frac{1}{g}\nabla^T\mathbf{u}_0r^0 \quad \text{sobre } z = 0 . \quad (4.37)$$

El residuo inicial  $r^0$  es hallado a partir de la ecuación de Bernoulli (con  $\rho = 1$ )

$$\frac{1}{2}|\nabla\Phi^0|^2 + g\zeta^0 = \frac{1}{2}u_\infty^2 + r^0 \quad \text{sobre } z = 0 ; \quad (4.38)$$

donde  $\Phi^0 = \mathbf{u}_\infty^T\mathbf{x} + \phi^0$  es el potencial total del flujo básico, donde la superficie libre coincide con el plano de equilibrio hidrostático  $\zeta^0 = z = 0$ , y entonces,  $r^0 = 1/2(u_0^2 - u_\infty^2)$ , donde  $u_0^2 = |\nabla\Phi^0|^2$ , luego

$$\partial_n\psi = -\frac{1}{g}\nabla^T\mathbf{u}_0\mathbf{u}_0^T\nabla\psi - \frac{1}{2g}\nabla^T\mathbf{u}_0(u_0^2 - u_\infty^2) \quad \text{sobre } z = 0 ; \quad (4.39)$$

esta es una condición de borde tipo Neumann no homogénea sobre el plano  $z = 0$ , la cual puede a su vez interpretarse como un “flujo de transpiración”  $\sigma' \equiv \partial_n\psi$  que inyectamos para simular el desplazamiento de la superficie libre:

$$\begin{cases} \sigma' = D\psi + f \\ D = -1/g \nabla^T\mathbf{u}_0\mathbf{u}_0^T\nabla \\ f = -1/(2g) \nabla^T\mathbf{u}_0(u_0^2 - u_\infty^2) \end{cases} \quad \text{sobre } z = 0 . \quad (4.40)$$

# Capítulo 5

## Condiciones absorbentes

### 5.1 Resumen

Se propone una condición absorbente para el problema de flujo potencial con superficie libre que evita el artilugio de las derivadas contra-corriente (*upwind*). El método se basa en suponer que a partir de cierta coordenada  $|x| > L$ , la malla es *estructurada* unidimensionalmente (ver figura 5.1). Si además la velocidad no perturbada  $\mathbf{u}_0$  es constante y el término fuente, proporcional a la derivada de la carga de presión, es nulo para  $|x| > L$ , entonces puede calcularse en forma cerrada la expresión asintótica de la solución discreta en base a un problema de autovalores para los grados de libertad en cada *capa (slab)* de nodos de la parte estructurada. La condición absorbente se basa en fijar a cero aquellos grados de libertad que corresponden a modos que crecen para  $x \rightarrow \pm\infty$  en  $x = \pm L$ .

### 5.2 Problema 1D de un solo grado de libertad

Empezemos por un caso muy simple unidimensional

$$\begin{cases} -\phi_{,xx} + k\phi = w & \infty < x < +\infty ; \\ \phi = 0 & |x| \rightarrow \infty . \end{cases} \quad (5.1)$$

Suponemos que  $w$  es de soporte compacto, esto es,  $w = 0$  para  $|x| > L$ . Entonces, para  $x > L$ , tenemos que la ecuación es homogénea y por lo tanto la solución general puede buscarse en la forma de una exponencial  $\phi \sim e^{\alpha x}$ . Reemplazando en la ecuación diferencial obtenemos la ecuación característica  $-\alpha^2 + k = 0$ . Consideremos por separado los casos  $k > 0$  y  $k < 0$ .

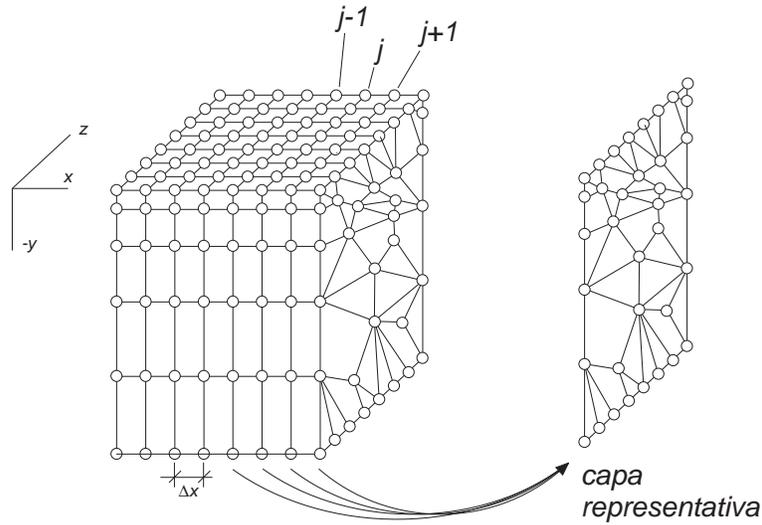


Figura 5.1: Malla no estructurada según  $yz$  y estructurada según  $x$ .

### 5.2.1 Caso “elíptico” ( $k > 0$ )

Con  $k > 0$ , esta ecuación representa la transferencia de calor 1D con enfriamiento tipo Newton y  $\alpha = \pm\sqrt{k}$ , de manera que las soluciones independientes son dos exponenciales una creciente y otra decreciente,

$$\phi = ae^{\sqrt{k}x} + be^{-\sqrt{k}x} \quad \text{para } x > L . \quad (5.2)$$

Pero para satisfacer la condición al infinito (5.1.b) debe ser  $a = 0$  y entonces

$$\phi(x) = be^{-\sqrt{k}x} \quad \rightarrow \quad \phi'(x) = -b\sqrt{k}e^{-\sqrt{k}x} = -\sqrt{k}\phi(x) \quad \text{para } x > L . \quad (5.3)$$

Esto nos sugiere que

$$\phi' + \sqrt{k}\phi = 0 \quad \text{para } x = L ; \quad (5.4)$$

es un buen candidato para ser *condición absorbente*. Análogamente, puede verse que la condición absorbente en  $x = -L$  es

$$\phi' - \sqrt{k}\phi = 0 \quad \text{para } x = -L . \quad (5.5)$$

Debemos ahora demostrar que (5.1.a), (5.4), (5.5) son *buenas condiciones*, es decir, dan un problema bien planteado y tal que la solución  $\phi$  coincide con la restricción del problema infinito a  $|x| < L$ . A continuación demostraremos esto. Sea  $\phi_P$  una solución particular en  $|x| < L$  es decir que satisface

$$-\phi_{P,xx} + k\phi_P = w \quad \text{para } |x| < L ; \quad (5.6)$$

sin satisfacer necesariamente las condiciones de contorno. Esta solución puede encontrarse, por ejemplo imponiendo  $\phi_P = \phi'_P = 0$  en  $x = -L$  e integrando la ecuación diferencial ordinaria hacia las  $x$  crecientes hasta  $x = L$ . Escribamos entonces a  $\phi$  como

$$\phi = \phi_P + \phi_H \quad . \quad (5.7)$$

Entonces  $\phi_H$  debe satisfacer la ecuación homogénea

$$-\phi_{H,xx} + k\phi_H = 0 \quad \text{para } |x| < L ; \quad (5.8)$$

$$\phi'_H \pm \sqrt{k}\phi_H = -(\phi'_P \pm \sqrt{k}\phi_P) \quad \text{para } x < \pm L . \quad (5.9)$$

Pero entonces  $\phi_H$  debe tener la forma general

$$\phi_H = a e^{\sqrt{k}x} + b e^{-\sqrt{k}x} \quad ; \quad (5.10)$$

de manera que

$$\sqrt{k}(ae^{+\sqrt{k}L} - be^{-\sqrt{k}L}) + \sqrt{k}(ae^{+\sqrt{k}L} + be^{-\sqrt{k}L}) = (RHS)_{\pm} \quad ; \quad (5.11)$$

donde  $(RHS)_{\pm}$  son los miembros derechos respectivos, y se reducen simplemente a

$$\begin{cases} 2\sqrt{k}ae^{+\sqrt{k}L} = (RHS)_{+} & ; \\ -2\sqrt{k}be^{-\sqrt{k}L} = (RHS)_{-} & . \end{cases} \quad (5.12)$$

Por lo tanto, la solución es única. Ahora bien, la solución  $\phi$  del problema infinito restringida a  $|x| < L$  satisface, por lo que vimos, las condiciones para  $\phi$  y por lo tanto coincide con ésta. En conclusión: Las condiciones halladas (5.4), (5.5) son absorbentes en el sentido de que aplicándolas en  $x = \pm L$  se obtiene la misma solución que para el problema no-acotado.

### 5.2.2 Caso “hiperbólico” ( $k < 0$ )

En este caso la solución a la ecuación es de la forma,

$$\phi = a \cos \sqrt{k}x + b \sin \sqrt{k}x \quad ; \quad (5.13)$$

y ya no podemos usar el argumento de que alguno de los términos diverge para buscar la condición absorbente. Sin embargo, si  $\phi$  representa aquí el potencial en el caso del flujo potencial con superficie libre, la física del problema indica que, si el fluido se esta moviendo de izquierda a derecha, entonces

$$\begin{cases} \phi \rightarrow 0 & \text{para } x \rightarrow -\infty ; \\ |\phi| < \infty & \text{para } x \rightarrow +\infty . \end{cases} \quad (5.14)$$

Sea  $\phi_P$  una solución particular a (5.1.a). Esta solución particular puede ser encontrada imponiendo valores de  $\phi_P$  y  $\phi'_P$  en un punto dado e integrando la ecuación diferencial hacia  $x$  crecientes y decrecientes. La solución general es de la forma

$$\phi = \phi_P + e \cos \sqrt{kx} + f \sin \sqrt{kx} \quad ; \quad (5.15)$$

pero  $w \equiv 0$  para  $|x| > L$ , de manera que  $\phi_P$  admite una expansión como (5.13),

$$\phi_P = c_{\pm} \cos \sqrt{kx} + d_{\pm} \sin \sqrt{kx} \quad \text{para } \pm x > L . \quad (5.16)$$

Entonces

$$\phi = (c_{\pm} + e) \cos \sqrt{kx} + (d_{\pm} + f) \sin \sqrt{kx} . \quad (5.17)$$

Ahora bien, las condiciones de contorno corriente arriba (5.14) imponen que

$$e = -c_- \quad \wedge \quad f = -d_- \quad ; \quad (5.18)$$

de manera que  $\phi \equiv 0$  para  $x < -L$ . Entonces la *condición absorbente físicamente apropiada* para el caso hiperbólico es

$$\phi = \phi_{,x} = 0 \quad \text{para } x = -L . \quad (5.19)$$

Notemos la asimetría en cuanto a que se deben imponer dos condiciones de contorno aguas arriba pero ninguna aguas abajo.

### 5.3 Extensión al caso discreto del caso elíptico

Consideremos ahora la versión discreta del problema anterior

$$\frac{-\phi_{j+1} + 2\phi_j - \phi_{j-1}}{h^2} + k\phi_j = w_j \quad . \quad (5.20)$$

Suponemos que  $w_j$  es nulo para  $j \geq M = L/h$ , entonces para  $j \geq M$  la ecuación homogénea es

$$-\phi_{j+1} + 2\phi_j - \phi_{j-1} + kh^2\phi_j = 0 \quad . \quad (5.21)$$

Ese tipo de ecuación en diferencias la podemos resolver proponiendo soluciones de la forma  $\phi_j \sim \lambda^j$ , que reemplazando da la ecuación característica

$$\lambda^2 - 2b\lambda + 1 = 0 \quad ; \quad \text{donde } b = 1 + \frac{1}{2}kh^2 > 1 \quad . \quad (5.22)$$

Sus raíces son

$$\lambda_{\pm} = b \pm \sqrt{b^2 - 1} = 1 + \frac{1}{2}kh^2 \pm \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}kh^2\right)^2 - 1} \quad . \quad (5.23)$$

Notemos que sus raíces son reales y además  $\lambda_+ > 1$ , pero puede verse que  $\lambda_+ \lambda_- = 1$  de manera que  $0 < \lambda_- < 1$ . Ahora bien, la solución para  $j > M$  es de la forma

$$\phi_j = A\lambda_+^j + B\lambda_-^j = A\lambda_+^j + B\lambda_+^{-j} \quad ; \quad (5.24)$$

pero como queremos que la solución sea acotada para  $j \rightarrow \infty$  debe ser

$$\phi_j = B\lambda_+^{-j} \quad ; \quad (5.25)$$

de manera que

$$\phi_{M+1} - \lambda_+^{-1}\phi_M = 0 \quad (5.26)$$

parece ser una *condición absorbente discreta*. También la podemos reescribir como

$$\frac{\phi_{M+1} - \phi_M}{h} + \frac{1 - \lambda_+^{-1}}{h}\phi_M = 0 \quad ; \quad (5.27)$$

y puede verse que haciendo un desarrollo en serie de potencias de  $h$

$$\lambda_+^{-1} = \lambda_- = 1 + \frac{1}{2}kh^2 - \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}kh^2\right)^2 - 1} = 1 + \frac{1}{2}kh^2 \quad ; \quad (5.28)$$

$$-\sqrt{kh^2 + \left(\frac{1}{2}kh^2\right)^2} = 1 + \frac{1}{2}kh^2 - \sqrt{k}h\sqrt{1 + \frac{1}{4}kh^2} = 1 - \sqrt{k}h + O(h^2) \quad ; \quad (5.29)$$

es decir

$$\frac{1 - \lambda_+^{-1}}{h} = \sqrt{k} + O(h) \quad ; \quad (5.30)$$

de manera que (5.27) es equivalente a (5.4) a primer orden en  $h$ . Similarmente, la condición absorbente para  $j \rightarrow -\infty$  es

$$\phi_{-(M+1)} - \lambda_+^{-1}\phi_{-M} = 0 \quad ; \quad (5.31)$$

podemos ver que las condiciones de contorno absorbentes (5.27) y (5.31) son tales que i) la solución acotada coincide con la solución no acotada para todo  $|j| < M$ , ii) la solución no depende del punto  $M$  donde se impone la condición de contorno *independientemente de la condición de contorno empleada en el otro extremo*.

### Para $|j| < M$ ambas soluciones coinciden

En forma similar al caso continuo, podemos contruir una solución particular que satisface (5.20) pero no las condiciones de contorno. Esto se hace poniendo valores arbitrarios de  $\phi_{-(M+1)}$  y  $\phi_{-M}$  y resolviendo (5.20) para  $\phi_{j+1}$  en términos de  $\phi_j$  y  $\phi_{j-1}$  hasta  $\phi_M$ . La diferencia de la solución con las condiciones absorbentes debe ser solución de la versión homogénea de (5.20) y por lo tanto debe ser de la forma  $A\lambda_+^j + B\lambda_+^{-j}$ . Imponiendo las condiciones de contorno absorbentes sale un sistema lineal *diagonal* en  $a$  y  $b$ , con lo

cual la solución es única. Luego, la solución al problema infinito satisface las condiciones del sistema acotado con condiciones de contorno absorbentes, de lo cual se concluye el enunciado.

### La solución no depende del borde absorbente elegido

Mostremos que la solución no depende del punto en donde se impone la condición de contorno, que por brevedad podremos llamarlo como “borde absorbente”. Sean  $\phi^{(1,2)}$  las soluciones al problema discreto con condición Dirichlet en  $j = -M$  y condición absorbente en  $j = M^{1,2}$

$$\begin{cases} h^{-2} [-\phi_{j+1}^{(k)} + 2\phi_j^{(k)} - \phi_{j-1}^{(k)}] + k\phi_j^{(k)} = w_j & ; \\ \phi_{-M}^{(k)} = 0 & ; \\ \phi_{M^k+1}^{(k)} = \lambda_+^{-1}\phi_{M^k}^{(k)} & . \end{cases} \quad (5.32)$$

Asumimos que  $M^2 > M^1$  y queremos mostrar que  $\phi^{(1)}$  coincide con la restricción de  $\phi^{(2)}$  a  $-M \leq j \leq M^1$ . Ahora bien,  $\phi^{(2)}$  satisface la condición de contorno en  $-M$  y la ecuación (5.32.a) en  $-M + 1 \leq j \leq M^1 - 1$ , de manera que es suficiente mostrar que satisface la condición absorbente en  $j = M^1$  para así concluir que satisface las mismas condiciones de  $\phi^{(1)}$  y por lo tanto coinciden. Como  $w = 0$  para  $j \geq M^1$  entonces debe ser de la forma (5.24), pero la condición de contorno absorbente impone  $A = 0$ , por lo que  $\phi_j$  es de la forma (5.25) y es claro que satisface la condición de contorno también en  $j = M^1$ .

## 5.4 Extensión a sistemas en el caso elíptico

Por ejemplo, sea resolver

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \text{en } -H \leq y \leq 0 ; \\ \partial_n\phi = w & \text{en } y = 0 ; \\ \phi = 0 & \text{en } y = -H ; \end{cases} \quad (5.33)$$

en una malla homogénea con nodos  $(x_j, y_l)$  de la forma

$$\begin{cases} x_j = jh & \text{para } -\infty \leq j \leq \infty ; \\ y_l = -lh & \text{para } 0 \leq l \leq lmax . \end{cases} \quad (5.34)$$

La ecuación para el nodo interior  $(j, l)$ , para  $1 \leq l \leq (M - 1)$  es

$$\frac{\phi_{j,l+1} - 2\phi_{jl} + \phi_{j,l-1}}{h^2} + \frac{\phi_{j+1,l} - 2\phi_{jl} + \phi_{j-1,l}}{h^2} = 0 \quad . \quad (5.35)$$

Para la condición de contorno en la superficie, usamos una discretización de primer orden para  $\partial_n\phi$  y queda

$$\phi_{j0} - \phi_{j1} = w_j h \quad . \quad (5.36)$$

Puede mostrarse que agregando un término de corrección se obtiene una aproximación de segundo orden para la condición de contorno. La ecuación corregida es

$$-\frac{\phi_{j0} - \phi_{j1}}{h} + \frac{1}{2}h \frac{\phi_{j+1,0} - 2\phi_{j0} + \phi_{j-1,0}}{h^2} = w_j \quad . \quad (5.37)$$

Ahora llamemos  $\phi^j$  a un vector que contiene todos los potenciales de los nodos en la columna  $j$

$$\phi^j = [\phi_{j0} \quad \phi_{j1} \quad \dots \quad \phi_{j,M-1}]^T \quad . \quad (5.38)$$

Entonces el sistema (5.35), (5.37), puede reescribirse como

$$\mathbf{A}\phi^{j+1} - 2\mathbf{B}\phi^j + \mathbf{A}\phi^{j-1} = \mathbf{F}^j \quad ; \quad (5.39)$$

donde

$$\mathbf{A} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{2}, 1, \dots, 1 \right\} \quad ; \quad (5.40)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \dots & & \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & \dots & \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & \dots \\ & & \vdots & & & \\ & & & \dots & 0 & -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{F}^j = \begin{bmatrix} hw^j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad . \quad (5.41)$$

Multiplicando (5.39) por  $\mathbf{A}^{-1}$

$$\phi^{j+1} - 2\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\phi^j + \phi^{j-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}^j \quad . \quad (5.42)$$

Esto sugiere buscar una descomposición de la forma

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{S} \mathbf{D} \mathbf{S}^{-1} \quad ; \quad \mathbf{D} = \text{diag} \{b_i\} \quad . \quad (5.43)$$

Esto siempre es posible ya que  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$  es equivalente a una matriz simétrica y definida positiva. Efectivamente sea

$$\mathbf{A}^{1/2} = \text{diag} \{1/\sqrt{2}, 1, \dots, 1\} \quad ; \quad (5.44)$$

entonces

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{A}^{-1/2}(\mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{B}\mathbf{A}^{1/2})\mathbf{A}^{1/2} \quad . \quad (5.45)$$

Pero la matriz producto  $\mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{B}\mathbf{A}^{1/2}$  es simétrica y definida positiva, y  $\mathbf{A}^{1/2}$  es la matriz de equivalencia. Puede mostrarse también que los  $\{b_i\}$  son todos  $b_i > 1$  y asumimos que están ordenados  $b_1 < b_2 < \dots < b_n$ . Si hacemos el cambio de variable

$$\mathbf{U}^j = \mathbf{S}^{-1}\phi^j \quad ; \quad (5.46)$$

entonces la ecuación para  $\mathbf{U}^j$  se obtiene multiplicando (5.42) por  $\mathbf{S}^{-1}$

$$\mathbf{S}^{-1}\phi^{j+1} - 2(\mathbf{S}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{S})(\mathbf{S}^{-1}\phi^j) + \mathbf{S}^{-1}\phi^{j-1} = \mathbf{S}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}^j = \tilde{\mathbf{F}}^j \quad ; \quad (5.47)$$

$$\mathbf{U}^{j+1} - 2\mathbf{D}\mathbf{U}^j + \mathbf{U}^{j-1} = \tilde{\mathbf{F}}^j \quad ; \quad (5.48)$$

pero como  $\mathbf{D}$  es diagonal obtenemos para cada modo  $l$  un esquema en diferencias

$$u_l^{j+1} - 2b_l u_l^j + u_l^{j-1} = \tilde{\mathbf{f}}_l^j \quad . \quad (5.49)$$

Sea  $M$  tal que  $w = 0$  para  $|j| \geq M$ , entonces  $\tilde{\mathbf{f}}_l^j = 0$  para todo  $l$  y para  $|j| \geq M$ . Para encontrar la solución de la ecuación homogénea proponemos  $u_l^j$  de la forma

$$u_l^j = (\lambda_l)^j \quad . \quad (5.50)$$

Puede verse que los  $b_l$  son todos positivos y  $b_l > 1$  de manera que vale el razonamiento de antes y para cada  $l$  hay  $\lambda_{l\pm}$  reales y positivos tales que

$$\lambda_{l+}\lambda_{l-} = 1 \quad \wedge \quad \lambda_{l+} > 1 \quad \wedge \quad \lambda_{l-} < 1 \quad ; \quad (5.51)$$

la condición absorbente en  $j = M$  es

$$u_l^{M+1} = (\lambda_{l+})^{-1}u_l^M \quad ; \quad (5.52)$$

o sea

$$\mathbf{U}^{M+1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}^M \quad ; \quad (5.53)$$

y volviendo a la base original (variable  $\phi$ )

$$\phi^{M+1} = (\mathbf{S}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{S}^{-1})\phi^M \quad ; \quad (5.54)$$

es decir

$$\phi^{M+1} = \mathbf{C}\phi^M \quad ; \quad (5.55)$$

donde  $\mathbf{C}$  es la matriz de la condición absorbente. Nótese que en general  $\mathbf{C}$  será llena. La misma condición resulta ser absorbente para  $j \rightarrow -\infty$

$$\phi^{-(M+1)} = \mathbf{C}\phi^{-M} \quad . \quad (5.56)$$

El análisis anterior es válido en el caso en que la malla sea *no estructurada* según  $y$  (en el caso 1D sería cuando  $\Delta y \neq \text{cte}$ ) ya que las ecuaciones pueden seguir poniéndose como en (5.39) pero ahora con  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  no exactamente como en (5.40), (5.41). De todas formas los autovalores  $\{b_i\}$  de  $\tilde{\mathbf{B}}$  siguen verificando las relaciones (5.51) y todo el análisis permanece válido. En el caso 3D, la malla puede ser completamente no estructurada en el plano  $yz$ .

A diferencia con el caso estructurado, o también si usamos elementos finitos en vez de diferencias finitas, entonces  $\mathbf{A}$  puede no ser diagonal. De todas formas el uso de  $\mathbf{A}^{1/2}$  es sólo a fines de demostrar el carácter simétrico y definido positivo de  $\tilde{\mathbf{B}}$ . De

$$\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{S} = \mathbf{S}\mathbf{D} \quad \rightarrow \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad ; \quad (5.57)$$

sigue que

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1} \quad \rightarrow \quad \mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{S} = \text{diag}(d_i) \quad ; \quad (5.58)$$

por lo tanto, si  $\mathbf{v}$  es un autovector de  $\tilde{\mathbf{B}}$  asociado al autovalor  $e$ , entonces  $\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{v} = e\mathbf{v}$ , y en consecuencia

$$(\tilde{\mathbf{B}})\mathbf{v} = (\mathbf{A}^{-1})\mathbf{v} = e\mathbf{v} \quad ; \quad (5.59)$$

es decir, que en la implementación numérica lo único necesario es encontrar los autovalores y autovectores del problema de autovalores generalizado  $\mathbf{B}\mathbf{v} = e\mathbf{A}\mathbf{v}$ .

## 5.5 Expresión general para semidiscretización en $x$

Veremos ahora como surge la expresión de tipo (5.39) en un contexto más general. Para esto, consideremos que primero discretizamos en las coordenadas  $yz$ , con lo cual se obtiene un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en  $x$ , el cual es luego discretizado. Consideraremos por separado el caso de diferencias finitas y de elementos finitos.

### 5.5.1 Diferencias finitas

Podemos poner

$$\Delta\phi = \phi_{,xx} + \Delta_{yz}\phi \quad . \quad (5.60)$$

Consideremos que semi-discretizamos según  $yz$  el laplaciano por diferencias finitas y sea  $\phi$  el vector de valores nodales

$$\mathbf{K}\phi = -\mathbf{G}(x) \quad ; \quad (5.61)$$

donde  $\mathbf{G}(x)$  es el término fuente relacionado con la condición de contorno en la superficie libre y  $-\mathbf{K}$  la matriz del laplaciano bidimensional, de manera que  $\mathbf{K}$  es definida positiva. Entonces, reemplazando en (5.60)

$$\phi_{,xx} - \mathbf{K}\phi = -\mathbf{G}(x) \quad . \quad (5.62)$$

Ahora discretizando por diferencias finitas la derivada segunda según  $x$

$$\frac{\phi^{j+1} - 2\phi^j + \phi^{j-1}}{\Delta x^2} - \mathbf{K}\phi = -\mathbf{G}^j \quad ; \quad (5.63)$$

lo cual puede ser puesto en la forma (5.39) con

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad ; \quad \mathbf{B} = \left( \mathbf{I} + \frac{1}{2} \Delta x^2 \mathbf{K} \right) \quad ; \quad (5.64)$$

por lo tanto los autovalores de  $\mathbf{B}$  son reales positivos y mayores que la unidad.

### 5.5.2 Elementos finitos

La discretización en  $yz$  da

$$\mathbf{M} \phi_{,xx} - \mathbf{K} \phi = \mathbf{G}(x) \quad ; \quad (5.65)$$

donde ahora aparece la matriz de masa  $\mathbf{M}$ . Discretizando en  $x$

$$\mathbf{M} \frac{\phi^{j+1} - 2\phi^j + \phi^{j-1}}{\Delta x^2} - \mathbf{K} \frac{\phi^{j+1} + 4\phi^j + \phi^{j-1}}{6} = \mathbf{G}^j \quad ; \quad (5.66)$$

de manera que

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} - \frac{1}{6} \Delta x^2 \mathbf{K} \quad , \quad \mathbf{B} = \mathbf{M} + \frac{1}{3} \Delta x^2 \mathbf{K} \quad . \quad (5.67)$$

Los  $b_i$  son entonces, los autovalores del siguiente problema

$$\left( \mathbf{M} + \frac{1}{3} \Delta x^2 \mathbf{K} \right) \mathbf{w} = b \left( \mathbf{M} - \frac{1}{6} \Delta x^2 \mathbf{K} \right) \mathbf{w} \quad . \quad (5.68)$$

Ahora sean  $\mathbf{w}$  y  $\mu > 0$  solución del clásico problema de autovalores generalizado

$$\mathbf{K} \mathbf{w} = \mu \mathbf{M} \mathbf{w} \quad ; \quad (5.69)$$

entonces  $\mathbf{w}$  es también autovector del problema (5.68) y el autovalor correspondiente es

$$b = \frac{1 + (1/3) \Delta x^2 \mu}{1 - (1/6) \Delta x^2 \mu} > 1 \quad . \quad (5.70)$$

## 5.6 El caso mixto

Hasta ahora hemos encontrado una forma sistemática de desarrollar condiciones de contorno absorbentes basada en encontrar una expresión general para la solución de la ecuación homogénea para  $x > L$  ( $x < L$ ) e imponiendo a cero aquellos modos que divergen hacia  $x \rightarrow +\infty$  ( $x \rightarrow -\infty$ ). Ahora veremos que, incluso en una aproximación muy cruda, el problema de flujo potencial con superficie libre se caracteriza por tener soluciones propias en la forma de cosenos y senos, además de las exponenciales habituales. Como estas soluciones no se anulan ni divergen en ninguna de las direcciones, ya no podemos

aplicar el criterio habitual para obtener la condición de contorno. Por lo tanto debemos primero estudiar como se deben tratar estos modos *hiperbólicos*. Las ecuaciones de gobierno son

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \text{para } y < 0 ; \\ \phi_{,n} + K^{-1}\phi_{,xx} = \frac{U}{g}(\Delta p)_{,x} & \text{en } y = 0 . \end{cases} \quad (5.71)$$

Consideremos ahora una semi-discretización según  $y$  con  $\Delta y = \text{cte}$ . Sea  $y_j = -j\Delta y$ ,  $j = 0, 1, \dots, Q$  y que  $\phi_j(x) \approx \phi(x, y_j)$ . La aproximación a (5.71.a) es

$$\frac{\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}}{\Delta y^2} + \phi_{j,xx} = 0 \quad . \quad (5.72)$$

Para (5.71) podemos aproximar  $\partial_n\phi$  por una aproximación de primer orden en  $\Delta y$  decentrada

$$\frac{\phi_0 - \phi_1}{\Delta y} + K^{-1}\phi_{0,xx} = w \quad ; \quad (5.73)$$

donde  $w = U/g(\Delta p)_{,x}$ , pero en realidad es simple desarrollar una aproximación de segundo orden en  $\Delta y$ , si consideramos una aproximación centrada para  $\partial_n\phi$  con un nodo ficticio  $y_{-1} = \Delta y$  e imponiendo la ecuación *interior* también para  $j = 0$ . Definamos un *nodo ficticio* ubicado por encima de la superficie libre en  $y_{-1} = \Delta y$ . Entonces podemos aproximar la condición de superficie libre usando una aproximación de segundo orden para la derivada centrada

$$\frac{\phi_{-1} - \phi_1}{2\Delta y} + \tilde{\mathbf{K}}^{-1}\phi_{0,xx} = w \quad ; \quad (5.74)$$

pero hemos agregado una incógnita de manera que debemos agregar una ecuación para lo cual agregamos la ecuación para los nodos anteriores para  $j = 0$

$$\frac{\phi_{-1} - 2\phi_0 + \phi_1}{\Delta y^2} + \phi_{0,xx} = 0 \quad . \quad (5.75)$$

Después de eliminar la incógnita correspondiente al nodo ficticio queda una ecuación similar

$$\frac{\phi_0 - \phi_1}{\Delta y} + \tilde{\mathbf{K}}^{-1}\phi_{0,xx} = w \quad ; \quad (5.76)$$

donde  $\tilde{\mathbf{K}}^{-1} = 1/K - \Delta y/2$  es un valor *corregido* para  $K^{-1}$ . Esta simple modificación es suficiente para recuperar el orden  $O(\Delta y^2)$  de la aproximación. De todas formas queremos recalcar que esto no es importante en cuanto a la discusión sobre las condiciones absorbentes.

En una aproximación muy cruda, supongamos que consideramos sólo dos puntos en la discretización vertical, un nodo en la superficie libre, con potencial  $\phi_0$  y otro sumergido en  $y_1 = -\Delta y$  con potencial  $\phi_1$ . El sistema (5.72), (5.76) puede ponerse como

$$\phi_{,xx} + \mathbf{A}\phi = \mathbf{F} \quad ; \quad (5.77)$$

con

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}w \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad (5.78)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}/\Delta y & -\tilde{\mathbf{K}}/\Delta y \\ -2/\Delta y^2 & 1/\Delta y^2 \end{bmatrix} . \quad (5.79)$$

Proponiendo soluciones de la forma  $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}_0 e^{\lambda x}$  llegamos a una ecuación característica de la forma

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^2 - (\tilde{\mathbf{K}}/\Delta y + 1/\Delta y^2)\lambda - \tilde{\mathbf{K}}/\Delta y^3 = 0 \quad . \quad (5.80)$$

Pero el discriminante de su solución

$$\Delta = \tilde{\mathbf{K}}/\Delta y + 1/\Delta y^2)^2 + 4\tilde{\mathbf{K}}/\Delta y^3 > 0 \quad ; \quad (5.81)$$

por ser positivo las dos soluciones son reales. Pero como el término independiente es negativo, entonces una raíz es positiva  $\lambda_1 > 0$  y la otra es negativa  $\lambda_2 < 0$ . Esto ocurre siempre en 2D incluso cuando se consideren más grados de libertad en profundidad: *todos los modos son elípticos menos uno que es hipérbolico. En 3D hay un modo hipérbolico por cada nodo de superficie.* Ahora sea

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{S}^{-1} \quad ; \quad \boldsymbol{\Lambda} = \text{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2 \} \quad ; \quad (5.82)$$

la descomposición en autovectores de  $\mathbf{A}$ , entonces haciendo el cambio de variables  $\mathbf{U} = \mathbf{S}^{-1}\boldsymbol{\phi}$ , el sistema queda

$$\mathbf{U}_{,xx} + \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{F}} \quad ; \quad (5.83)$$

con  $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{F}$ . Como  $\boldsymbol{\Lambda}$  es diagonal, el sistema se desacopla en dos ecuaciones escalares

$$\begin{cases} u_{1,xx} + \lambda_1 u_1 = \tilde{f}_1 & ; \\ u_{2,xx} + \lambda_2 u_2 = \tilde{f}_2 & . \end{cases} \quad (5.84)$$

Ahora bien, como  $\lambda_2 < 0$  las soluciones de (5.84) para  $|x| > L$ , donde  $w \equiv 0$ , son de la forma

$$u_2 = ae^{+k_2 x} + be^{-k_2 x} \quad ; \quad (5.85)$$

donde  $k_2 = \sqrt{-\lambda_2}$ . Usando los mismos argumentos anteriores, encontramos que la condición absorbente es

$$u_{2,x} \pm k_2 u_2 = 0 \quad \text{en } x = \pm L \quad ; \quad (5.86)$$

pero para  $u_1$  la solución general para  $|x| > L$  es de la forma

$$u_1 = c_{\pm} \cos k_1 x + d_{\pm} \sin k_1 x \quad \text{para } \pm x > L \quad ; \quad (5.87)$$

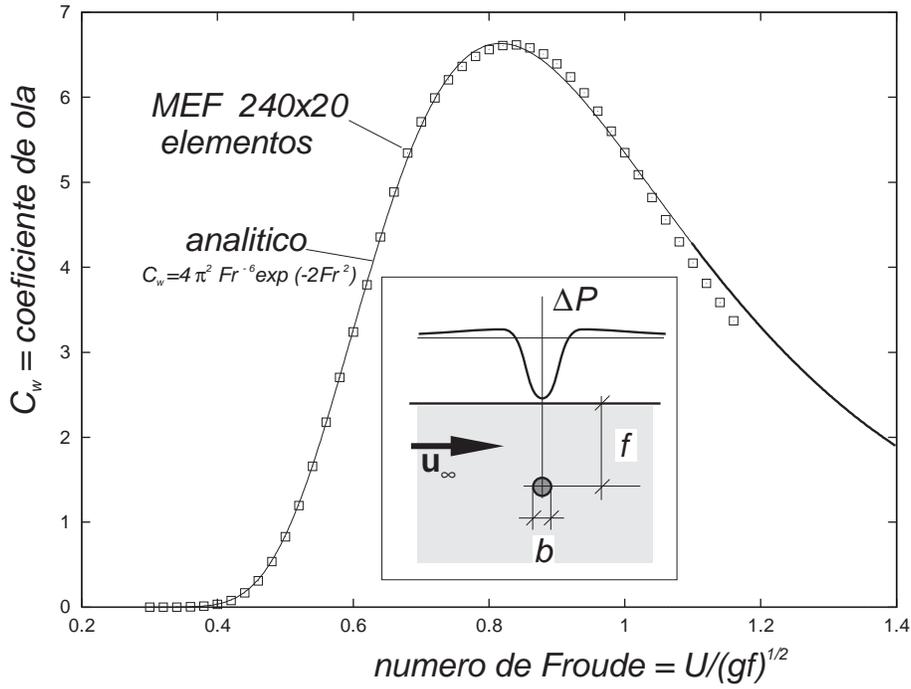


Figura 5.2: Coeficiente de arrastre de ola para el dipolo sumergido.

con  $k_1 = \sqrt{\lambda_1}$ , y debemos aplicar lo discutido para modos hiperbólicos, y las condiciones de contorno apropiadas son

$$u_1 = u_{1,x} = 0 \quad \text{en } x = -L . \quad (5.88)$$

Ahora, para poner las condiciones de contorno absorbentes en términos de las variables originales  $\phi_0, \phi_1$ , recordemos que  $\mathbf{U} = \mathbf{S}^{-1}\boldsymbol{\phi}$  para poner

$$u_1 = [1 \quad 0] \mathbf{U} = [1 \quad 0] \mathbf{S}^{-1}\boldsymbol{\phi} = \mathbf{w}_1^T \boldsymbol{\phi} . \quad (5.89)$$

Del mismo modo  $u_2 = \mathbf{w}_2^T \boldsymbol{\phi}$ , con

$$\begin{cases} \mathbf{w}_1^T = [1 \quad 0] \mathbf{S}^{-1} ; \\ \mathbf{w}_2^T = [0 \quad 1] \mathbf{S}^{-1} ; \end{cases} \quad (5.90)$$

y las condiciones de contorno absorbentes son

$$\begin{cases} \mathbf{w}_1^T \boldsymbol{\phi} = \mathbf{w}_1^T \boldsymbol{\phi}_{,x} = 0 & \text{en } x = -L ; \\ \mathbf{w}_2^T \boldsymbol{\phi}_{,x} \pm k_2 \mathbf{w}_2^T \boldsymbol{\phi} = 0 & \text{en } x = \pm L . \end{cases} \quad (5.91)$$

Nótese la asimetría: *ahora hay 3 condiciones de contorno corriente arriba y una sola corriente abajo.*

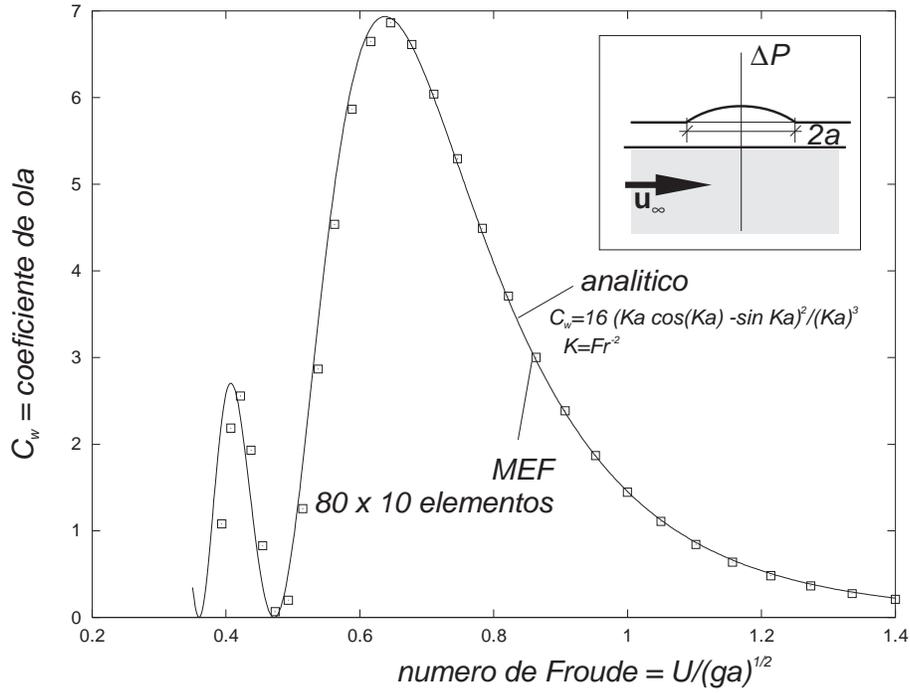


Figura 5.3: Coeficiente de arrastre de ola para una carga parabólica de presión localizada.

## 5.7 El caso discreto con varios nodos en profundidad

Consideremos ahora una malla 2D o 3D pero de tal forma que los cortes transversales  $yz$  de la malla son idénticos, y sea  $\phi^j$  el vector de potenciales en la  $j$ -ésima capa de nodos. Una vez discretizado por MEF o MDF el sistema de ecuaciones discreto puede ponerse como en (5.39) con  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  dados. La transformación (5.42) y la descomposición (5.43) siguen siendo válidas, pero ahora un cierto número  $N_{\text{hip}}$  de autovalores  $b_i$  será menor que 1 mientras que el resto será mayor que 1

$$\begin{cases} 0 < b_i < 1 & 1 \leq i \leq N_{\text{hip}} ; \\ 1 < b_i & N_{\text{hip}} + 1 \leq i \leq N_{\text{capa}} ; \end{cases} \quad (5.92)$$

donde  $N_{\text{capa}}$  es el número total de nodos en el corte (*capa*) bi-dimensional. Haciendo el cambio de variables (5.27) obtenemos una serie de ecuaciones de la forma

$$\frac{u_l^{j+1} - 2b_l u_l^j + u_l^{j-1}}{\Delta x^2} + \lambda_l u_l^j = f_l \quad . \quad (5.93)$$

Para los modos *elípticos*  $N_{\text{hip}} + 1 \leq l \leq N_{\text{capa}}$ , los autovalores  $\lambda$  de la ecuación característica son reales y mayores o menores que la unidad como en (5.51) de manera que la condición absorbente en  $j = M$  es como en (5.52)

$$u_l^{M+1} = (\lambda_+)^{-1} u_l^M \quad N_{\text{hip}} + 1 \leq l \leq N_{\text{capa}} \quad . \quad (5.94)$$

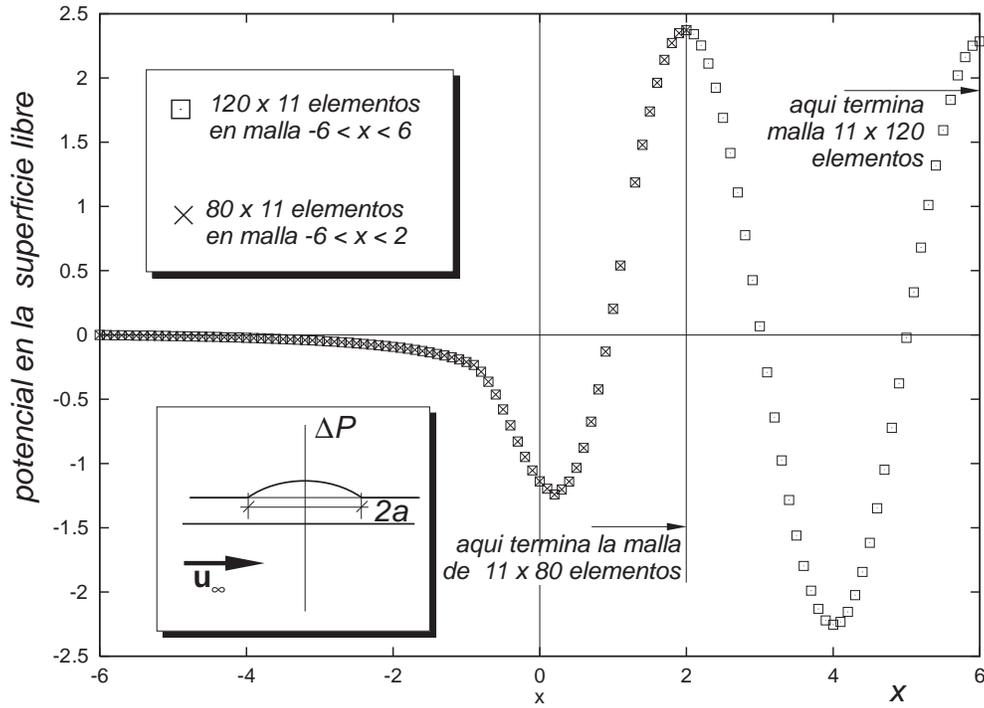


Figura 5.4: Verificación de la condición de contorno absorbente. El resultado es independiente de donde se impone la condición.

Llamemos

$$\mathbf{U}_{\text{elip}} = \begin{bmatrix} u_{N_{\text{hip}}+1} \\ u_{N_{\text{hip}}+2} \\ \vdots \\ u_{N_{\text{capa}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N_{\text{hip}} \times N_{\text{elip}}} & \mathbf{I}_{N_{\text{elip}} \times N_{\text{elip}}} \end{bmatrix} \mathbf{U} \quad ; \quad (5.95)$$

entonces

$$\mathbf{U}_{\text{elip}} = \mathbf{\Pi}_{\text{elip}} \boldsymbol{\phi} \quad ; \quad (5.96)$$

donde

$$\mathbf{\Pi}_{\text{elip}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N_{\text{hip}} \times N_{\text{elip}}} & \mathbf{I}_{N_{\text{elip}} \times N_{\text{elip}}} \end{bmatrix} \mathbf{S} \quad ; \quad (5.97)$$

de manera que las condiciones (5.94) pueden ponerse de la forma

$$\begin{cases} \mathbf{\Pi}_{\text{elip}} \boldsymbol{\phi}^{M+1} = \mathbf{\Lambda}_{\text{elip}} \mathbf{\Pi}_{\text{elip}} \boldsymbol{\phi}^M \\ \mathbf{\Pi}_{\text{elip}} \boldsymbol{\phi}^{-(M+1)} = \mathbf{\Lambda}_{\text{elip}} \mathbf{\Pi}_{\text{elip}} \boldsymbol{\phi}^{-M} \end{cases} \quad . \quad (5.98)$$

Como los modos elípticos decaen exponencialmente, también pueden reemplazarse estas condiciones simplemente por

$$\begin{cases} \mathbf{\Pi}_{\text{elip}} \boldsymbol{\phi}^{M+1} = \mathbf{0} \\ \mathbf{\Pi}_{\text{elip}} \boldsymbol{\phi}^{-(M+1)} = \mathbf{0} \end{cases} \quad . \quad (5.99)$$

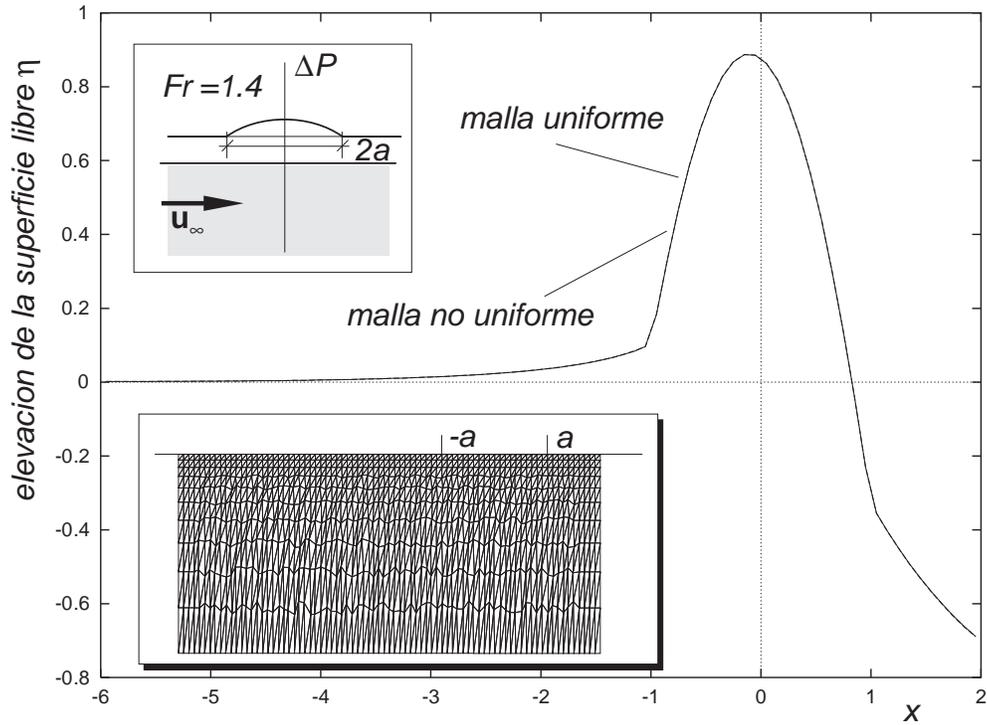


Figura 5.5: Uso de la condición absorbente con mallas que no son estructuradas en la dirección  $x$ .

Sin embargo, estas condiciones se aproximan *exponencialmente* a la condición absorbente, mientras que (5.98) pueden aplicarse tan cerca como se quiera de la perturbación mientras que se esté fuera de la misma. Para los modos *hiperbólicos* debemos imponer dos condiciones aguas arriba

$$u_{-(M+1)}^l = u_{-M}^l = 0 \quad N_{\text{hip}} + 1 \leq l \leq N_{\text{capa}} ; \quad (5.100)$$

pero análogamente (5.95), (5.97) podemos poner

$$\begin{cases} \mathbf{\Pi}_{\text{hip}} \boldsymbol{\phi}^{-(M+1)} = \mathbf{0} \\ \mathbf{\Pi}_{\text{hip}} \boldsymbol{\phi}^{-M} = \mathbf{0} \end{cases} ; \quad (5.101)$$

donde

$$\mathbf{\Pi}_{\text{hip}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_{\text{hip}} \times N_{\text{hip}}} & \mathbf{0}_{N_{\text{hip}} \times N_{\text{elip}}} \end{bmatrix} \mathbf{S}^{-1} . \quad (5.102)$$

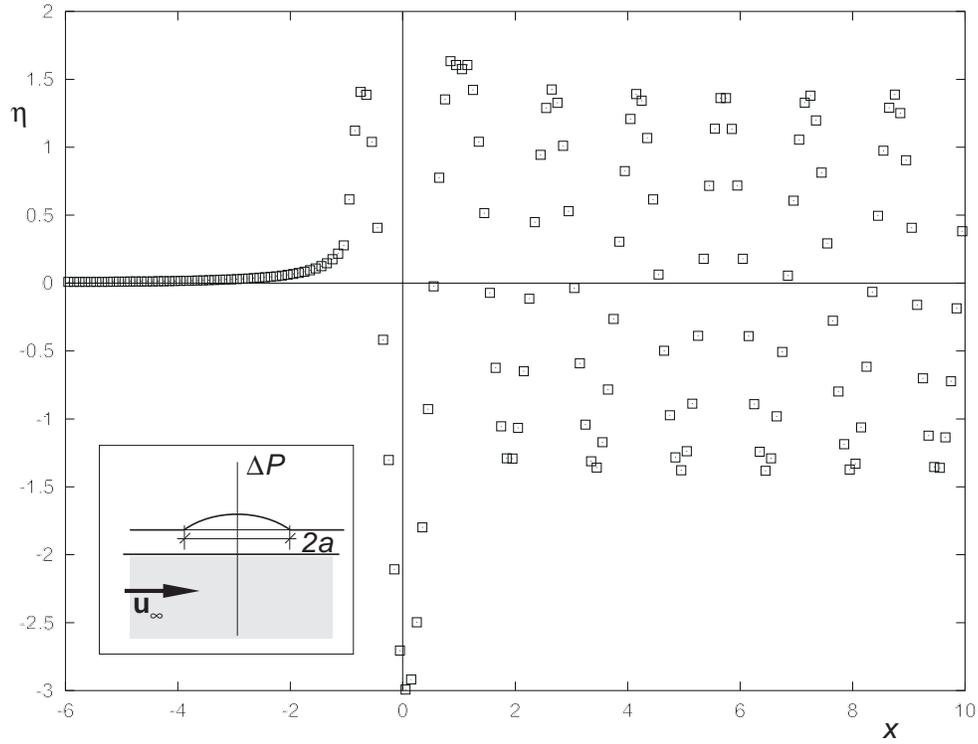


Figura 5.6: Elevación de la superficie libre. Las olas no se amortiguan con el método propuesto, y pasan el ensayo de la altura de ola constante.

## 5.8 Ejemplos numéricos

### 5.8.1 Arrastre de ola para el dipolo sumergido

En la figura 5.2 vemos el resultado de aplicar el método propuesto para obtener el arrastre de ola sobre un dipolo sumergido a una profundidad  $f$  unitaria. El dipolo puede interpretarse como el campo producido por un cilindro de radio infinitesimal  $b \ll f$  y la carga de presión que produce es deducida en el capítulo 6 (ecuación 6.65)

$$\Delta p(x) = \rho U u = -2\rho U^2 b^2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{(x + if)^2} \right\} . \quad (5.103)$$

La simulación numérica se realizó con una malla de  $2 \times 240 \times 20$  elementos triangulares, 240 en la dirección  $x$  y 20 en la dirección  $y$ , con longitud variable en profundidad. A fin de obtener una mejor aproximación, los elementos en profundidad tienen un  $\Delta y$  10 veces mayor que en la superficie  $\Delta y_{\text{fondo}}/\Delta y_{\text{sup}} = 10$ . Se usó la condición absorbente explicada en aguas abajo (5.98), mientras que aguas arriba se usó la absorbente aproximada (5.99.b) en vez de la absorbente exacta (5.98), además de las (5.101) correspondientes a los modos hiperbólicos. La ventaja es que ahora (5.101.a) en conjunción con (5.99.b) dan  $\phi^{-(M+1)} =$

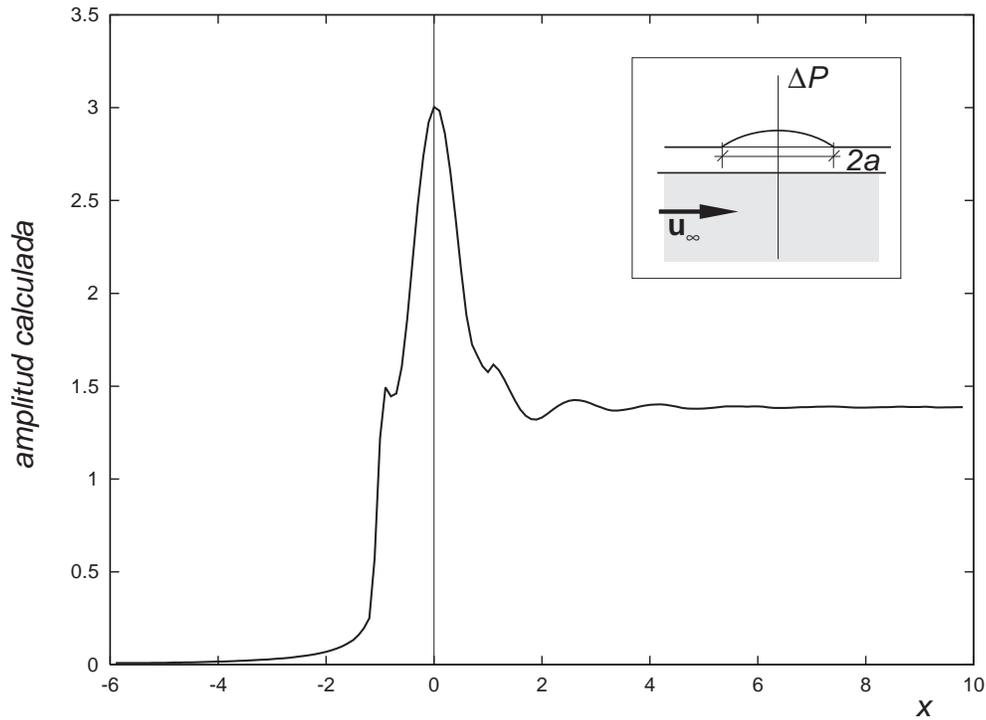


Figura 5.7: Amplitud de la ola para el problema de la carga parabólica de presión localizada.

0. La malla cubre el rectángulo  $|x| < 6$ ,  $-3 < y < 0$ , y se calculó el arrastre de ola para  $0.3 \leq Fr \leq 1.15$ , mostrada en la figura 5.2, comparada con la expresión exacta para el arrastre de ola sobre un dipolo que es deducida en el capítulo 6, ecuación (6.70),

$$C_w = 4\pi^2 Fr^{-6} e^{-2/Fr^2} ; \quad (5.104)$$

donde  $Fr = U/\sqrt{gf}$  es el número de Froude. El caso del dipolo es interesante porque *la carga de presión equivalente no se anula para  $|x| \rightarrow \infty$  y esto es lo que ocurre con los casos reales*. Vemos que de todas formas la condición absorbente es aplicable.

### 5.8.2 Carga de presión parabólica localizada

Otro ejemplo es el de una carga de presión con distribución parabólica y de soporte compacto:

$$\Delta p = \begin{cases} 1 - (x/a)^2 & \text{para } |x| < a ; \\ 0 & \text{para } |x| > a . \end{cases} \quad (5.105)$$

El coeficiente de arrastre de ola analítico también es deducido en el capítulo 6, ecuación (6.74)

$$C_w = 16 \frac{(Ka \cos Ka - \sin Ka)^2}{(Ka)^3} ; \quad (5.106)$$

donde el número de Froude  $Fr = U/\sqrt{ga}$  está basado en el semiancho  $a$  de la carga. En la figura 5.3 podemos observar el resultado por MEF para  $a = 1$  con la técnica propuesta sobre una malla de  $2 \times 80 \times 10$  elementos triangulares,  $\Delta x = \text{cte}$ ,  $\Delta y_{\text{fondo}}/\Delta y_{\text{sup}} = 10$ , que cubre la región  $-6 < x < 2$ ,  $-3 < y < 0$ .

### 5.8.3 Abscisa casi indiferente en la condición absorbente

La carga parabólica de presión localizada es un caso interesante porque al ser  $\Delta p = 0$  para  $|x| > a$ , podemos acercar la frontera aguas abajo tan cerca como queramos, en tanto no entremos en la región  $|x| < 1$  donde el término fuente ( $\sim (\Delta p)_{,x}$ ) es no nulo. Como en los casos anteriores, en aguas arriba usamos la condición de contorno absorbente aproximada, de manera que allí no podemos acercar la frontera arbitrariamente. Para verificar esto, calculamos la carga parabólica localizada a  $Fr = 0.8$  con dos mallas. La primera tiene  $2 \times 80 \times 10$  elementos triangulares, 80 capas equiespaciadas  $\Delta x = 0.1 = \text{cte}$  según  $x$  y 10 capas refinadas hacia la superficie  $\Delta y_{\text{fondo}}/\Delta y_{\text{sup.libre}} = 10$ , cubriendo  $-6 < x < 2$ ,  $-3 < y < 0$ . La segunda consiste en agregar 40 capas más de nodos según  $x$  a la primera malla hasta  $x = 6$ . En ambos casos se impuso las mismas condiciones de contorno anteriores, es decir la absorbente (5.98) aguas abajo, mientras que aguas arriba se usó la absorbente aproximada (5.99.b) en vez de la absorbente exacta (5.98) además de la (5.101) correspondiente a los modos hiperbólicos. En la figura 5.4 vemos el potencial en la superficie libre versus  $x$  para los dos casos. Ambos coinciden a precisión de máquina, así como también coinciden los coeficientes de arrastre de ola calculados con ambas mallas.

### 5.8.4 Mallas no uniformes

El objetivo de este ejemplo es demostrar que, si bien el algoritmo fue diseñado para mallas uniformes, lo único necesario es tener varias capas de elementos iguales tanto en la frontera aguas abajo como aguas arriba, *pero que en la zona intermedia la malla puede ser completamente irregular*. En la figura 5.5 vemos la elevación de la superficie libre para el caso de la carga parabólica de presión localizada a  $Fr = 1.4$  con dos mallas de  $2 \times 80 \times 10$  elementos triangulares entre  $-6 \leq x \leq 2$ . La primera malla es uniforme, con  $\Delta x = \text{cte}$  y  $\Delta y$  variable según  $y$  pero no según  $x$ . La segunda malla fue generada a partir de la primera agregando una perturbación aleatoria a los nodos interiores de la malla anterior para generar una malla irregular. Se dejaron 5 capas de elementos uniformes tanto a la entrada como a la salida. En dicha figura se muestra la malla irregular y la elevación de potencial obtenida por ambas mallas, las cuales no se llegan a distinguir entre sí. La diferencia en elevación es menor en valor absoluto a  $10^{-3}$ . En cuanto al arrastre de ola,

el resultado con la malla irregular es  $C_w = 0.2104$  contra 0.2099 para la malla irregular, mientras que el valor teórico es de 0.2240. Puede decirse que la variación es despreciable con respecto al error de discretización.

### 5.8.5 Las olas no se amortiguan

Para los autovalores hiperbólicos  $b_i < 1$  y puede comprobarse que las raíces  $\lambda$  de la ecuación característica correspondiente (5.22) son de módulo unitario, con lo cual su amplitud no decae. Esto indica que con la condición de contorno absorbente propuesta, al no ser necesario agregar términos contracorriente, *las olas aguas abajo no sufren amortiguación numérica*. En la figura 5.6 mostramos la elevación  $\eta$  producida por una carga de presión localizada con  $a = 1$  y  $Fr = 0.5$ , obtenido en una malla de  $2 \times 160 \times 10$  elementos triangulares uniformes. A simple vista, podemos verificar que las olas aguas abajo de la perturbación prácticamente no se amortiguan, por lo que el esquema numérico propuesto pasa el *ensayo de la altura de ola constante* introducido en el capítulo 3. Hemos visto que, en la región donde ya no hay carga de presión, la expresión para los vectores de potencial en cada columna  $j$  tiene los términos sinusoidales de los modos hiperbólicos, más términos exponenciales que decaen hacia al infinito aguas abajo. Suficientemente lejos de la perturbación los potenciales nodales, y por lo tanto la elevación, serán de la forma

$$\eta_j \approx \eta_\infty \sin(K_{\text{num}}x_j + \varphi) \quad ; \quad (5.107)$$

donde  $e^{iK_{\text{num}}\Delta x} = \lambda_{N_{\text{hip}}}$  es el (único ya que estamos en 2D) autovalor hiperbólico, y  $\varphi$  es una fase arbitraria. Pero puede verse entonces que

$$\sqrt{\eta_j^2 + \left(\frac{\eta_{j+1} - \eta_{j-1}}{\sin K_{\text{num}}\Delta x}\right)^2} = \text{cte} = \eta_\infty \quad . \quad (5.108)$$

En la figura 5.7 podemos ver como varía esta cantidad y comprobar que efectivamente se aproxima a una constante para  $x \rightarrow +\infty$ . Esto muestra que el *método propuesto no exhibe ningún tipo de amortiguamiento numérico*.

# Capítulo 6

## Cálculo analítico por Fourier

### 6.1 Cálculo de la altura de ola

Nos concentramos en un cálculo analítico de la resistencia de ola en algunos casos simples mediante la transformada de Fourier. Estos casos simples son de naturaleza bidimensional y los empleamos para validación de los códigos numéricos. Para tal fin, consideremos el sistema de ecuaciones gobernantes linealizado para el potencial (de perturbación)  $\phi(x, z)$

$$\begin{cases} \phi_{,xx} + \phi_{,zz} = 0 & \text{en } z < 0 ; \\ \phi_{,z} + K^{-1}\phi_{,xx} = (\Delta P)_{,x} U/(\rho g) & \text{en } z = 0 . \end{cases} \quad (6.1)$$

con  $-\infty < x < \infty$ , donde  $K = g/U^2$  es el número de onda característico,  $U$  la rapidez no perturbada,  $\rho$  la densidad y  $g$  la aceleración de la gravedad. El eje  $x$  es paralelo a la velocidad no perturbada  $\mathbf{U}$  y el eje  $z$  positivo hacia arriba. Proponemos una descomposición en ondas planas en la forma

$$\phi(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(k, z) e^{ikx} dk ; \quad (6.2)$$

$$\Delta P(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\Delta P}(k, 0) e^{ikx} dk . \quad (6.3)$$

Derivando  $\Delta P(x, 0)$  con respecto a  $x$

$$\frac{\partial \Delta P}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} (ik) \widehat{\Delta P}(k, 0) e^{ikx} dk ; \quad (6.4)$$

reemplazando (6.2) en la ecuación de Laplace (6.1.a) resulta

$$\frac{d^2 \hat{\phi}}{dz^2} - k^2 \hat{\phi} = 0 \quad \text{para } z \leq 0 ; \quad (6.5)$$

cuya solución es

$$\hat{\phi}(k, z) = C e^{k|z|} \quad \text{para } z \leq 0 . \quad (6.6)$$

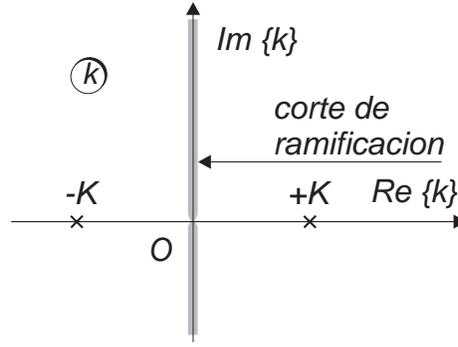


Figura 6.1: El núcleo  $S(k)$  tienen un corte de ramificación sobre el eje imaginario y dos polos aislados en  $k = \pm K$ .

Reemplazando (6.2) y (6.4) en la condición de superficie libre (6.1.b) tendremos

$$\frac{d\hat{\phi}}{dz} - K^{-1}k^2\hat{\phi} - \frac{ikU}{\rho g}\widehat{\Delta P} = 0 \quad \text{para } z \leq 0 ; \quad (6.7)$$

y teniendo en cuenta (6.6) resulta

$$\hat{\phi}(k, z) = \frac{iUk}{\rho g(|k| - K^{-1}k^2)}\widehat{\Delta P}(k, z) e^{|k|z} . \quad (6.8)$$

Introduciendo (6.8) en (6.2), tendremos para  $z = 0$

$$\phi(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ikU}{\rho g(|k| - K^{-1}k^2)}\widehat{\Delta P}(k, 0)e^{ikx} dk ; \quad (6.9)$$

donde

$$\widehat{\Delta P}(k, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta P(x, 0)e^{-ikx} dx ; \quad (6.10)$$

es analítica en todo el plano complejo  $k$ , de modo que podemos entonces considerar a (6.9) como una integral de línea en dicho plano. El factor  $e^{ikx}$  también es analítico en el mismo plano, mientras que para el núcleo  $S(k) = ikU/(|k| - K^{-1}k^2)$  debemos primero definir como extendemos  $|k|$  a todo el plano complejo  $k$ . Una forma natural de hacerlo es

$$|k| = \begin{cases} +k & \text{si } \text{Re}(k) > 0 ; \\ -k & \text{si } \text{Re}(k) < 0 . \end{cases} \quad (6.11)$$

De esta forma  $|k|$  tiene un *corte de ramificación (branch-cut)* en todo el eje imaginario. Entonces, el núcleo  $S(k)$  también tiene un corte de ramificación sobre el eje imaginario y además dos polos aislados en  $k = \pm K$ , ver figura 6.1. Ahora bien, el camino de integración para (6.10) es el eje real y por lo tanto pasa por los dos polos de manera que debemos definir cómo consideramos los residuos en los mismos. Si consideremos que el camino pasa

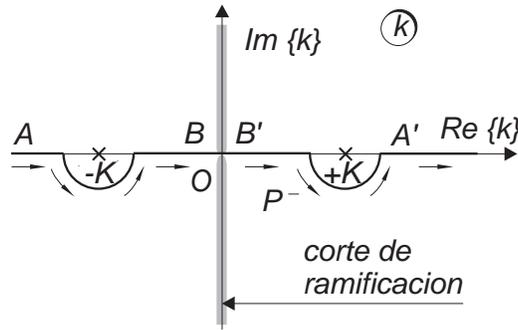


Figura 6.2: Camino de integración  $P^-$  que *deja a los polos a la izquierda*.

por el medio del polo, y además  $\Delta P$  es simétrica, entonces  $\phi$  será simétrica y sabemos que éste es un resultado incorrecto, por lo cual tomemos un camino de integración  $P^-$  que *deja a los polos a la izquierda*, ver figura 6.2. En primer lugar consideremos el valor de la integral para  $x < 0$ . En tal caso, deformemos el dominio de integración  $P^-$  a un camino  $P_{(-\delta)}^-$  compuesto de cuatro subcaminos  $P_{(-\delta)}^- = BC + CO + OC' + C'B'$ , ver figura 6.3, donde notemos que también incluimos el camino  $COC'$  para rodear al corte. Tendremos

$$\phi(x) = \int_{P_{(-\delta)}^-} H dk = \int_{BC+C'B'} H dk + \int_{CO+OC'} H dk = \phi_1(x) + \phi_2(x) ; \quad (6.12)$$

donde

$$H(k) = \frac{ikU}{\rho g(|k| - K^{-1}k^2)} \widehat{\Delta P}(k) e^{ikx} . \quad (6.13)$$

La contribución de los dos segmentos  $BC, C'B'$ , donde  $k'' = \text{Im}(k) < -\delta$ , es

$$|e^{ikx}| = e^{-|k''||x|} < e^{-\delta|x|} ; \quad (6.14)$$

de manera que tomando el límite para  $x \rightarrow \infty$ , la contribución de la primera integral tiende a cero, en la forma  $\phi_1(x) < C_1 e^{-\delta|x|}$ . Por otra parte, la contribución de la segunda integral la podemos estimar como  $\phi_2(x) < C_2 \delta$ , debido a la ecuación (6.9), de modo que

$$\phi(x) \leq C_1 e^{-\delta x} + C_2 \delta ; \quad (6.15)$$

tomando  $\delta = |x|^{-1/2}$  tendremos  $\phi(x) \rightarrow 0$  para  $x \rightarrow -\infty$ . Ahora, consideremos el caso  $x > 0$ . El camino es el  $P_{(+\delta)}^-$ , ver figura 6.4. Como es usual en la teoría de variable compleja, las contribuciones alrededor de los polos son equivalentes al residuo en los mismos. Por otra parte, la contribución en los caminos  $ABO$  y  $OB'A'$  pueden estimarse como antes, de modo que tienden a cero para  $x \rightarrow +\infty$ . La contribución de los residuos son

$$\int_{P_{(+K)} + P_{(-K)}} H(k) dk = 2\pi i \text{Res} \{H(k), +K\} + 2\pi i \text{Res} \{H(k), -K\} . \quad (6.16)$$

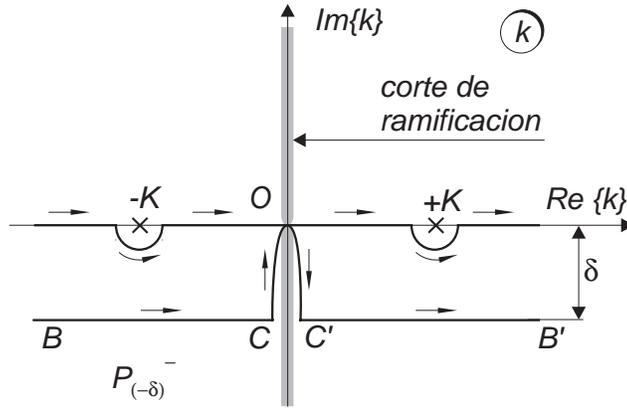


Figura 6.3: Camino de integración  $P_{(-\delta)}^-$  con los polos a la izquierda y para  $x < 0$ .

En un entorno de  $k = +K$ , el polo proviene del denominador ( $|k| - K^{-1}k^2$ ) el cual lo re-escribimos como

$$|k| - K^{-1}k^2 = -(k/K)(k - K) \quad ; \quad (6.17)$$

y entonces

$$\text{Res} \{H(k), +K\} = \frac{ikU}{\rho g(-k/K)} \widehat{\Delta P}(k) e^{ikx} \Big|_{k=K} = -\frac{iKU}{\rho g} \widehat{\Delta P}(K) e^{iKx} \quad . \quad (6.18)$$

Análogamente, alrededor del polo  $k = -K$

$$|k| - K^{-1}k^2 = (-k/K)(k + K) \quad ; \quad (6.19)$$

y

$$\text{Res} \{H(k), -K\} = \frac{ikU}{\rho g(-k/K)} \widehat{\Delta P}(k) e^{ikx} \Big|_{k=-K} = -\frac{iKU}{\rho g} \widehat{\Delta P}(-K) e^{-iKx} \quad ; \quad (6.20)$$

de manera que

$$\phi(x) = A [\Delta P(K) e^{iKx} + \Delta P(-K) e^{-iKx}] \quad . \quad (6.21)$$

donde  $A = 2\pi KU/(\rho g) = 2\pi/(\rho U)$ . Resumiendo, la solución para un camino como el  $P^-$  es de la forma (ver figura 6.2)

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \rightarrow -\infty ; \\ 2A \text{Re}\{\Delta P(K) e^{iKx}\} & \text{para } x \rightarrow +\infty . \end{cases} \quad (6.22)$$

Como  $\Delta P(x)$  es real entonces  $\Delta P(-K) = \overline{\Delta P(-K)}$ . Por el contrario, si usáramos un camino que deja a los polos a la derecha, entonces la solución sería

$$\phi(x) = \begin{cases} 2A \text{Re}\{\Delta P(K) e^{iKx}\} & \text{para } x \rightarrow -\infty ; \\ 0 & \text{para } x \rightarrow +\infty . \end{cases} \quad (6.23)$$

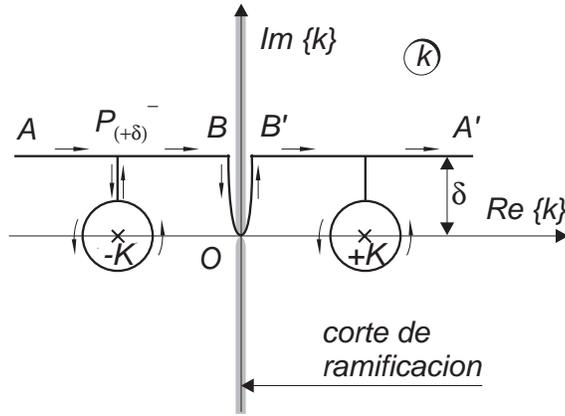


Figura 6.4: Camino de integración  $P_{(+\delta)}^-$  con los polos a la izquierda y para  $x > 0$ .

Sabemos que la solución con sentido físico es la que corresponde al primer caso, es decir, alrededor del camino  $P^-$ ,

$$\phi(x) = \int_{P^-} \frac{ikU}{\rho g(|k| - K^{-1}k^2)} \widehat{\Delta P}(k) e^{ikx} dk \quad . \quad (6.24)$$

La elevación  $\eta$  la obtenemos de

$$\eta = -\frac{U}{g} \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{4\pi}{\rho g} \text{Re}[iK \widehat{\Delta P}(K) e^{iKx}] = \frac{4\pi}{\rho U^2} \text{Im}[\Delta P(K) e^{iKx}] \quad . \quad (6.25)$$

y la amplitud de la ola es

$$\bar{\eta} = \frac{4\pi}{\rho U^2} |\widehat{\Delta P}(K)| \quad \text{para } x \rightarrow \infty \quad . \quad (6.26)$$

Ahora, en cuanto al cálculo de la resistencia de ola, esta claro que de (6.22) conocemos la amplitud de la ola para  $x \rightarrow \infty$ , y sabemos bien que a partir de esto podemos calcular la resistencia de ola, sin interesar el detalle del perfil de elevación en la zona de transiente. Sin embargo, llegaremos a esta misma conclusión pero a partir de una deducción basada puramente en el desarrollo de la expresión (6.23).

## 6.2 Cálculo de la resistencia de ola

La resistencia de ola por unidad de área transversal se puede calcular a partir de la expresión

$$F_x = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta P \frac{\partial \eta}{\partial x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta P \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{\rho g} \Delta P - \frac{U}{g} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] dx \quad . \quad (6.27)$$

Pero la contribución del primer término es nulo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta P \frac{\partial \Delta P}{\partial x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta P^2}{\partial x} dx = \frac{1}{2} \Delta P^2 \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0 \quad ; \quad (6.28)$$

desde que suponemos que  $\Delta P$  tiene soporte compacto, de modo que

$$F_x = -\frac{U}{g} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta P \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx \quad . \quad (6.29)$$

Pero de (6.23)

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \int_{P^-} F(k) \widehat{\Delta P}(k) e^{ikx} dk \quad ; \quad (6.30)$$

donde

$$F(k) = \frac{(ik)^3 U}{\rho g (|k| - K^{-1} k^2)} \quad ; \quad (6.31)$$

reemplazando  $\widehat{\Delta P}$  por su transformada inversa de Fourier

$$\widehat{\Delta P} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta P(x) e^{-ikx} dx \quad ; \quad (6.32)$$

tendremos

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-x') \Delta P(x') dx' \quad ; \quad (6.33)$$

donde

$$G(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{P^-} F(k) e^{ik\xi} dk \quad . \quad (6.34)$$

Ahora mostremos que si descomponemos  $G = G_s + G_a$ , donde  $G_s, G_a$  son sus componentes simétrica y antisimétrica, respectivamente, entonces la parte antisimétrica no contribuye en el cálculo de la resistencia de ola. Efectivamente de (6.28)

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{U}{g} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta P \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx \\ &= -\frac{U}{g} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta P(x) G(x-x') \Delta P(x') dx dx' \\ &= -\frac{U}{g} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta P(x) G_s(x-x') \Delta P(x') dx dx' + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta P(x) G_a(x-x') \Delta P(x') dx dx' \right] . \end{aligned} \quad (6.35)$$

Pero, intercambiando las variables de integración  $x$  y  $x'$  en el término que involucra  $G_a$  vemos que

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta P(x) G_a(x-x') \Delta P(x') dx dx' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta P(x') G_a(x'-x) \Delta P(x) dx' dx = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta P(x) G_a(x-x') \Delta P(x') dx dx' \quad ; \end{aligned} \quad (6.36)$$

desde  $G_a(-\xi) = -G_a(\xi)$ , de modo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta P(x) G_a(x-x') \Delta P(x') dx dx' \equiv 0 \quad ; \quad (6.37)$$

y entonces sólo la parte simétrica  $G_s$  es relevante para el cálculo de la resistencia de ola

$$F_x = -\frac{U}{g} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta P(x) G_s(x-x') \Delta P(x') dx dx' . \quad (6.38)$$

Por otra parte, la parte simétrica  $G_s$  la obtenemos como

$$G_s(\xi) = G(\xi) + G(-\xi) ; \quad (6.39)$$

donde  $G(\xi)$  está definido por (6.34) y consecuentemente

$$G(-\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{P^-} F(k) e^{-ik\xi} dk . \quad (6.40)$$

Con el cambio de variables  $u = -k$  tendremos

$$\begin{cases} dk = -du & ; \\ F(-k) = F(u) & ; \\ \exp(-ik\xi) = \exp(iku) & ; \\ \int_{P^-} = -\int_{P^+} & ; \end{cases} \quad (6.41)$$

y entonces

$$G(-\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{P^+} F(k) e^{ik\xi} dk ; \quad (6.42)$$

reemplazando obtenemos la integral de contorno

$$G(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} F(k) e^{ik\xi} dk ; \quad (6.43)$$

donde  $\Gamma$  es el camino neto compuesto por  $\Gamma = \Gamma^+ + \Gamma^-$  y  $\Gamma^\pm$  son pequeños círculos alrededor de cada polo. Ahora, a partir del teorema del residuo

$$G_s(\xi) = \frac{i}{2} (F^+ + F^-) ; \quad (6.44)$$

donde

$$F^\pm = \text{Res} \{ F(k) e^{ik\xi}, \pm K \} . \quad (6.45)$$

Sabemos que  $e^{ik\xi}$  es analítica en  $\pm K$  y entonces

$$\text{Res} \{ F(k) e^{ik\xi}, \pm K \} = e^{iK\xi} \text{Res} \{ F(k), \pm K \} ; \quad (6.46)$$

y además, como  $F(k)$  tiene polos aislados en  $\pm K$ , el residuo puede expresarse de la forma

$$\text{Res} \{ F, \pm K \} = \lim_{k \rightarrow \pm K} (k \mp K) F(k) ; \quad (6.47)$$

pero con el cambio de variable  $u = -k$  y observando de (6.30) que  $F$  es antisimétrica, esto es,  $F(-u) = -F(u)$ , tendremos

$$\text{Res} \{ F, -K \} = \lim_{k \rightarrow -K} (k + K) F(k) ; \quad (6.48)$$

$$\text{Res} \{F, -K\} = \lim_{-u \rightarrow -K} (-u + K)F(-u) ; \quad (6.49)$$

$$\text{Res} \{F, -K\} = \lim_{u \rightarrow K} (u - K)F(u) ; \quad (6.50)$$

y entonces

$$\text{Res} \{F, -K\} = \text{Res} \{F, +K\} ; \quad (6.51)$$

de manera que el término simétrico  $G_s$  puede escribirse como

$$G_s(\xi) = i \text{Res} \{F, +K\} \cos(K\xi) ; \quad (6.52)$$

donde solo nos resta evaluar explícitamente el residuo

$$\text{Res} \{F, K\} = \lim_{k \rightarrow K} (k - K) \frac{(ik)^3 U}{\rho g (|k| - K^{-1}k^2)} ; \quad (6.53)$$

$$\text{Res} \{F, K\} = \lim_{k \rightarrow K} (k - K) \frac{(ik)^3 U}{\rho g (-k/K)(k - K)} ; \quad (6.54)$$

o sea

$$\text{Res} \{F, K\} = \frac{iK^3 U}{\rho g} = \frac{iK^2}{\rho U} . \quad (6.55)$$

Reemplazando obtenemos

$$G_s(\xi) = -\frac{K^2}{\rho U} \cos(k\xi) . \quad (6.56)$$

Insertando este resultado en (6.38)

$$F_x = \frac{K^2}{\rho g} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta P(x) \Delta P(x') \cos K(x - x') dx dx' . \quad (6.57)$$

Ahora bien, como  $\sin(K\xi)$  es antisimétrica, podemos reemplazar el coseno por la exponencial compleja

$$F_x = \frac{K^2}{\rho g} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta P(x) \Delta P(x') e^{iK(x-x')} dx dx' ; \quad (6.58)$$

es decir

$$F_x = \frac{4\pi^2 K^2}{\rho g} \widehat{\Delta P}(K) \overline{\widehat{\Delta P}(K)} ; \quad (6.59)$$

$$F_x = \frac{4\pi^2 K^2}{\rho g} |\widehat{\Delta P}(K)|^2 ; \quad (6.60)$$

donde

$$\widehat{\Delta P}(K) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta P(x) e^{-iKx} dx . \quad (6.61)$$

Finalmente, esto puede ponerse en términos de la amplitud de la ola  $\bar{\eta}$  (6.26) como

$$F_x = \frac{1}{4} \rho g \bar{\eta}^2 . \quad (6.62)$$

el cual es un resultado bien conocido (eg. Landweber, pp. 13.28).

## 6.3 Dipolo sumergido

El potencial complejo producido por un dipolo ubicado a una profundidad  $f$  con respecto a la superficie  $z = 0$  es

$$\phi(t) = U^2 b \left( \frac{1}{t + if} + \frac{1}{t - if} \right) ; \quad (6.63)$$

donde  $t = x + iz$  es la variable compleja,  $U^2 b$  es la *intensidad del dipolo*, por el cual un cilindro de radio  $b$  puede reemplazarse por un dipolo de intensidad  $U^2 b$ . La velocidad es

$$w = u - iv = \frac{d\phi}{dt} = -U^2 b \left( \frac{1}{(t + if)^2} + \frac{1}{(t - if)^2} \right) . \quad (6.64)$$

Para el cálculo de la resistencia de ola nos interesa el valor en el plano  $z = 0$ ,

$$\Delta P(x) = \rho U u = -\rho U^2 b^2 \left[ \frac{1}{(x + if)^2} + \frac{1}{(x - if)^2} \right] ; \quad (6.65)$$

de manera que su transformada es

$$\widehat{\Delta P}(k) = -\frac{\rho U^2 b^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{(x + if)^2} + \frac{1}{(x - if)^2} \right] e^{-ikx} dx . \quad (6.66)$$

Obviamente podemos considerar a esta expresión como una integral sobre el plano complejo. Ahora bien, para  $k < 0$  consideremos un camino  $P$  donde sobre una recta  $AB$  tendremos  $z = \text{Im}(t) = \text{cte} > 0$  entonces

$$|e^{-ikt}| = e^{-|k|z} ; \quad (6.67)$$

y por lo tanto la integral tiende a cero para  $z \rightarrow \infty$ . Entonces

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta P}(k) &= -i\rho U^2 b^2 \text{Res} \left\{ \frac{e^{-ikt}}{(t - if)^2}, if \right\} = -i\rho U^2 b^2 \text{Res} \left\{ \frac{e^{-ik(t-if)}}{(t - if)^2} e^{kf}, if \right\} \\ &= -i\rho U^2 b^2 e^{kf} \text{Res} \left\{ \frac{e^{-ik\xi}}{\xi^2}, 0 \right\} = -i\rho U^2 b^2 e^{kf} \text{Res} \left\{ \frac{1 - ik\xi + \dots}{\xi^2}, 0 \right\} \\ &= -i\rho U^2 b^2 e^{kf} (-ik) = -\rho U^2 b^2 k e^{kf} . \end{aligned} \quad (6.68)$$

Como  $\Delta P$  es real y par, entonces debe ser  $\widehat{\Delta P}(k)$  real y par, de manera que la expresión para la transformada para todo  $k$  es

$$\widehat{\Delta P}(k) = \rho U^2 b^2 |k| e^{-|k|f} ; \quad (6.69)$$

reemplazando en (6.57) y adimensionalizando por  $\rho U^2 b$

$$C_w = \frac{1}{\rho U^2 b} \frac{4\pi^2 K^2}{\rho g} \rho^2 U^4 b^4 K^2 e^{-2Kf} = 4\pi^2 \left( \frac{b}{f} \right)^3 \left( \frac{f}{K^{-1}} \right)^3 e^{-2f/K^{-1}} ; \quad (6.70)$$

que es la clásica expresión (Lamb 1945, Landweber 1961) para el coeficiente de arrastre de ola de un cilindro de radio  $b$ , dispuesto en posición horizontal en una corriente uniforme de velocidad no perturbada  $U$ , y sumergido a una profundidad  $f$ , con respecto a la superficie de equilibrio hidrostático cuando no hay olas, donde  $K = g/U^2$  es el número de onda característico.

## 6.4 Carga de presión parabólica localizada

Consideremos una distribución de presión suave y de soporte compacto de la forma

$$\Delta P = \begin{cases} \overline{\Delta P}[1 - (x/a)^2] & \text{si } |x| < a ; \\ 0 & \text{si } |x| > a . \end{cases} \quad (6.71)$$

Su transformada de Fourier es

$$\widehat{\Delta P}(k) = -4a\overline{\Delta P} \frac{ka \cos ka - \sin ka}{(ka)^3} ; \quad (6.72)$$

y la resistencia de ola resulta ser, reemplazando en (6.57),

$$F_x = \frac{16(Ka)^2 \overline{\Delta P}^2}{\rho g} \left( \frac{Ka \cos Ka - \sin Ka}{Ka^3} \right)^2 . \quad (6.73)$$

Definimos un coeficiente de resistencia de ola con

$$C_w = \frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho U^2 2a} = 16(\Delta P^*)^2 \frac{(Ka \cos Ka - \sin Ka)^2}{(Ka)^3} ; \quad (6.74)$$

donde  $\Delta P^* = \overline{\Delta P}/(\rho g a)$ . Notemos que definiendo al número de Froude como  $\text{Fr} = U/\sqrt{g a}$ , entonces  $Ka = 1/\text{Fr}^2$ .

# Capítulo 7

## Método de paneles estándar

### 7.1 Introducción

Dado que el Método de Elementos Finitos (MEF) es relativamente bien conocido, pero el Método de los Elementos de Borde/paneles (MEB) es quizás un poco menos difundido, en este capítulo haremos una exposición de su formulación para el problema del *flujo básico* o problema estándar 3D, donde el problema de flujo lo hemos reducido a su más simple nivel de descripción, dado por el flujo exterior a un objeto sin superficies libres, donde supondremos que el fluido es invíscido e incompresible, mientras que el flujo es irrotacional, subsónico y estacionario. Matemáticamente se reduce al problema de Neumann exterior para el laplaciano del potencial de velocidades, el cual es equivalente a la formulación integral de Morino basada en la tercera identidad de Green para el laplaciano. Esta formulación de Morino es una ecuación integral de segunda especie sobre las superficies de discontinuidad del flujo, en donde participan dos ciertos tipos de *densidades superficiales de carga*, de una capa (*monopolar o 1-polar*), y de dos capas (*dipolar o 2-polar*). La primera de ellas es conocida por la introducción de las condiciones de borde, mientras que la segunda de ellas es la solución a buscar de la ecuación integral. Su discretización la hacemos mediante un método de paneles de *bajo orden (geométrico y funcional)* en el cual, i) la superficie la aproximamos mediante una *poliédrica o malla*, donde sus caras planas son los *paneles* y sus vértices son los *nodos*, ii) mientras que las dependencias funcionales las aproximamos con funciones constantes a trozos, mediante densidades superficiales de carga monopolar/dipolar *constantes* sobre cada panel. Una ventaja de esta doble elección es que nos permite la integración exacta de los coeficientes de influencia 1-polar y 2-polar. A continuación, mediante colocación por puntos en los *centroides* de los paneles, construimos un sistema de ecuaciones algebraicas lineales, en general denso y no simétrico, donde la matriz del sistema es cuadrada y de dimensión igual al número de paneles

presente, sistema que podemos resolver, en principio, tanto con métodos directos como iterativos. Una vez obtenida la solución dipolar procedemos al cálculo de la velocidad, donde consideramos una forma *debilitada* para el cómputo del coeficiente de presión en los vértices de la poliédrica, apto para mallas superficiales no estructuradas.

Como es conocido, los problemas de flujo alrededor de objetos pueden ser modelados matemáticamente mediante ecuaciones en derivadas parciales de variada complejidad, las cuales pueden ser resueltas en forma aproximada por una extensa variedad de métodos numéricos. Esta resolución aproximada permite obtener valores de los parámetros de interés para el cálculo y diseño ingenieril, tal que sean razonablemente representativas de los correspondientes valores del flujo real. Las ecuaciones que en definitiva son empleadas aproximan las ecuaciones de flujo mas completas, porque tarde o temprano ciertos términos son ignorados o reemplazados por aproximaciones que se justifican o no por posteriores validaciones experimentales. Su elección representa una solución de compromiso múltiple entre diversos factores pudiendo citar, entre otros, grado de detalle aceptado en la descripción física del flujo, dificultades matemáticas tanto en el continuo como numéricas, relación costo/beneficio, recursos computacionales disponibles, y exigencias prácticas de la industria.

Por otra parte, los métodos numéricos usados para la resolución aproximada de los problemas de los medios continuos, pueden ser clasificados en tres grandes grupos principales dados por los métodos: de las Diferencias Finitas (MDF), de los Elementos Finitos (MEF) y de los Elementos de Borde (MEB). En principio y en sus formas mas básicas, los métodos en diferencias finitas y en elementos finitos son de discretización en *todo el volumen* del flujo, mientras que el de elementos de borde, lo es solamente sobre sus *superficies de discontinuidad*.

### 7.1.1 Algunos requisitos prácticos

Ahora bien, ciertos problemas de flujo aero/hidro dinámicos, muestran ciertas peculiaridades que los distinguen de otros tipos de problemas de la mecánica de los medios continuos:

- 1) Las formas de las superficies aero/hidrodinámicas bajo flujo frecuentemente son muy complicadas; por ejemplo, las superficies de flujo en los aviones y barcos, o el de una hélice. Por esto, los métodos aproximados de bajo nivel en la descripción geométrica pueden llegar a ser insuficientes, donde los detalles geométricos son prácticamente colapsados para obtener otra con formas muy rudimentarias, como por ejemplo, las teorías del perfil/barco delgado, donde los detalles de interacción entre sus componentes se degradan hasta casi perderse. Pero el otro extremo dado por aquellos métodos cuyos costos computacionales

crecen rápidamente con la complejidad del flujo pueden llegar a ser prohibitivos en la relación costo/beneficio o innecesariamente costosos comparados con otras variantes.

2) Las cantidades de flujo resultan muy sensibles a los pequeños detalles de las formas de superficies del objeto inmerso en el flujo, y/o en la posición relativa de sus subcomponentes, por lo que la diferencia entre una buena y una mala superficie aero/hidro dinámica puede resultar bastante sutil. Así un método útil en la práctica debería ser capaz de poder discriminar entre formas de superficie *un tanto similares*, por ejemplo, una mejor disposición relativa del timón de una embarcación para disminuir la resistencia de ola.

3) Los resultados del cálculo sobre la superficie del objeto suelen ser de interés principal para los ingenieros de diseño, por lo menos en un cierto conjunto de casos de cómputo, por lo que el conocimiento de *todo el campo de flujo* podría representar, tanto como un cierto desperdicio en el número de operaciones efectuadas en *obtener información que en definitiva no es aprovechada*, como la imposición no estrictamente necesaria de exigirnos recursos computacionales relativamente importantes.

4) Un requerimiento común en todos los problemas es que la preparación de los datos y la posterior interpretación de los resultados resulte una tarea práctica, minimizando los riesgos de errores, y maximizando la facilidad en su detección y eliminación. Por ejemplo, es relativamente mucho más fácil y más rápido verificar una aceptable calidad de un *mallado superficial* sobre un objeto con formas muy complicadas, que hacerlo para un *mallado volumétrico* equivalente.

### 7.1.2 Coeficiente de presión

En particular, una magnitud muy sensible a los detalles de forma de las superficies es el *coeficiente de presión*  $C_p$ , presión ejercida por el flujo sobre la superficie del objeto, y es una magnitud de interés para el diseño ingenieril, donde su suavidad depende de la continuidad de la derivada del tensor de curvatura de la superficie. Esto resulta un problema sutil, pero con efectos notables en los resultados que les interesan a los hidrodinamicistas, y depende sensiblemente del cuidado en el tratamiento de las superficies discretizadas. Su magnitud se puede obtener a partir del campo de velocidad sobre las mismas. En los métodos de bajo orden, el potencial se suele obtener en los centroides de los paneles, que será nuestro caso. Una opción para calcular el campo de velocidad es llevar de alguna forma los potenciales calculados en los centroides a los nodos, para finalmente evaluar la velocidad por elemento, con una interpolación tipo elementos finitos. Por ejemplo, en la tesis de Maître se menciona un procedimiento en base al teorema de Stokes para hacer este cálculo, aunque finalmente opta por un procedimiento distinto en base a un esquema en diferencias finitas, el cual funciona bien sólo para mallas estructuradas y altamente

regulares. Mostraremos que los resultados alcanzados mediante el empleo del teorema de Stokes en una forma clásica, también son sólo razonables para esos mismos tipos de mallas, volviéndose inaceptables para mallas no estructuradas. Por ello, proponemos una forma debilitada del teorema de Stokes, la cual permite superar este problema.

### 7.1.3 Mallas estructuradas y no estructuradas

Recordemos que las *mallas estructuradas* son típicas en esquemas por diferencias finitas, mientras que las *mallas no estructuradas* son típicas tanto en paneles como en elementos finitos. A nivel industrial, las no estructuradas son las preferidas en el trabajo cotidiano por una serie de razones prácticas, en donde con cierta frecuencia se nos presentan geometrías tridimensionales muy complicadas, por lo que debemos invertir un apreciable tiempo relativo en su generación, depuración de errores y mejoras en su calidad.

Gráficamente resulta inmediato comprender cuándo tendremos unas u otras, como lo podemos ver en la figura 7.1 en una versión bidimensional. Podremos decir que una *malla estructurada* tiene en cada punto interior  $R_i$  el mismo número de elementos (o paneles) a su alrededor, mientras que en una *malla no estructurada* ese número es variable, y usualmente sus elementos resultan relativamente distorsionados. Si el generador no prevé un control en el grado de distorsión máxima admisible, éste puede resultar excesiva en algunos elementos/paneles, y nos puede introducir efectos espúreos indeseables en las magnitudes computadas. Por eso tratamos tanto de disminuir ese grado de distorsión durante la generación, como la de desarrollar esquemas numéricos robustos ante esto. Por otra parte, para la validación de los esquemas numéricos de cálculo, es recomendable incluir una estimación de su robustez frente a fuertes distorsiones (o geometrías patológicas), como por ejemplo, mallas estructuradas y no estructuradas de pésima calidad. Para ello, a veces nos resulta cómodo el artilugio de emplear mallas fuertemente distorsionadas, a partir de una malla estructurada inicial, mediante un ruido aleatorio a sus coordenadas nodales, como luego veremos en un cálculo del coeficiente de presión.

### 7.1.4 Método de paneles

Dentro del método de elementos de borde podemos distinguir el método de paneles, al cual lo podemos reconocer como una especialización para ciertos problemas de flujo potencial 3D, de aplicación práctica en cálculo aeronáutico, hidromecánico o hidronaval. Este método ha probado tener una versatilidad remarcable y se ha constituido en una herramienta estándar en este campo, donde la mayoría de las divisiones de cálculo en las empresas e institutos emplean, entre otros recursos, un código computacional basado en

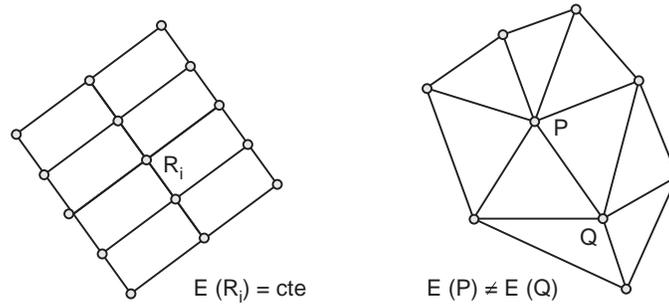


Figura 7.1: Malla estructurada (izq.), no estructurada (der.)

alguna de sus variantes. Por ejemplo en el área aeronáutica podemos mencionar Boeing (Tinocco/Rubbert/Johnson), Mc Donnell Douglas (Hess/Smith), British Aerospace (Hunt), mientras que en el área hidronaval, los códigos SQUASH (Tahara/Stern/Rosen), DAWSON y RAPID (MARIN). Mientras que algunas de sus líneas de investigación son (Morino, 1985): flujos subsónicos y supersónicos estacionarios (Morino, Hess, Tinocco, Rubbert); flujos subsónicos y supersónicos no estacionarios (Yates, Giesing, Rowe, Freedman); flujos transónicos estacionarios (Nixon, Kerlick, Boppe, Slooff); flujos transónicos no estacionarios (Yates, Caradonna, Tseng); y análisis de estela (Kandil, Sipcic, Morino).

### 7.1.5 Variables primitivas escalares o vectoriales

Entre las variantes del método de paneles, mencionamos:

i) dos opciones para las variables primitivas (o principales de cálculo), donde la primera es *directa* mediante *magnitudes vectoriales*, por ejemplo la velocidad (Mracek/Kim/Mook, Pellone), mientras que la segunda es *indirecta* mediante *magnitudes escalares*, por ejemplo, con el potencial de velocidad (Morino, Hess, Rubbert). Una dificultad de las magnitudes vectoriales es que son de un orden mayor que sus equivalentes escalares, por lo que su tratamiento matemático es más elaborado, y pueden ser más sensibles a los efectos espúreos de la discretización geométrica, mientras que en las magnitudes escalares necesitaremos en algún momento calcular su gradiente;

ii) dos opciones para la aproximación y discretización de las superficies geométricas. La primera es de bajo orden, en donde la superficie del panel es simplemente un plano, por lo que bastan los vértices del panel para su definición (paneles planos). La segunda opción es de alto orden, donde la superficie del panel es al menos una superficie de segundo orden, por ejemplo, un hiperboloide, y en consecuencia necesitamos introducir nodos adicionales interiores, además de los vértices (paneles alabeados). Entonces, la superficie aproximante total es una *poliédrica de caras planas o alabeadas (malla)* donde cada cara es un panel

(plano o alabeado), mientras que cada vértice (y eventual punto interior) es un nodo. En la práctica, los paneles más usuales son los cuadriláteros y los triángulos, tanto planos como alabeados;

iii) dos opciones para la aproximación y discretización de las dependencias funcionales. La primera es de bajo orden mediante funciones constantes a trozos, lo que nos facilita el tratamiento de las integrales, y en particular permite una evaluación analítica, al precio de refinar convenientemente cuando los gradientes superficiales resulten intensos. La segunda opción es de alto orden, para lo cual necesitamos un cierto número de puntos adicionales, que si bien nos permite un menor grado de refinamiento relativo para el mismo grado de aproximación, involucra prácticamente una integración numérica, introduciendo de ese modo un error de consistencia inicial.

En base a un criterio de simplicidad y de consistencia inicial, optaremos por *variables primitivas escalares*, mediante la formulación de Morino/Maître, por superficies poliédricas planas, y por dependencias funcionales constantes por panel, de modo de encarar una integración analítica, con una posterior colocación en los centroides de los paneles.

## 7.2 Formulación de Morino/Maître

Veamos ahora la formulación de Morino según Maître (1988), para el flujo potencial alrededor de un objeto con formas hidrodinámicas, es decir, no separado. Maître observa que la propuesta original de Morino no presta atención a la eventual influencia de un potencial interior y para ello obtiene una versión levemente diferente.

### 7.2.1 Ecuación integral

El potencial total de velocidades  $\Phi(\mathbf{x})$  del flujo, clásicamente lo podemos descomponer en la suma  $\Phi(\mathbf{x}) = \phi_0(\mathbf{x}) + \phi(\mathbf{x})$ , donde  $\phi_0(\mathbf{x})$  es el potencial no perturbado, impuesto por un campo exterior dado, y  $\phi(\mathbf{x})$  es el potencial de perturbación originado por la presencia del objeto. La pared mojada del objeto bajo flujo nos permite definir una superficie cerrada  $\Gamma$ , y supondremos que es finita y suave por partes, como lo esquematizado en la figura 7.2. Como la superficie  $\Gamma$  es cerrada, podemos distinguir los dominios de flujo interior  $\Omega^i$  y exterior  $\Omega^e$ , tales que

$$\Omega^e \cap \Omega^i = \emptyset \quad \wedge \quad \Omega^e \cup \Gamma \cup \Omega^i = R^3 \quad ; \quad (7.1)$$

Desde un punto de vista hidrodinamicista, sabemos que la superficie mojada  $\Gamma$  es impermeable al flujo exterior, a partir de este hecho podemos imaginar que en principio, la zona

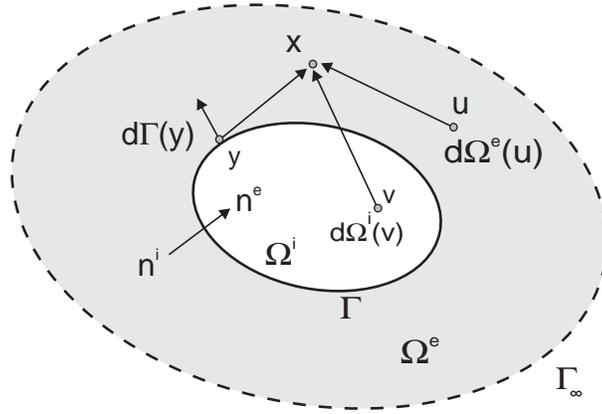


Figura 7.2: Geometría para la formulación de Morino/Maître.

interior del objeto, podría concebirse como una zona de *flujo interno*, esto es, sin contacto con el flujo exterior. Si ese fuera el caso, tendremos dos flujos (exterior e interior) donde cada uno de ellos tendrá asociado un potencial de velocidades, de modo que el potencial total de perturbación será en principio  $\phi(\mathbf{x}) = \phi^e(\mathbf{x}) + \phi^i(\mathbf{x})$  para  $\mathbf{x} \in R^3$ , donde  $\phi^{e,i}(\mathbf{x})$  son los potenciales originados en los dominios exterior e interior, respectivamente, donde para el potencial exterior  $\phi^e(\mathbf{x})$  sólo admitimos funciones con tendencia asintótica  $O(1/r)$

$$|\phi^e(\mathbf{x})| < \frac{C}{|\mathbf{x}|} \quad , \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad ; \quad (7.2)$$

Ahora, desde un punto genérico  $\mathbf{x} \in R^3$  ubicado en cualquier región del espacio, escribamos la tercera identidad de Green para cada función  $\phi^{e,i}(\mathbf{x})$  en cada dominio de flujo  $\Omega^{e,i}$ , con superficie de borde común  $\Gamma$  y con normales opuestas  $\mathbf{n}^i = -\mathbf{n}^e$ . Para el dominio interior  $\Omega^i$  tendremos

$$\int_{\Omega^i} d\Omega_{\mathbf{u}} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{u}|} \Delta \phi^i - \phi^i \Delta \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{u}|} \right\} = \int_{\Gamma} d\Gamma_{\mathbf{y}} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \frac{\partial \phi^i}{\partial n^i}(\mathbf{y}) - \phi^i(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n^i} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right\} \quad (7.3)$$

donde  $\mathbf{u} \in \Omega^i$  es el punto de integración ubicado en el dominio interior,  $\mathbf{y} \in \Gamma$  es el punto de integración de la integral de superficie. Mientras que para el dominio exterior  $\Omega^e$  será

$$\int_{\Omega^e} d\Omega_{\mathbf{v}} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{v}|} \Delta \phi^e - \phi^e \Delta \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{v}|} \right\} = \int_{\Gamma} d\Gamma_{\mathbf{y}} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \frac{\partial \phi^e}{\partial n^e}(\mathbf{y}) - \phi^e(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n^e} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right\} \quad (7.4)$$

donde  $\mathbf{v} \in \Omega^e$  es el punto de integración ubicado en el dominio exterior,  $\mathbf{y} \in \Gamma$  es el punto común en la superficie. Pero las funciones  $\phi^{i,e}$  son armónicas, por lo menos en sus dominios respectivos,

$$\begin{cases} \Delta \phi^i(\mathbf{u}) = 0 & \text{para } \mathbf{u} \in \Omega^i ; \\ \Delta \phi^e(\mathbf{v}) = 0 & \text{para } \mathbf{v} \in \Omega^e ; \end{cases} \quad (7.5)$$

teniendo en cuenta estas dos condiciones, sumando miembro a miembro, y adoptando un único sentido para la normal, orientada hacia el flujo exterior,  $\mathbf{n} = \mathbf{n}^i = -\mathbf{n}^e$  tendremos

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega^i} d\Omega_{\mathbf{u}} \phi^i(\mathbf{u}) \Delta \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{u}|} - \int_{\Omega^e} d\Omega(\mathbf{v}) \phi^e(\mathbf{v}) \Delta \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{v}|} = \\ & = \int_{\Gamma} d\Gamma_{\mathbf{y}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \left\{ \frac{\partial \phi^e}{\partial n}(\mathbf{y}) - \frac{\partial \phi^i}{\partial n}(\mathbf{y}) \right\} - \int_{\Gamma} d\Gamma_{\mathbf{y}} \left\{ \phi^i(\mathbf{y}) - \phi^e(\mathbf{y}) \right\} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad . \quad (7.6) \end{aligned}$$

En esta suma hagamos dos consideraciones: i) introducimos las *densidades superficiales de carga*  $\mu(\mathbf{y})$ ,  $\sigma(\mathbf{y})$ , *dipolar* y *monopolar*, respectivamente, donde la densidad monopolar  $\sigma(\mathbf{y})$  da cuenta de la diferencia en la derivada normal de los potenciales, evaluadas en ambas caras de la superficie  $\Gamma$ ,

$$\sigma(\mathbf{y}) = \frac{\partial \phi^e}{\partial n} - \frac{\partial \phi^i}{\partial n} \quad ; \quad \mathbf{y} \in \Gamma \quad ; \quad (7.7)$$

mientras que la densidad dipolar  $\mu(\mathbf{y})$  da cuenta de la diferencia en los valores de los potenciales, evaluados en ambas caras de la misma,

$$\mu(\mathbf{y}) = \phi^i(\mathbf{y}^-) - \phi^e(\mathbf{y}^+) \quad ; \quad \mathbf{y} \in \Gamma \quad ; \quad (7.8)$$

ii) por otra parte, un cálculo límite (Hunt, Maître, Wrobel) nos muestra que para superficies suaves

$$\int_{\Omega^i} d\Omega_{\mathbf{u}} \phi^i(\mathbf{u}) \Delta \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{u}|} = \Theta^i \phi^i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{para } \mathbf{x} \in \Omega^e ; \\ 2\pi \phi^i(\mathbf{x}) & \text{para } \mathbf{x} \in \Gamma ; \\ 4\pi \phi^i(\mathbf{x}) & \text{para } \mathbf{x} \in \Omega^i ; \end{cases} \quad (7.9)$$

y

$$\int_{\Omega^e} d\Omega_{\mathbf{v}} \phi^e(\mathbf{v}) \Delta \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{v}|} = \Theta^e \phi^e(\mathbf{x}) = \begin{cases} 4\pi \phi^e(\mathbf{x}) & \text{para } \mathbf{x} \in \Omega^e ; \\ 2\pi \phi^e(\mathbf{x}) & \text{para } \mathbf{x} \in \Gamma ; \\ 0(\mathbf{x}) & \text{para } \mathbf{x} \in \Omega^i ; \end{cases} \quad (7.10)$$

por lo que la suma integral se reduce a

$$-\Theta^i \phi^i(\mathbf{x}) - \Theta^e \phi^e(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} d\Gamma_{\mathbf{y}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \sigma(\mathbf{y}) - \int_{\Gamma} d\Gamma_{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \mu(\mathbf{y}) \quad . \quad (7.11)$$

Para el problema del flujo externo, los valores usuales para el potencial interior son  $\phi^i = 0$ ,  $\phi_{\infty}$ , *cte*, y en trabajos aeronáuticos citados por (Broeze/Romate, 1992), se concluye que la primera opción mediante un método de paneles de bajo orden conduce a resultados de exactitud comparable a los obtenidos con los de alto orden, para la misma densidad en los puntos de control. Como ese será nuestro caso, entonces, en lo que sigue, nos resultará suficiente considerar para el dominio de flujo interior  $\Omega^i$ , la función idénticamente nula, en donde desde el punto de vista hidrodinamicista, la podemos concebir como una zona

de *flujo muerto* (con velocidad nula), en consecuencia,  $\phi^i(\mathbf{x}) \equiv 0$  para  $\mathbf{x} \in \Omega^i \cup \Gamma$  y  $-\Theta^e \phi^e(\mathbf{z}) \equiv 2\pi\mu^e(\mathbf{z})$  para  $\mathbf{z} \in \Gamma$ . La ecuación integral reordenada y reducida es

$$\frac{1}{2}\mu(\mathbf{z}) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} d\Gamma_{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\mathbf{z} - \mathbf{y}|} \mu(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} d\Gamma_{\mathbf{y}} \frac{1}{|\mathbf{z} - \mathbf{y}|} \sigma(\mathbf{y}) \quad \text{para } \mathbf{z} \in \Gamma ; \quad (7.12)$$

donde el punto de medición  $\mathbf{z}$  está sobre la superficie de integración  $\Gamma$ . Esta es la formulación integral de Morino en la versión de Maître.

### 7.2.2 Condición de borde cercana

En la ecuación integral de Morino/Maître aún no hemos explicitado la condición de borde sobre la superficie  $\Gamma$ . Esto lo hacemos con la ayuda de la integral monopolar. Para este fin descompongamos la velocidad  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  en una componente no perturbada  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ , impuesta por el flujo externo, más otra de perturbación  $\mathbf{u}_p(\mathbf{x})$ , generada por la presencia del objeto  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_p(\mathbf{x})$ . Su proyección normal  $u_n(\mathbf{z})$  a la superficie  $\Gamma$  es

$$u_n(\mathbf{z}) = (\mathbf{u}_0, \mathbf{n}) + (\mathbf{u}_p, \mathbf{n}) \quad \text{para } \mathbf{z} \in \Gamma ; \quad (7.13)$$

donde  $(\mathbf{u}_p, \mathbf{n}) \equiv \partial\phi^e/\partial n$  es la velocidad normal de perturbación evaluada en la cara exterior. Para flujo invíscido la superficie  $\Gamma$  es impermeable y deslizante a la velocidad resultante  $\mathbf{u}(\mathbf{z})$ , por lo que  $u_n(\mathbf{z}) = 0$  para  $\mathbf{z} \in \Gamma$ , y teniendo en cuenta que con potencial interior nulo  $\phi^i \equiv 0$ , la densidad monopolar  $\sigma(\mathbf{z})$  se reduce a

$$\sigma(\mathbf{z}) = \frac{\partial\phi^e}{\partial n} = (-\mathbf{u}_0, \mathbf{n}) \quad \text{para } \mathbf{z} \in \Gamma . \quad (7.14)$$

Esto es un valor prescrito en general no nulo para la densidad 1-polar  $\sigma(\mathbf{z})$ , y es una condición de Neumann no homogénea para  $\phi^e$  en el borde  $\Gamma$ . Desde un punto de vista hidrodinamicista, es asimilable también a un *flujo de transpiración* que inyectamos en la superficie  $\Gamma$  para forzar el cumplimiento de la condición de flujo “cinemática” disponible en flujo potencial, esto es, el resbalamiento (o la no impenetrabilidad) del flujo en las paredes mojadas del cuerpo. De ahora en adelante, pondremos directamente  $\phi \equiv \phi^e$ . Esta opción para la formulación integral y la incorporación de las condiciones de borde ha sido propuesta en forma general por Morino (Morino, 1973), y en forma independiente por Johnson, Bristow, y es resulta apropiada para problemas de flujo potencial exterior que se extienden al infinito con tendencia asintótica  $O(1/r)$ . La podemos también reconocer como una formulación indirecta mixta, en el sentido de que hacemos uso simultáneo de las dos densidades de carga  $\mu, \sigma$ , dipolar y monopolar, respectivamente. Esto contrasta con otras que solamente emplean exclusivamente una sola de las dos densidades, anulando la restante, lo cual introduce una limitación de representación.

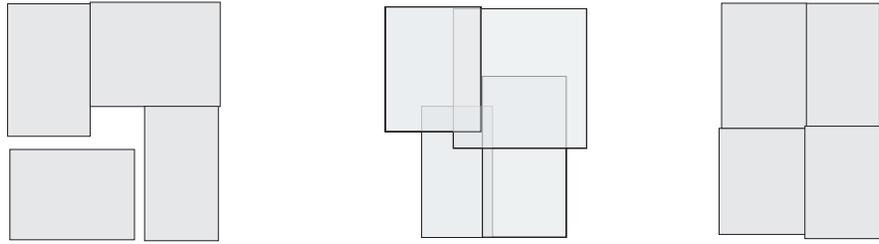


Figura 7.3: Paneles no admisibles: con *huecos* (izq.), *sobre-encimados* (centr.). Paneles admisibles (der.).

En resumen, en la formulación integral de Morino/Maître, tendremos sobre la superficie  $\Gamma$  dos campos superficiales de carga dados por, i) la densidad monopolar  $\sigma(\mathbf{z})$  conocida por introducción de las condiciones de borde “cinemáticas”, ii) la densidad dipolar  $\mu(\mathbf{z})$  que es la solución de la ecuación integral.

## 7.3 Discretización por paneles

El método de elementos de borde BEM/paneles estándar es un método numérico de solución de las ecuaciones integrales de borde, basado en un *procedimiento sistemático de discretización* con tres etapas de aproximación: geométrica, funcional, y de la misma ecuación integral.

### 7.3.1 Discretización geométrica sistemática

Para una aproximación de la superficie geométrica  $\Gamma$ , lo más simple es mediante un esquema de bajo orden para una representación geométrica aproximada, mediante paneles planos poligonales. Mediante ellos podemos cubrir aproximadamente la superficie dato mediante una superficie poliédrica  $\Gamma^E$  de  $E$  paneles, tal que

$$\begin{cases} \Gamma \approx \Gamma^1 \cup \Gamma^2 \cup \dots \cup \Gamma^e \cup \dots \cup \Gamma^E & ; \\ \Gamma^i \cap \Gamma^j = \emptyset \text{ para } i, j = 1, 2, \dots, E, \text{ con } i \neq j. & ; \end{cases} \quad (7.15)$$

donde  $\Gamma^e$  es la superficie del panel genérico  $e$  de contorno  $L^e$  en la superficie poliédrica, tales que i) no se *sobre-encimen* entre sí, ii) no existen *huecos* entre ellos (ver figura 7.3). En las aplicaciones prácticas, usualmente nos bastan paneles triangulares o cuadriláteros con  $n_p = 3, 4$  vértices o nodos, respectivamente.

Los cuadriláteros son aptos para superficies planas, mientras que su uso en superficies fuertemente alabeadas requiere de algún cuidado particular porque, como una consecuencia espúrea del método de discretización, puede suceder que algunos de ellos no resulten

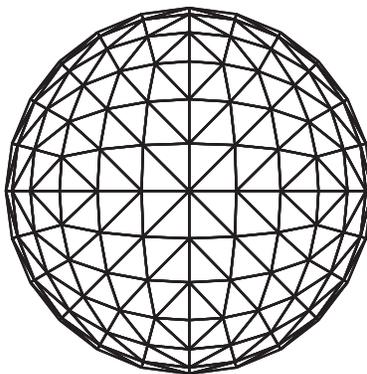


Figura 7.4: Mallado superficial sobre una esfera con paneles triangulares.

exactamente planos. Para verificar su planaridad, tendremos que incluir un ensayo, como por ejemplo, verificar si el cuarto nodo pertenece al plano definido por los tres nodos restantes del panel, corrigiendo en caso contrario. Por otra parte, los paneles triangulares no pueden experimentar ese potencial efecto espúreo en la generación, porque su planaridad está automáticamente asegurada y nos ahorramos la verificación. Por este motivo, usualmente los preferiremos en las superficies muy alabeadas. Como un ejemplo de mallado triangular sobre una esfera la mostramos en la figura 7.4.

En forma análoga al Método de los Elementos Finitos (MEF), en la definición de la malla debemos generar una lista de coordenadas de los nodos y una lista de conectividad de los mismos. En la primera almacenamos las coordenadas geométricas de todos los *nodos (o vértices)* de la poliédrica, mientras que en la segunda almacenamos la lista de nodos asociados a cada panel. Si la técnica de colocación por puntos no hace uso de estos nodos, como lo es en nuestro caso, podemos admitir en principio, la presencia de nodos superpuestos, es decir, no necesitamos el concepto de contiguidad de los paneles, como en el caso de MEF. Esto nos otorga una mayor flexibilidad a la hora de generar la malla, por ejemplo, podemos hacer primero ciertas submallas por separado, y luego las “pegamos” directamente sin filtrar los nodos rotulados con diferente número y con idénticas coordenadas geométricas, donde *todas las normales deben apuntar hacia el flujo*. La importancia de la orientación correcta se relaciona con los ángulos de vista relativos entre paneles.

### 7.3.2 Discretización funcional sistemática

Para una discretización funcional sistemática en las densidades de carga superficial  $\mu, \sigma$  dipolar y monopolar, respectivamente, otra vez lo más simple es con un esquema funcional de bajo orden, donde suponemos cada para  $\{\mu^j, \sigma^j\}$  es constante en cada panel  $j$  y los extraemos fuera de sus operadores integrales respectivos,

$$\frac{1}{2}\mu(\mathbf{z}) + \sum_{j=1}^n \frac{\mu^j}{4\pi} \int_{\Gamma_j} d\Gamma_{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|\mathbf{z} - \mathbf{y}|} = \sum_{j=1}^n \frac{\sigma^j}{4\pi} \int_{\Gamma_j} d\Gamma_{\mathbf{y}} \frac{1}{|\mathbf{z} - \mathbf{y}|} \quad \text{para } \mathbf{z} \in \Gamma_n . \quad (7.16)$$

### 7.3.3 Discretización de la ecuación integral

La ecuación integral anterior es válida, en principio, para cualquier punto  $\mathbf{z} \in \Gamma_p$ , donde tenemos  $n$  incógnitas, por lo que nos basta generar  $n$  ecuaciones para las densidades dipolares  $\mu$ , y lo mas simple es una técnica de colocación por puntos  $\mathbf{z}_i$ , en donde forzamos el cumplimiento de la ecuación integral

$$\frac{1}{2}\mu(\mathbf{z}_i) + \sum_{j=1}^n \frac{\mu^j}{4\pi} \int_{\Gamma_j} d\Gamma_{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|\mathbf{z}_i - \mathbf{y}|} = \sum_{j=1}^n \frac{\sigma^j}{4\pi} \int_{\Gamma_j} d\Gamma_{\mathbf{y}} \frac{1}{|\mathbf{z}_i - \mathbf{y}|} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n ; \quad (7.17)$$

donde  $\mu(\mathbf{z}_i) = \mu_i \equiv \mu^i$  es la densidad dipolar de carga,  $\sigma(\mathbf{z}_i) = \sigma_i \equiv \sigma^i$  es la densidad monopolar de carga, ambos constantes por panel. Este es un procedimiento bastante difundido en los métodos de paneles, básicamente por razones de costo de CPU en la evaluación de la matriz del sistema, y por suficiencia en la calidad de la solución numérica obtenida, como luego veremos. Los puntos de colocación  $\mathbf{z}_i$  los elegimos en los centroides de los paneles, los cuales no pueden coincidir entre ellos ( $\mathbf{z}_i \neq \mathbf{z}_j$ ), dado que resultaría una sistema de ecuaciones algebraicas singular. Esta eventualidad puede darse i) cuando discretizamos pares de superficies relativamente muy próximas, por ejemplo, superficies alares muy delgadas, ii) cuando empleamos paneles triangulares planos con muy baja densidad de refinamiento, puede suceder que el generador de malla deje en las esquinas de una superficie alar paneles con dos de sus aristas en el borde. Para detectar la segunda contingencia, resulta recomendable intercalar previamente un *ensayo de distancia entre centroides* no nula para todos ellos. Por ejemplo, en la figura 7.5 vemos un ejemplo del segundo caso, donde recordemos se trata de un *perfil con espesor*. Un posterior empleo del teorema de la divergencia 2D nos permitirá reemplazar las integrales de superficie sobre cada panel, por sus integrales de línea equivalentes efectuadas sobre el perímetro de los mismos. De esta forma, las expresiones analíticas obtenidas resultan solamente singulares para puntos ubicados sobre dicho perímetro por lo que nos resultará admisible emplear los centroides como posteriores puntos de colocación.

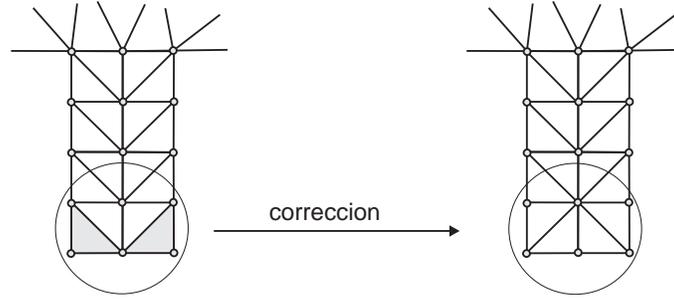


Figura 7.5: Generación espúrea en los extremos de una superficie delgada: matriz singular porque los paneles sombreados tienen centroides coincidentes (izq.), no singular (der.).

## 7.4 Matrices dipolar **A** y monopolar **C**

La ecuación de colocación nos permite introducir las *matrices dipolar y monopolar*, **A**, **C**, respectivamente, de influencia recíproca entre todos los paneles, y definidas por

$$A_{ij} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} d\Gamma_y \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{r} \quad ; \quad C_{ij} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} d\Gamma_y \frac{1}{r} \quad \text{para } i, j = 1, 2, \dots, n ; \quad (7.18)$$

donde  $r = |\mathbf{z}_i - \mathbf{y}|$  es la distancia relativa entre el punto de colocación  $\mathbf{z}_i$  y el punto de integración variable  $\mathbf{y} \in \Gamma_j$  sobre la superficie del panel plano  $j$ , de área  $\Gamma_j$ . Una interpretación física de estas matrices de influencia n-polares:  $A$  (dipolar) y  $C$  (monopolar), puede describirse de la siguiente manera (figura 7.6): 1) cada columna  $\mathbf{a}_j$  de la matriz de influencia dipolar **A**, representa el potencial medido en todos los centroides, cuando todos los paneles excepto el  $j$  están “descargados”, mientras que este último soporta el par de carga dipolar/monopolar  $\{\mu_j, \sigma_j\} = \{1, 0\}$ . 2) cada columna  $\mathbf{c}_j$  de la matriz de influencia monopolar **C** representa el potencial medido en todos los centroides, cuando todos los paneles excepto el  $j$  están “descargados”, mientras que este último soporta el par de carga dipolar/monopolar  $\{\mu_j, \sigma_j\} = \{0, 1\}$ .

Pero una interpretación más útil en el caso de la matriz dipolar **A**, es que representa los *ángulo de vista* entre todos los paneles (Mikhlin, Stratton), y en consecuencia, i) como cada par de paneles pueden estar en cualquier posición relativa entre si, en general tendremos que  $A_{ij} \neq A_{ji}$ , esto es, el par  $i, j$  no necesariamente se ven con el mismo ángulo de vista, ii) en una superficie plana los paneles no se ven entre si excepto a si mismos, por lo que en este caso muy particular, la matriz dipolar **A** se reduce a una forma diagonal, en donde  $A_{ii} = 1/2$ .

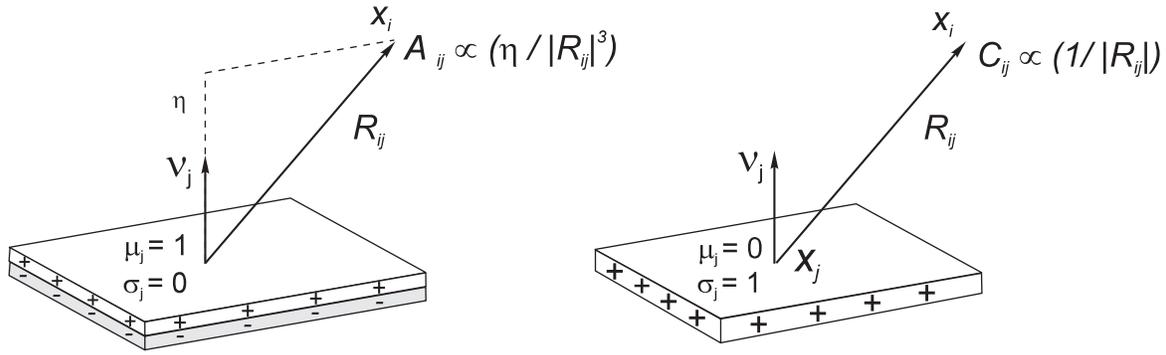


Figura 7.6: Interpretación física de los potenciales 1-polar y 2-polar.

## 7.5 Sistema matricial de ecuaciones

El sistema algebraico de ecuaciones lo podemos reescribir como

$$\sum_{j=1}^n H_{ij} \mu_j = b_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \quad (7.19)$$

donde  $H_{ij} = 1/2I_{ij} + A_{ij}$  es la matriz del sistema,  $I_{ij}$  es la matriz identidad,  $A_{ij}$  es la matriz dipolar,  $b_i$  es el vector fuente o de carga dado por

$$b_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} \sigma_j \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n ; \quad (7.20)$$

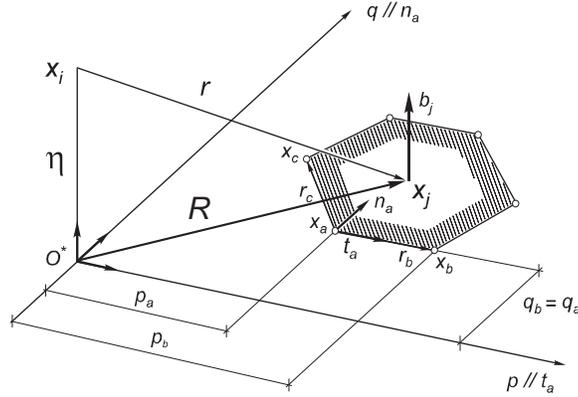
donde  $C_{ij}$  es la matriz monopolar,  $\sigma_j$  es el vector de flujos impuestos por la condición de deslizamiento  $\sigma_j = (-\mathbf{u}_0, \mathbf{n}_j)$ . De esta forma el método de paneles estándar nos conduce al sistema matricial de ecuaciones  $\mathbf{H}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{b}$  donde su término fuente está dado por  $\mathbf{b} = \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}$ .

## 7.6 Integral analítica de la matriz monopolar C

Procedamos ahora al cálculo analítico del coeficiente monopolar  $C_{ij}$ , para un panel plano poligonal de  $n$  lados, ubicado en una posición relativa arbitraria en 3D, y definido por la integral

$$\tilde{C}_{ij} = \int_{S_j} dS \frac{1}{r} \quad (7.21)$$

donde  $\tilde{C}_{ij} = C_{ij}/4\pi$ ,  $S_j$  es la superficie del panel  $j$ ,  $r = |\mathbf{y} - \mathbf{x}_i|$  es la distancia entre el punto de colocación  $\mathbf{x}_i$  y el punto de integración variable  $\mathbf{y}$  sobre la superficie del panel  $j$  (ver figura 7.7).


 Figura 7.7: Terna local  $p, q, \eta$  según el lado  $L^k$ .

### 7.6.1 Función auxiliar monopolar $V$

Nuestra estrategia consiste en preguntarnos si es posible encontrar una función  $V(R, \eta)$  tal que su laplaciano bidimensional  $\Delta_{pq}V$  sobre la superficie del panel sea igual a  $1/r$ , es decir,

$$\Delta_{pq}V = \frac{1}{r} \quad ; \quad (7.22)$$

donde  $r = \sqrt{R^2 + \eta^2}$ ,  $R = \sqrt{p^2 + q^2}$ , entonces, será posible facilitar la integración mediante el artilugio de convertir la integral de superficie a su integral de línea equivalente, dada por el teorema de la divergencia 2D

$$\tilde{C}_{ij} = \int_{S_j} \Delta_{pq}V dS_{pq} = \int_{L_j} (\nabla_{pq}V, \mathbf{n}) dL \quad ; \quad (7.23)$$

donde  $\mathbf{n}$  es el versor normal al contorno  $L_j$  pero contenido en el plano del panel,  $\Delta_{pq}$  es el operador laplaciano en las coordenadas bidimensionales  $p, q$  localizadas sobre la superficie del mismo,  $V = V(R, \eta)$  es una función suficientemente diferenciable en  $R^3$ ,  $R = R(p, q)$  es la proyección del vector posición  $\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{x}_i$  sobre el plano que contiene al panel,  $\eta$  es la distancia entre el punto de colocación  $\mathbf{x}_i$  y dicho plano, distancia constante durante la integración. Para hallar  $V(R, \eta)$  tenemos que resolver la ecuación diferencial dada por su laplaciano bidimensional  $\Delta_{pq}V$  en las coordenadas polares  $R, \theta$ , con  $\partial V / \partial \theta = 0$ ,

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial V}{\partial R} \right) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \eta^2}} \quad ; \quad (7.24)$$

integrando una vez,

$$R \frac{\partial V}{\partial R} = \int \frac{R}{\sqrt{R^2 + \eta^2}} dR = \sqrt{R^2 + \eta^2} + C \quad ; \quad (7.25)$$

sin pérdida de generalidad podemos adoptar  $C = 0$ . Integrando por segunda vez

$$V = \int \frac{\sqrt{R^2 + \eta^2}}{R} dR \quad ; \quad (7.26)$$

la cual admite la función solución

$$V(R, \eta) = \sqrt{R^2 + \eta^2} + |\eta| \ln \left[ \frac{\sqrt{R^2 + \eta^2} - |\eta|}{R} \right] \quad \text{para } R > 0 \quad ; \quad (7.27)$$

donde el argumento del logaritmo es positivo para todo  $R, \eta$  finitos.

### 7.6.2 Integral de línea monopolar

La integral de línea para el coeficiente monopolar  $\tilde{C}_{ij}$  es igual a la suma de las contribuciones  $\tilde{C}^k$  del gradiente superficial de la función auxiliar monopolar, en cada lado  $L^k$  del polígono cerrado de  $m$  vértices,

$$\tilde{C}_{ij} = \sum_{k=1}^m \tilde{C}^{ik} \quad ; \quad \tilde{C}^k = \int_{L^k} (\nabla_{pq} V, \mathbf{n}) dL \quad ; \quad (7.28)$$

donde cada lado  $L^k$  está definido por el par de nodos  $a = m_k, b = m_{k+1}$ , en la secuencia cerrada  $[m_1, m_2, \dots, m_m, m_{m+1} = m_1]$  del panel  $j$ . En las condiciones supuestas  $V = V(R, \eta)$ , con  $R = R(p, q) = \sqrt{p^2 + q^2}$ , donde  $\eta$  es un parámetro constante durante la integración sobre el panel.

Para facilitar el cálculo del aporte  $\tilde{C}^k$  de cada lado  $L^k$ , elegimos seguir la propuesta de Medina/Liggett (1988), donde imponemos una rotación finita al diedro planar  $p, q$ , de modo tal que el eje  $p$  sea paralelo al lado  $L^k$  que se evalúa por turno. De este modo, resulta que  $q = \text{cte}$  durante la integración a lo largo de dicho lado, siendo únicamente función de la variable  $p$  (ver figura 7.8). El gradiente de  $V$  sobre la superficie del panel lo expresamos en la forma

$$\nabla_{pq} V = \frac{\partial V}{\partial R} \nabla_{pq} R \quad ; \quad (7.29)$$

donde

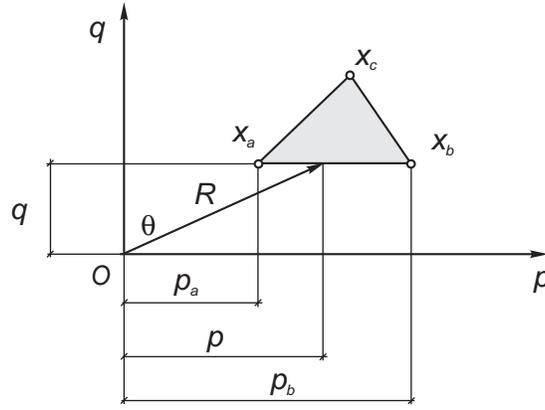
$$\nabla_{pq} R = \frac{\partial R}{\partial p} \hat{\mathbf{e}}_p + \frac{\partial R}{\partial q} \hat{\mathbf{e}}_q = \frac{2p}{2\sqrt{p^2 + q^2}} \hat{\mathbf{e}}_p + \frac{2q}{2\sqrt{p^2 + q^2}} \hat{\mathbf{e}}_q = \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R} \quad ; \quad (7.30)$$

donde  $\hat{\mathbf{R}}$  es el versor en la dirección radial  $R$ , por lo que

$$\nabla_{pq} V = \frac{\partial V}{\partial R} \nabla_{pq} R = \frac{\partial V}{\partial R} \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R} \quad ; \quad (7.31)$$

luego, la derivada de  $V$  en la dirección del versor normal  $\mathbf{n}$  contenida en el plano del panel la calculamos con

$$(\nabla_{pq} V, \mathbf{n}) = \frac{\partial V}{\partial R} \frac{(\hat{\mathbf{R}}, \mathbf{n})}{R} \quad . \quad (7.32)$$

Figura 7.8: Plano  $p, q$  de la terna local del lado  $L^k$ .

Dada la particular disposición del diedro local  $p, q$  en la evaluación del lado genérico  $L^k$ , tenemos que  $(\hat{\mathbf{R}}, \mathbf{n}) = -q = \text{cte}$ , y

$$\frac{\partial V}{\partial R} \frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \eta^2}} + \frac{|\eta|}{[\sqrt{R^2 + \eta^2} - |\eta|] \sqrt{R^2 + \eta^2}} - \frac{|\eta|}{R^2} \quad (7.33)$$

La integral monopolar a lo largo del lado  $L^k$  la podemos escribir en la forma

$$\tilde{C}^k = M(p_b, q_b, \eta) - M(p_a, q_a, \eta) \quad ; \quad (7.34)$$

donde  $p_a, p_b$  son las abscisas de los nodos  $a, b$  del lado  $L^k$ ,  $q_a = q_b$  la ordenada común según el diedro  $p, q$  paralelo a cada lado  $L^k$  definidos por los productos escalares

$$p_a = (\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{t}_a \quad ; \quad p_b = (\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{t}_a \quad ; \quad q_a = q_b = (\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{n}_a \quad ; \quad (7.35)$$

donde  $\mathbf{t}_a, \mathbf{n}_a$  son los versores tangencial y normal del lado  $L^k$  contenidos en el plano del panel  $j$ . Para el correcto sentido de integración a lo largo del lado  $L^k$ , exigimos que  $\mathbf{n}_a \times \mathbf{t}_a = \mathbf{b}_j$ , donde  $\mathbf{b}_j$  es el versor binormal de la terna local, normal a la superficie plana del panel y orientado hacia el dominio exterior  $\Omega^e$ . De este modo, la terna local en la secuencia  $(\mathbf{n}_a, \mathbf{t}_a, \mathbf{b}_j)$  resulte dextrógira a lo largo de cada lado  $L^k$  del panel  $j$ . Mientras que  $M(p, q, \eta)$  es la suma de funciones

$$M(p, q, \eta) = -qM_1 - |\eta|qM_2 + |\eta|qM_3 \quad ; \quad (7.36)$$

donde

$$M_1 = \int \frac{dp}{\sqrt{R^2 + \eta^2}} \quad ; \quad (7.37)$$

$$M_2 = \int \frac{dp}{R^2} \quad ; \quad (7.38)$$

$$M_3 = \int \frac{dp}{\left[ \sqrt{R^2 + \eta^2} - |\eta| \right] \sqrt{R^2 + \eta^2}} \quad ; \quad (7.39)$$

con  $R = R(p, q) = \sqrt{p^2 + q^2}$ . Evaluemos cada integral  $M_1, M_2, M_3$  por separado, siendo inmediatas las dos primeras

$$M_1 = \int \frac{dp}{\sqrt{p^2 + (q^2 + \eta^2)}} = \ln \left[ p + \sqrt{p^2 + (q^2 + \eta^2)} \right] \quad ; \quad (7.40)$$

$$M_2 = \int \frac{dp}{p^2 + q^2} = \frac{1}{q} \tan^{-1} \left[ \frac{p}{q} \right] \quad . \quad (7.41)$$

Para resolver la integral restante

$$M_3 = \int \frac{dp}{\left[ \sqrt{p^2 + (q^2 + \eta^2)} - |\eta| \right] \sqrt{p^2 + (q^2 + \eta^2)}} \quad ; \quad (7.42)$$

mediante el cambio de variable  $p = \sqrt{q^2 + \eta^2} \sinh \xi$  hacemos

$$dp = \sqrt{q^2 + \eta^2} \cosh \xi d\xi \quad ; \quad \sinh \xi = p / \sqrt{q^2 + \eta^2} \quad ; \quad (7.43)$$

luego

$$p^2 + (q^2 + \eta^2) = (q^2 + \eta^2)(\sinh^2 \xi + 1) \quad ; \quad (7.44)$$

$$\sqrt{p^2 + (q^2 + \eta^2)} = \sqrt{q^2 + \eta^2} \cosh \xi \quad . \quad (7.45)$$

Reemplazando en  $M_3$

$$M_3 = \int \frac{d\xi}{\sqrt{q^2 + \eta^2} \cosh \xi - |\eta|} \quad ; \quad (7.46)$$

la cual admite la función solución  $M_3 = M_3(\xi, q, \eta)$

$$M_3 = \frac{2}{q} \tan^{-1} \left[ \frac{\sqrt{q^2 + \eta^2} e^\xi - |\eta|}{q} \right] \quad . \quad (7.47)$$

Para verificar esta función solución podemos calcular su derivada, la cual debe coincidir con el último integrando,

$$\frac{\partial M_3}{\partial \xi} = \frac{2}{q} \frac{1}{1 + x^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad ; \quad x = \frac{\sqrt{q^2 + \eta^2} e^\xi - |\eta|}{q} \quad ; \quad (7.48)$$

evaluando la derivada

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\sqrt{q^2 + \eta^2} e^\xi}{q} \quad ; \quad x^2 = \frac{(q^2 + \eta^2) e^{2\xi} + \eta^2 - 2|\eta| \sqrt{q^2 + \eta^2} e^\xi}{q^2} \quad ; \quad (7.49)$$

y la función

$$\frac{1}{1 + x^2} = \frac{q^2}{(q^2 + \eta^2) e^{2\xi} + \eta^2 - 2|\eta| \sqrt{q^2 + \eta^2} e^\xi + q^2} \quad ; \quad (7.50)$$

reemplazando

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_3}{\partial \xi} &= \frac{2}{q} \frac{q^2}{(q^2 + \eta^2)e^{2\xi} + \eta^2 - 2|\eta|\sqrt{q^2 + \eta^2}e^\xi + q^2} \frac{\sqrt{q^2 + \eta^2}e^\xi}{q} \\
&= \frac{2}{(q^2 + \eta^2)e^{2\xi} + (q^2 + \eta^2) - 2|\eta|\sqrt{q^2 + \eta^2}e^\xi} \sqrt{q^2 + \eta^2}e^\xi \\
&= \frac{2\sqrt{q^2 + \eta^2}e^\xi}{\sqrt{q^2 + \eta^2}e^\xi [\sqrt{q^2 + \eta^2}e^\xi + \sqrt{q^2 + \eta^2}e^{-\xi} - 2|\eta|]} \\
&= \frac{1}{\sqrt{q^2 + \eta^2}(e^\xi + e^{-\xi})/2 - |\eta|} \equiv \frac{1}{\sqrt{q^2 + \eta^2} \cosh \xi - |\eta|} ; \tag{7.51}
\end{aligned}$$

derivada que reproduce el integrando. Ahora expresamos  $\xi = \xi(p)$  con

$$\sinh(\xi) = \frac{e^\xi - e^{-\xi}}{2} = \frac{p}{\sqrt{q^2 + \eta^2}} = z ; \tag{7.52}$$

de donde

$$e^\xi - e^{-\xi} = 2z \quad \rightarrow \quad e^{2\xi} - 2ze^\xi - 1 = 0 ; \tag{7.53}$$

$$y^2 - 2zy - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad y = z \pm \sqrt{z^2 + 1} ; \tag{7.54}$$

con  $e^\xi = y$  dado por

$$e^\xi = \frac{p}{\sqrt{q^2 + \eta^2}} \pm \sqrt{\frac{p^2}{q^2 + \eta^2} + 1} ; \tag{7.55}$$

es decir

$$e^\xi \sqrt{q^2 + \eta^2} = p \pm \sqrt{p^2 + q^2 + \eta^2} . \tag{7.56}$$

Adoptando la raíz negativa, la tercera integral monopolar  $M_3$  la podemos escribir como

$$M_3 = \frac{2}{q} \tan^{-1} \left[ \frac{p - |\eta| - \sqrt{p^2 + q^2 + \eta^2}}{q} \right] ; \tag{7.57}$$

y la función  $M(p, q, \eta)$  queda en primera instancia como

$$\begin{aligned}
M(p, q, \eta) &= 2|\eta| \tan^{-1} \left[ \frac{p - |\eta| - \sqrt{p^2 + q^2 + \eta^2}}{q} \right] - \\
&\quad - q \ln \left[ p + \sqrt{p^2 + (q^2 + \eta^2)} \right] - |\eta| \tan^{-1} \left[ \frac{p}{q} \right] . \tag{7.58}
\end{aligned}$$

Empero, el aporte por diferencia entre los vértices  $(p_b, q_b)$ ,  $(p_a, q_a)$  de cada lado  $L^k$  para la función  $\tan^{-1}(p/q)$  lo podemos escribir como

$$\tan^{-1} \left[ \frac{p_b}{q_b} \right] - \tan^{-1} \left[ \frac{p_a}{q_a} \right] = \beta_b - \beta_a = \beta^k ; \tag{7.59}$$

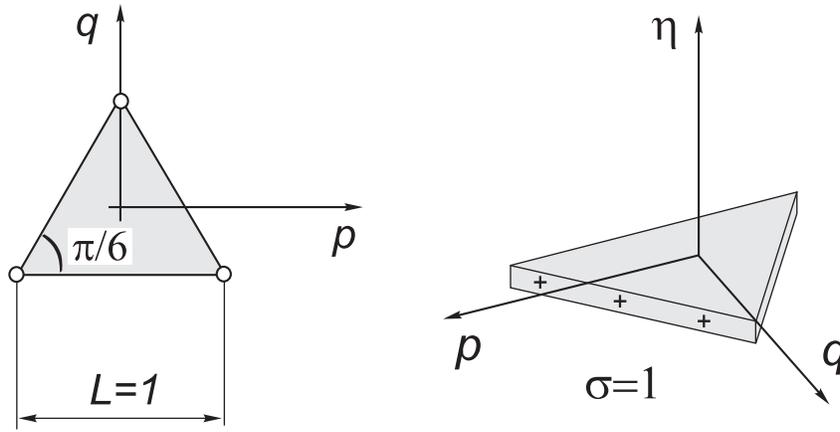


Figura 7.9: Triángulo equilátero con densidad monopolar unitaria ( $\sigma = 1$ ).

donde  $\beta_a$  es el ángulo del vértice  $(p_a, q_a)$ ,  $\beta_b$  es el del vértice  $(p_b, q_b)$ ,  $\beta^k$  es el ángulo de vista del lado  $L^k$ , con signo y visto desde el origen  $O$  del diedro planar rotante  $p, q$ . Al sumar todos los ellos sobre el perímetro cerrado del panel

$$\sum_{k=1}^n \beta^k = \beta^1 + \beta^2 + \dots + \beta^n \equiv 0 \quad . \quad (7.60)$$

Esto es, el aporte neto sobre todo el perímetro cerrado de la suma por diferencia de esta función es nulo, y por lo tanto la omitiremos en la expresión de  $M(p, q, \eta)$ . El origen  $O$  es la proyección del punto de observación  $\mathbf{x}_i$  en la superficie del plano que contiene al panel  $j$ , es fijo para la integración a lo largo de todo el perímetro, y puede quedar localizado en cualquier posición finita de dicho plano.

### 7.6.3 Resumen de cómputo de la matriz monopolar

En resumen, el coeficiente de influencia monopolar  $\tilde{C}_{ij}$ , entre el panel fuente  $j$  y el punto de colocación  $\mathbf{x}_i$  lo podemos calcular como la suma de los aportes  $\tilde{C}^k$  de cada lado  $L^k$ ,

$$\tilde{C}_{ij} = \sum_{k=1}^m \tilde{C}^k \quad ; \quad \tilde{C}^k = M(p_b, q_b, \eta) - M(p_a, q_a, \eta) \quad ; \quad a = m_k \quad ; \quad b = m_{k+1} \quad ; \quad (7.61)$$

donde  $[m_1, m_2, \dots, m_m, m_{m+1} = m_1]$  es la secuencia cerrada de nodos asociados con el panel  $j$ , siendo  $p_a, p_b$  las abscisas de los nodos  $a, b$  del lado  $L^k$ ,  $q_a = q_b$  es la ordenada común según el diedro  $p, q$  paralelo a cada lado  $L^k$  y definidos por los productos escalares

$$p_a = (\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{t}_a \quad ; \quad p_b = (\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{t}_a \quad ; \quad q_a = q_b = (\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{n}_a \quad ; \quad (7.62)$$

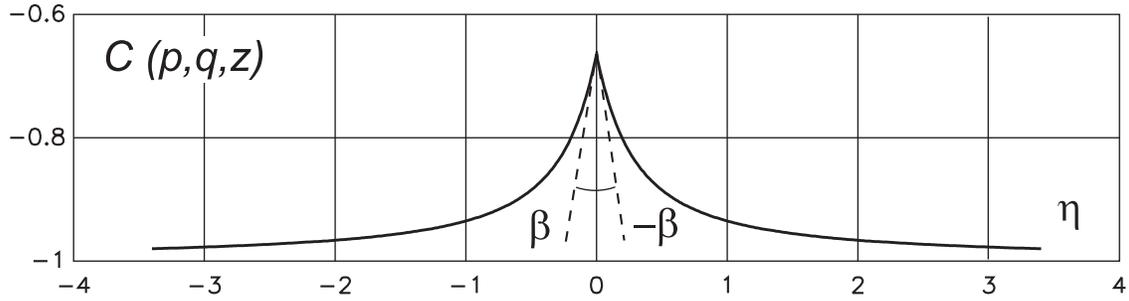


Figura 7.10: Simetría del coeficiente monopolar con respecto al plano del panel.

donde  $\mathbf{t}_a$ ,  $\mathbf{n}_a$  son los versores tangencial y normal del lado  $L^k$  contenidos en el plano del panel  $j$ . Con la función  $M(p, q, \eta)$  dada por

$$M(p, q, \eta) = 2|\eta| \tan^{-1} \left[ \frac{p - |\eta| - \sqrt{p^2 + q^2 + \eta^2}}{q} \right] - q \ln \left[ p + \sqrt{p^2 + (q^2 + \eta^2)} \right] \quad ; \quad (7.63)$$

#### 7.6.4 Simetría y continuidad monopolar

Consideremos ahora al coeficiente monopolar  $\tilde{C}_{ij}$  como una función del punto de observación  $p, q, \eta$ . Por ejemplo, para un triángulo equilátero de lado unitario con el eje  $\eta$  (normal a su superficie) pasando sobre su centroide (figura 7.9), podemos concluir que verifica las siguientes propiedades clásicas (Brebbia, Mikhlin) del potencial de una capa (figura 7.10): i) es una función simétrica de la distancia  $\eta$  entre el punto de medición del potencial al plano que contiene al panel, esto es,  $\tilde{C}(p, q, \eta) = \tilde{C}(p, q, -\eta)$ , ii) las tangentes a la curva  $\tilde{C}(p, q, \eta) = f(\eta)$  en el origen  $\eta = 0$  son finitas y de signo opuesto, esto es, la derivada  $\partial\tilde{C}/\partial\eta$  (la componente normal de la velocidad monopolar), presenta un salto finito al atravesar el plano del panel. Mientras que en la figura 7.11 mostramos la intensidad del coeficiente monopolar  $\tilde{C}(p, q, \eta)$  (para el mismo panel triangular), para puntos  $(p, q, \eta)$  sobre un plano  $\alpha$  paralelo al del panel, para dos cotas  $\eta$  diferentes.

## 7.7 Integral analítica de la matriz dipolar A

Para un panel plano poligonal ubicado en una posición arbitraria en 3D, procedamos a un cálculo analítico del coeficiente dipolar  $\tilde{A}_{ij}$ , definido por la integral,

$$\tilde{A}_{ij} = \int_{S_j} d\Gamma_y \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{r} \quad ; \quad (7.64)$$

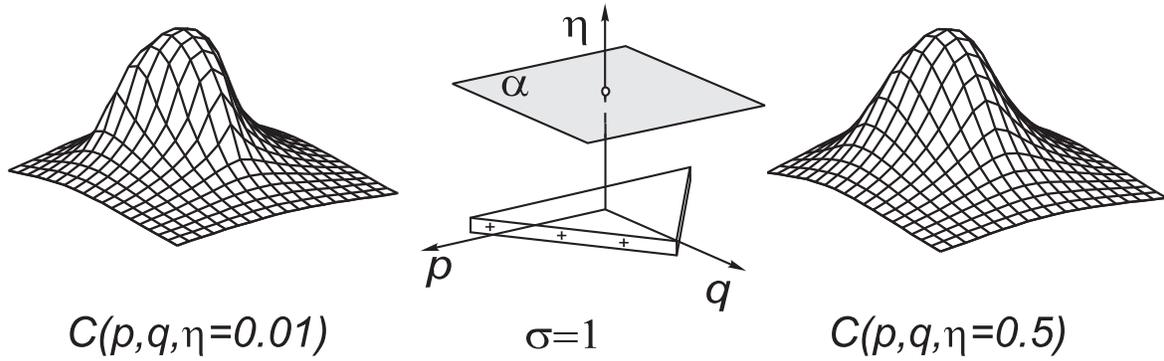


Figura 7.11: Intensidad del coeficiente monopolar en el plano  $\alpha$ , para las cotas:  $\eta = 0.01$  (izq.),  $\eta = 0.50$  (der.).

donde  $\tilde{A}_{ij} = A_{ij}/4\pi$ ,  $S_j$  es la superficie del panel  $j$ ,  $r = |\mathbf{y} - \mathbf{x}_i|$  es la distancia entre el punto de colocación  $\mathbf{x}_i$  y el punto de integración variable  $\mathbf{y}$  sobre la superficie del panel,  $\partial_n$  es la derivada según la dirección normal al panel  $n$ .

### 7.7.1 Función auxiliar dipolar $W$

El núcleo  $\partial r^{-1}/\partial n$  del coeficiente dipolar lo podemos expresar en la forma

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{-1}{r^2} \frac{\eta}{r} = -\frac{\eta}{r^3} \quad (7.65)$$

Otra vez empleamos el mismo artilugio utilizado en el coeficiente monopolar: para facilitar la integración se busca una función  $W(R, \eta)$  tal que su laplaciano bidimensional  $\Delta_{pq}W$  sobre la superficie del panel sea igual al núcleo polar  $-\eta/r^3$ , es decir,

$$\Delta_{pq}W = -\frac{\eta}{r^3} \quad ; \quad (7.66)$$

donde  $r = \sqrt{R^2 + \eta^2}$ ,  $R = \sqrt{p^2 + q^2}$ , entonces la integral de superficie la reemplazamos por su integral de línea equivalente dada por el teorema de la divergencia 2D

$$\tilde{A}_{ij} = \int_{S_j} \Delta_{pq}W dS_{pq} = \int_{L_j} (\nabla_{pq}W, \mathbf{n}) dL \quad ; \quad (7.67)$$

donde  $\mathbf{n}$  es el versor normal al contorno  $L_j$  pero contenido en el plano del panel,  $\Delta_{pq}$  es el operador laplaciano en las coordenadas bidimensionales  $p, q$  localizadas sobre la superficie del mismo,  $W = W(R, \eta)$  es una función suficientemente diferenciable en  $R^3$ ,  $R = R(p, q)$  es la proyección del vector posición  $\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{x}_i$  sobre el plano que contiene al panel,  $\eta$  es la distancia entre el punto de colocación  $\mathbf{x}_i$  y dicho plano, distancia constante durante la

integración. Para hallar  $W(R, \eta)$  resolvamos la ecuación diferencial dada por su laplaciano  $\Delta_{pq}W$  en las coordenadas polares  $R, \theta$ , con  $\partial W/\partial\theta = 0$ ,

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial W}{\partial R} \right) = -\frac{\eta}{\{R^2 + \eta^2\}^{3/2}} \quad ; \quad (7.68)$$

es decir

$$R \frac{\partial W}{\partial R} = -\eta \int \frac{R}{\{R^2 + \eta^2\}^{3/2}} dR \quad ; \quad (7.69)$$

efectuando el cambio de variable  $\xi = \eta^2 + R^2$  e integrando una vez, tendremos

$$\int \frac{R}{\{R^2 + \eta^2\}^{3/2}} dR = \int \frac{d\xi}{2\xi^{3/2}} = -\xi^{-1/2} + C = -\{R^2 + \eta^2\}^{-1/2} + C \quad ; \quad (7.70)$$

sin pérdida de generalidad podemos adoptar  $C = 0$ , luego

$$R \frac{\partial W}{\partial R} = \eta \{R^2 + \eta^2\}^{-1/2} \quad ; \quad (7.71)$$

$$W = \int \frac{\eta}{R\sqrt{R^2 + \eta^2}} dR \quad ; \quad (7.72)$$

la cual admite la función solución

$$W(R, \eta) = \frac{\eta}{|\eta|} \ln \left[ \frac{\sqrt{R^2 + \eta^2} - |\eta|}{R} \right] \quad \text{para } R > 0 \quad ; \quad (7.73)$$

donde el argumento del logaritmo es positivo para todo  $R, \eta$  finitos.

### 7.7.2 Integral de línea dipolar

La integral de línea para el coeficiente dipolar  $\tilde{A}_{ij}$ , es igual a la suma de las contribuciones  $\tilde{A}^k$  de cada lado  $L^k$  del polígono cerrado de  $m$  vértices,

$$\tilde{A}_{ij} = \sum_{k=1}^m \tilde{A}^k \quad ; \quad \tilde{A}^k = \int_{S^k} (\nabla_{pq}W, \mathbf{n}) dL \quad ; \quad (7.74)$$

donde cada lado  $L^k$  está definido por el par de nodos  $a = m_k, b = m_{k+1}$ , en la secuencia cerrada  $[m_1, m_2, \dots, m_m, m_{m+1} = m_1]$  del panel  $j$ . En las condiciones supuestas  $W = W(R, \eta)$ , con  $R = R(p, q) = \sqrt{p^2 + q^2}$ , donde  $\eta$  resulta un parámetro constante durante la integración sobre el panel. Para facilitar el cálculo del aporte  $\tilde{A}^k$  de cada lado  $L^k$ , empleamos el mismo procedimiento anterior, en donde hacemos una rotación finita al diedro planar  $p, q$ , de modo tal que el eje  $p$  sea paralelo al lado  $L^k$  que se evalúa por turno, de este modo resulta  $q = cte$  durante la integración a lo largo de dicho lado, siendo únicamente función de la variable  $p$ . El gradiente de  $W$  sobre la superficie del panel lo podemos expresar en la forma

$$\nabla_{pq}W = \frac{\partial W}{\partial R} \nabla_{pq}R \quad ; \quad (7.75)$$

donde  $\nabla_{pq}R = \hat{\mathbf{R}}/R$ . Es decir,

$$\nabla_{pq}W = \frac{\partial W}{\partial R} \nabla_{pq}R = \frac{\partial W}{\partial R} \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R} \quad . \quad (7.76)$$

La proyección del gradiente de  $W$  en la dirección planar  $\mathbf{n}$  está dada por

$$(\nabla_{pq}W, \mathbf{n}) = \frac{\partial W}{\partial R} \frac{(\hat{\mathbf{R}}, \mathbf{n})}{R} \quad ; \quad (7.77)$$

dada la particular disposición del diedro local  $p, q$  en la evaluación del lado genérico  $L^k$  se tiene que  $(\hat{\mathbf{R}}, \mathbf{n}) = -q = \text{cte}$ , de donde

$$(\nabla_{pq}W, \mathbf{n}) = -\frac{\partial W}{\partial R} \frac{q}{R} \quad ; \quad (7.78)$$

donde

$$-\frac{\partial W}{\partial R} = \text{sg}(\eta) \frac{R}{[\sqrt{R^2 + \eta^2} - |\eta|] \sqrt{R^2 + \eta^2}} - \text{sg}(\eta) \frac{1}{R} \quad ; \quad (7.79)$$

tendremos entonces

$$(\nabla_{pq}W, \mathbf{n}) = q \text{sg}(\eta) \frac{1}{[\sqrt{R^2 + \eta^2} - |\eta|] \sqrt{R^2 + \eta^2}} - q \text{sg}(\eta) \frac{1}{R^2} \quad . \quad (7.80)$$

La integral dipolar a lo largo del lado  $L^k$ , puede escribirse en la forma

$$A^k = D(p_b, q_b, \eta) - D(p_a, q_a, \eta) \quad ; \quad (7.81)$$

donde  $p_a, p_b$  son las abscisas de los nodos  $a, b$  del lado  $L^k$ ,  $q_a = q_b$  la ordenada común según el diedro  $p, q$  paralelo a cada lado  $L^k$  definidos por los productos escalares

$$p_a = (\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{t}_a \quad ; \quad p_b = (\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{t}_a \quad ; \quad q_a = q_b = (\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{n}_a \quad ; \quad (7.82)$$

donde  $\mathbf{t}_a, \mathbf{n}_a$  son los versores tangencial y normal del lado  $L^k$  contenidos en el plano del panel  $j$ . Mientras que  $D(p, q, \eta)$  es la suma de funciones

$$D(p, q, \eta) = q \text{sg}(\eta) D_1 - q \text{sg}(\eta) D_2 \quad ; \quad (7.83)$$

con

$$D_1 = \int \frac{dp}{[\sqrt{R^2 + \eta^2} - |\eta|] \sqrt{R^2 + \eta^2}} \quad ; \quad (7.84)$$

$$D_2 = \int \frac{dp}{R^2} \quad ; \quad (7.85)$$

donde  $R = R(p, q) = \sqrt{p^2 + q^2}$ . Evaluemos cada integral  $D_1, D_2$  por separado. La integral  $D_1$  es idéntica a la monopolar  $M_3$  por lo que

$$D_1 = \int \frac{dp}{[\sqrt{p^2 + (q^2 + \eta^2)} - |\eta|] \sqrt{p^2 + (q^2 + \eta^2)}} \quad ; \quad (7.86)$$

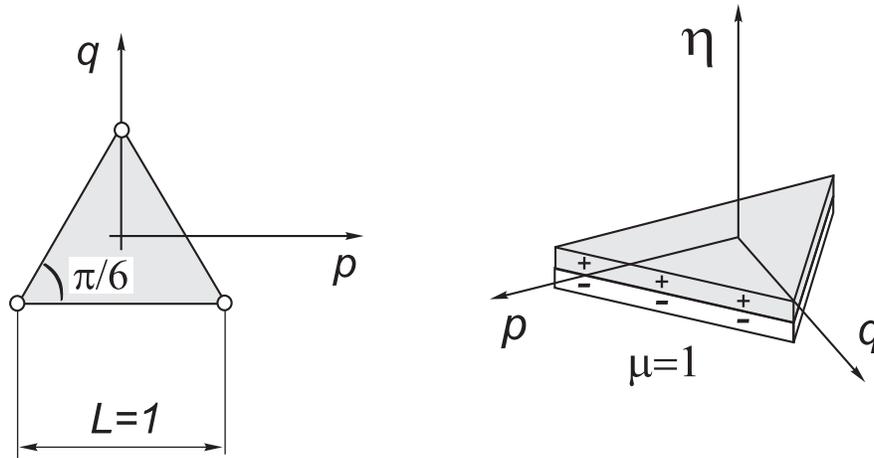


Figura 7.12: Triángulo equilátero con densidad dipolar unitaria ( $\mu = 1$ ).

$$D_1 = \frac{2}{q} \tan^{-1} \left[ \frac{p - |\eta| - \sqrt{p^2 + q^2 + \eta^2}}{q} \right] ; \quad (7.87)$$

La integral  $D_2$  es idéntica a la monopolar  $M_2$ , donde concluimos que su suma a lo largo del perímetro cerrado del panel es nula.

### 7.7.3 Resumen de cómputo de la matriz dipolar

En resumen, el coeficiente dipolar  $\tilde{A}_{ij}$  entre el panel fuente  $j$  y el punto de colocación  $i$ , lo podemos computar como la suma de los aportes  $\tilde{A}^k$  de cada lado  $L^k$ ,

$$\tilde{A}_{ij} = \sum_{k=1}^m \tilde{A}^k ; \quad \tilde{A}^k = D(p_b, q_b, \eta) - D(p_a, q_a, \eta) ; \quad a = m_k ; \quad b = m_{k+1} ; \quad (7.88)$$

donde  $[m_1, m_2, \dots, m_m, m_{m+1} = m_1]$  es la secuencia cerrada de nodos asociados con el panel  $j$ , siendo  $p_a, p_b$  las abscisas de los nodos  $a, b$  del lado  $L^k$ ,  $q_a = q_b$  la ordenada común según el diedro  $p, q$  paralelo a cada lado  $L^k$  definidos por los productos escalares,

$$p_a = (\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{t}_a ; \quad p_b = (\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{t}_a ; \quad q_a = q_b = (\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{n}_a ; \quad (7.89)$$

donde  $\mathbf{t}_a, \mathbf{n}_a$  son los versores tangencial y normal del lado  $L^k$  contenidos en el plano del panel  $j$ . Con la función  $D(p, q, \eta)$  dada por

$$D(p, q, \eta) = 2 \operatorname{sg}(\eta) \tan^{-1} \left[ \frac{p - |\eta| - \sqrt{p^2 + q^2 + \eta^2}}{q} \right] . \quad (7.90)$$

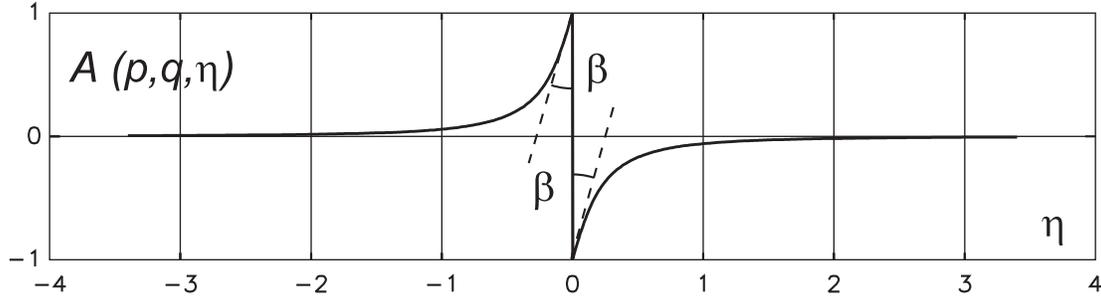


Figura 7.13: Antisimetría del coeficiente dipolar con respecto al plano del panel.

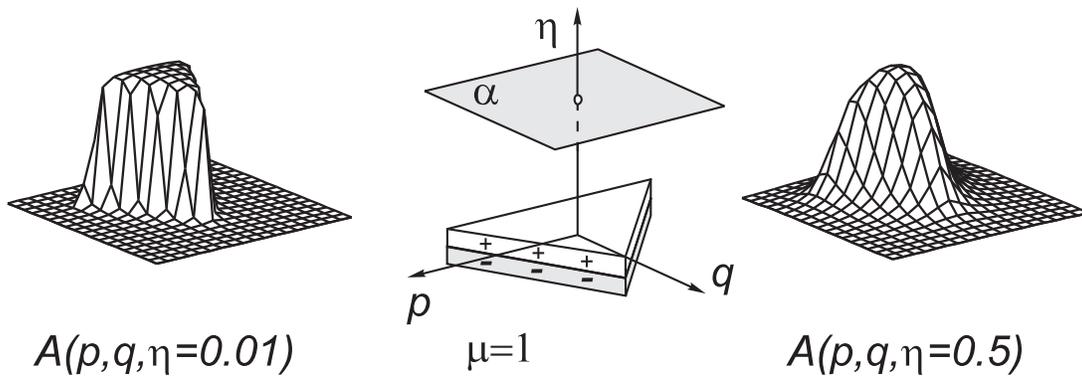


Figura 7.14: Intensidad de la función base dipolar en el plano  $\alpha$ , para las cotas:  $\eta = 0.01$  (izq.),  $\eta = 0.5$  (der.).

#### 7.7.4 Simetría y continuidad dipolar

Consideremos ahora al coeficiente dipolar  $\tilde{A}_{ij}$  como una función del punto de observación  $p, q, \eta$ . Por ejemplo, para un triángulo equilátero de lado unitario con el eje  $\eta$  (normal a su superficie) pasando sobre su centroide (figura 7.12). Podemos concluir que verifica las siguientes propiedades clásicas (Stratton, Vladimirov) del comportamiento del potencial de dos capas (ver figura 7.13): i) es una función antisimétrica de la distancia  $\eta$  entre el punto de medición del potencial al plano que contiene al panel, esto es,  $\tilde{A}(p, q, \eta) = -\tilde{A}(p, q, -\eta)$ , ii) las tangentes a la curva  $\tilde{A}(p, q, \eta) = f(\eta)$  en el origen  $\eta = 0$  son finitas y del mismo signo, esto es, la derivada  $\partial\tilde{A}/\partial\eta$  (la componente normal de la velocidad dipolar), permanece continua al atravesar el plano del panel. En la figura 7.14 mostramos el comportamiento del coeficiente dipolar  $\tilde{A}(p, q, \eta)$  (para el mismo panel triangular), para puntos  $(p, q, \eta)$  sobre un plano  $\alpha$  paralelo al del panel, para dos cotas  $\eta$  diferentes.

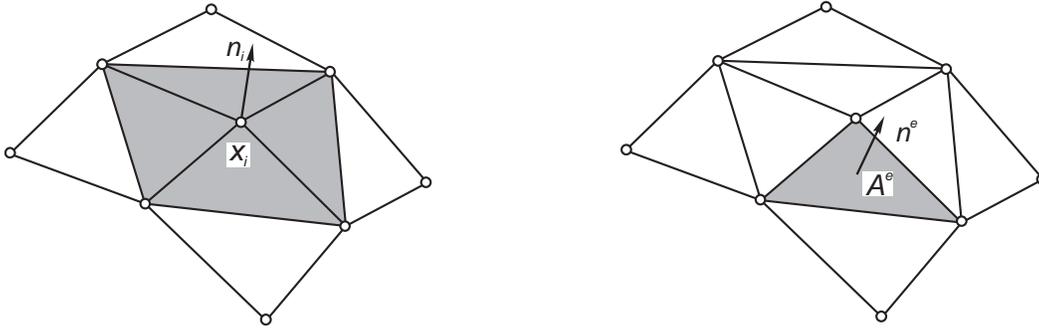


Figura 7.15: Parcela de paneles  $A_i$  alrededor del nodo  $i$ .

## 7.8 Cómputo del campo superficial de velocidades

El campo de velocidades  $\mathbf{u}$  sobre la superficie del objeto puede obtenerse mediante

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\infty + \mathbf{u}_\mu + \mathbf{u}_\sigma \quad ; \quad (7.91)$$

donde  $\mathbf{u}_\mu$  y  $\mathbf{u}_\sigma$  son las velocidades dipolar y monopolar, respectivamente, que se obtienen de (Maître, 1988)

$$\begin{cases} \mathbf{u}_\mu = -\nabla\mu & ; \\ \mathbf{u}_\sigma = \sigma\mathbf{n} & ; \end{cases} \quad (7.92)$$

donde  $\mu$  y  $\sigma$  son las densidades dipolar y monopolar respectivamente,  $\nabla$  es el gradiente superficial y  $\mathbf{n}$  es el versor normal a la superficie. La densidad dipolar  $\mu$  es hallada resolviendo el sistema lineal mientras que la densidad monopolar  $\sigma$  es hallada mediante la condición de flujo deslizante  $\sigma = (-\mathbf{u}_\infty, \mathbf{n})$ . En lo que sigue consideraremos un cómputo nodal para la velocidad mediante promedios sobre la parcela de paneles  $A_i$  adyacentes al nodo  $i$ , ver figura 7.15. Mostraremos una forma fuerte (o clásica) y otra débil para las velocidades de perturbación  $\mathbf{u}_\mu$  y  $\mathbf{u}_\sigma$ , donde la forma débil la desarrollaremos para paneles triangulares.

### 7.8.1 Forma fuerte para las velocidades de perturbación

Un promedio simple para ambas velocidades  $\mathbf{u}_\mu$  y  $\mathbf{u}_\sigma$  lo podemos obtener mediante un promedio pesado con la superficie de la parcela de paneles  $A_i$  alrededor del nodo  $i$ . Para la componente monopolar escribimos

$$\tilde{\mathbf{u}}_\sigma = \sum_{e=1}^{n_p} \mathbf{u}_\sigma^e A^e / \sum_{e=1}^{n_p} A^e \quad ; \quad (7.93)$$

donde  $A^e$  es el área del panel,  $n_p$  es el número de paneles en la parcela  $A_i$  y

$$\mathbf{u}_\sigma^e = \sigma^e \mathbf{n}^e \quad (7.94)$$

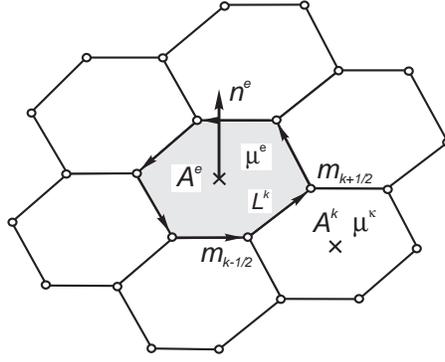


Figura 7.16: Gradiente dipolar en el panel por medio del teorema de Stokes.

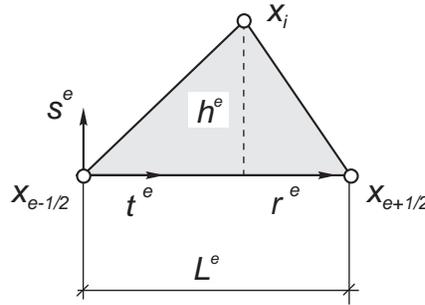


Figura 7.17: Geometría para la función de forma elemental  $N_i^e$  sobre un panel triangular.

es la velocidad monopolar sobre el panel  $e$ , donde  $\sigma^e = (-\mathbf{u}_\infty, \mathbf{n}^e)$  es su densidad superficial, y  $\mathbf{n}^e$  es su versor normal (constante). En la misma manera tendremos para la componente dipolar

$$\tilde{\mathbf{u}}_\mu = \sum_{e=1}^{n_p} \mathbf{u}_\mu^e A^e / \sum_{e=1}^{n_p} A^e \quad ; \quad (7.95)$$

donde

$$\mathbf{u}_\mu^e = -\nabla \mu^e \quad (7.96)$$

es la velocidad dipolar promediada en el panel  $e$  (constante) y  $\nabla$  es el gradiente superficial. Para su cómputo empleamos la siguiente forma vectorial del teorema de Stokes (Smirnov, 1964)

$$\int_A (\mathbf{n} \times \nabla \mu) dA = \int_L \mu d\mathbf{L} \quad ; \quad (7.97)$$

donde  $L$  es el contorno de una superficie abierta  $A$  y  $\mathbf{n}$  es su versor normal. Cuando el gradiente dipolar  $\nabla \mu$  es constante sobre la superficie  $A$  y el versor normal  $\mathbf{n}$  también lo es (panel plano), ésta se reduce a

$$\nabla \mu = -\frac{\mathbf{n}}{A} \times \int_L \mu d\mathbf{L} \quad ; \quad (7.98)$$

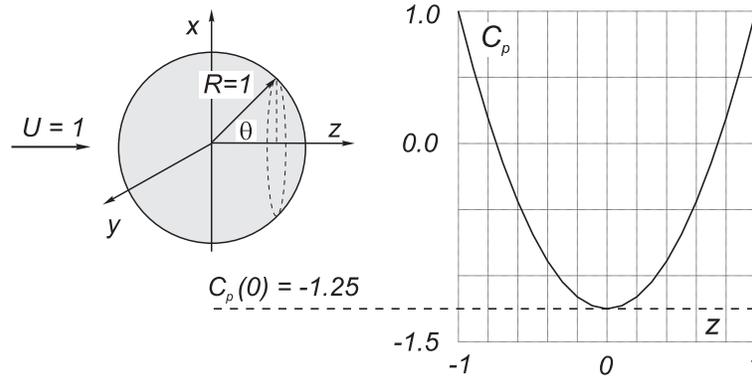


Figura 7.18: Flujo potencial exterior a una esfera (izquierda), coeficiente de presión analítico (derecha).

y sobre un panel  $e$  de  $n_s$  lados, ver figura 7.16, lo podemos discretizar como

$$\nabla \mu^e = -\frac{\mathbf{n}^e}{A^e} \times \sum_{k=1}^{n_s} \tilde{\mu}^k \mathbf{L}^k \quad ; \quad (7.99)$$

donde  $\mathbf{L}^k$  es el lado  $k$  y  $\tilde{\mu}^k$  es algún valor medio, por ejemplo, podemos tomar

$$\tilde{\mu}^k = \begin{cases} (\mu^e + \mu^k)/2 & \text{promedio aritmético ;} \\ (\mu^e A^e + \mu^k A^k)/(A^e + A^k) & \text{promedio superficial .} \end{cases} \quad (7.100)$$

### 7.8.2 Forma débil para las velocidades de perturbación

Para desarrollar una forma débil para las velocidades promediadas  $\tilde{\mathbf{u}}_\mu$  y  $\tilde{\mathbf{u}}_\sigma$  suponemos solo paneles triangulares e introducimos la función de forma nodal

$$N_i = \sum_{e=1}^{n_p} N_i^e \quad ; \quad (7.101)$$

para el nodo  $i$ , donde  $N_i^e$  es la función de forma elemental del panel triangular  $e$  perteneciente a la parcela  $A_i$ , elegida de tal modo que

$$N_i^e(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{para } \mathbf{x} = \mathbf{x}_i \text{ ;} \\ 0 & \text{para } \mathbf{x} = \mathbf{x}_{e-1/2} + \mathbf{t}^e \lambda \text{ ;} \end{cases} \quad (7.102)$$

donde  $\lambda$  es un parámetro libre y

$$\mathbf{t}^e = \mathbf{r}^e / |\mathbf{r}^e| \quad ; \quad (7.103)$$

es el versor tangente del lado  $e$  opuesto al nodo  $i$  y

$$\mathbf{r}^e = \mathbf{x}_{e+1/2} - \mathbf{x}_{e-1/2} \quad ; \quad (7.104)$$

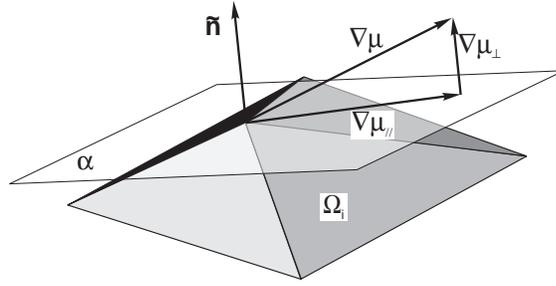


Figura 7.19: Componente dipolar espúrea  $\nabla\mu_{\perp}$  en la forma debilitada.

es el vector del lado, donde  $\mathbf{x}_{e+1/2}$  y  $\mathbf{x}_{e-1/2}$  son sus vértices. Esto es, la función de forma elemental  $N_i^e$  vale uno en el nodo  $i$ , nulo sobre el lado opuesto y con una dependencia lineal entre ambos, de modo que su gradiente sobre el panel  $e$  es constante

$$\nabla N_i^e = \frac{1}{h^e} \mathbf{s}^e \quad ; \quad (7.105)$$

donde  $h^e$  es la altura del panel,  $\mathbf{s}^e$  es el versor ortogonal al normal y al tangencial, el cual lo obtenemos con

$$\mathbf{s}^e = \mathbf{n}^e \times \mathbf{t}^e \quad ; \quad (7.106)$$

de modo que los versores  $\mathbf{t}^e, \mathbf{s}^e, \mathbf{n}^e$  definen una terna en el lado local, ver figura 7.17. El área del panel lo calculamos con  $A^e = h^e L^e / 2$ , donde  $L^e = |\mathbf{r}^e|$  es la longitud del lado opuesto al nodo  $i$  y entonces

$$h^e = \frac{2A^e}{L^e} \quad . \quad (7.107)$$

Introduciendo las ecuaciones (7.106) y (7.107) en (7.105) obtenemos

$$\nabla N_i^e = \frac{L^e}{2A^e} (\mathbf{n}^e \times \mathbf{t}^e) = \frac{\mathbf{n}^e \times \mathbf{r}^e}{2A^e} \quad ; \quad (7.108)$$

donde también  $\mathbf{r}^e = L^e \mathbf{t}^e$ . Para obtener una forma débil del gradiente dipolar emplearemos la función de forma nodal  $N_i$  conjuntamente con las técnicas de Galerkin estándar (Zienkiewicz/Taylor, 1989) y para esto consideremos el siguiente promedio ponderado

$$\tilde{\nabla}\mu = \int_{A_i} N_i \nabla\mu dA / \int_{A_i} N_i dA \quad ; \quad (7.109)$$

sobre la parcela de paneles  $A_i$ . Integrando por partes el numerador tendremos

$$\int_{A_i} N_i \nabla\mu dA = - \int_{A_i} \mu \nabla N_i dA \quad ; \quad (7.110)$$

y discretizando sobre la parcela de paneles  $A_i$

$$\tilde{\mu} = - \sum_{e=1}^{n_s} \int_{A^e} \mu \nabla N_i^e dA / \sum_{e=1}^{n_s} \int_{A^e} N_i^e dA \quad . \quad (7.111)$$

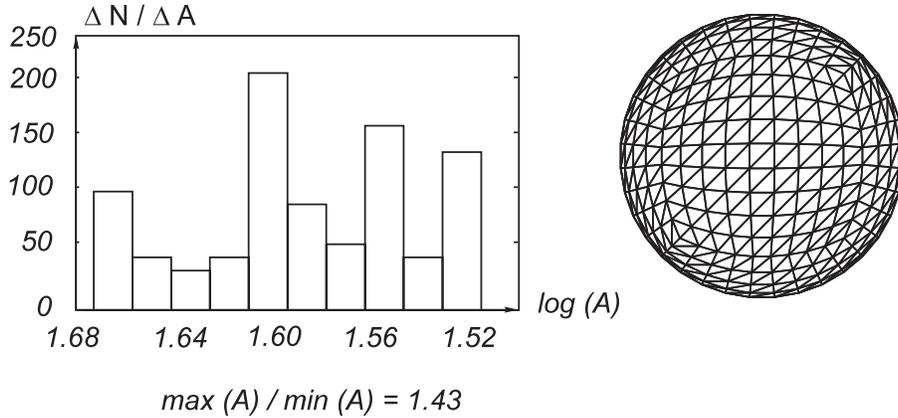


Figura 7.20: Esfera con una malla estructurada (derecha), histograma de las áreas elementales (izquierda).

Como es conocido en elementos finitos (Seegerlind, 1976), para una función de forma lineal  $N_i^e$  definida sobre un elemento triangular

$$\int_{A^e} N_i^e dA = \frac{A^e}{3} \quad ; \quad (7.112)$$

de modo que

$$\sum_{e=1}^{n_p} \int_{A^e} N_i^e dA = \frac{1}{3} \sum_{e=1}^{n_p} A^e = \frac{A_i}{3} \quad ; \quad (7.113)$$

introduciendo (7.108) y (7.113) en (7.112) obtenemos la siguiente forma débil para el gradiente dipolar

$$\tilde{\nabla} \mu = \frac{-3}{2A_i} \sum_{e=1}^{n_s} \mu^e (\mathbf{n}^e \times \mathbf{r}^e) \quad . \quad (7.114)$$

### 7.8.3 Componente dipolar espúrea

En general, la forma débil del gradiente dipolar obtenida con la ecuación (7.114), además de la componente tangencial  $\tilde{\nabla} \mu_{\parallel}$  sobre el plano nodal secante, paralelo al versor normal nodal, puede aparecer una componente *espúrea*  $\tilde{\nabla} \mu_{\perp}$  perpendicular al mismo plano, ver figura 7.19, de modo que

$$\tilde{\nabla} \mu = \tilde{\nabla} \mu_{\parallel} + \tilde{\nabla} \mu_{\perp} \quad . \quad (7.115)$$

Como sólo la componente tangencial  $\tilde{\nabla} \mu_{\parallel}$  tiene significado físico, entonces debemos eliminar la componente espúrea  $\tilde{\nabla} \mu_{\perp}$ . Para esto, notemos que también estará presente cuando

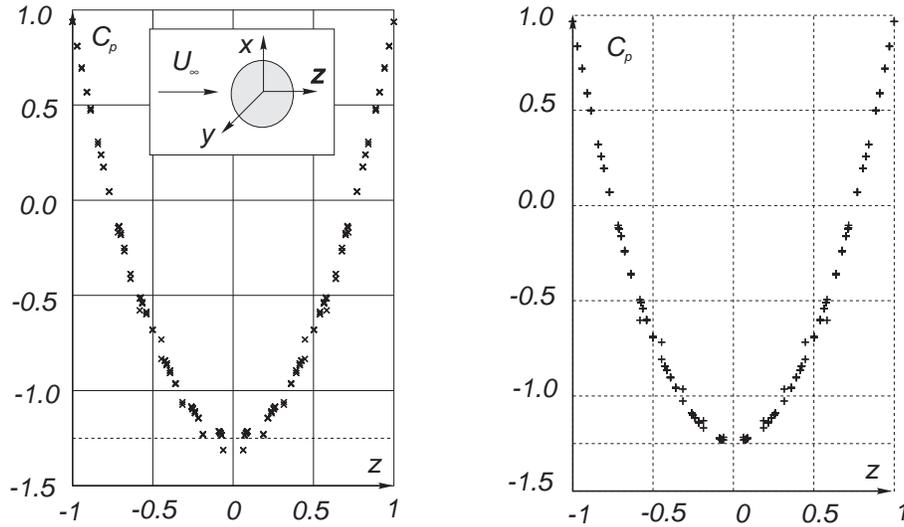


Figura 7.21: Coeficiente de presión  $C_p(z)$  para una malla estructurada sobre una esfera: con una forma fuerte (izquierda) y con una forma debilitada (derecha).

imponemos una densidad dipolar unitaria sobre la parcela de paneles  $A_i$  y suponiendo una relación lineal entre ambos estados escribimos  $\tilde{\nabla}\mu_{\perp} = \alpha\tilde{\nabla}\mu_1$ , donde  $\alpha$  es un factor de proporcionalidad y entonces

$$\tilde{\nabla}\mu_{\parallel} = \tilde{\nabla}\mu - \alpha\tilde{\nabla}\mu_1 \quad ; \quad (7.116)$$

donde  $\tilde{\nabla}\mu_1$  es el gradiente dipolar unitario obtenido por medio de la ecuación (7.114) con  $\mu = 1$  sobre la parcela de paneles  $A_i$

$$\tilde{\nabla}\mu_1 = \frac{-3}{2A_i} \sum_{e=1}^{n_s} (\mathbf{n}^e \times \mathbf{r}^e) \quad ; \quad (7.117)$$

el cual es ortogonal a la componente tangencial

$$(\tilde{\nabla}\mu_1, \tilde{\nabla}\mu_{\parallel}) = 0 \quad . \quad (7.118)$$

Reemplazando ecuación (7.116) en (7.118) hallamos

$$\alpha = \frac{(\tilde{\nabla}\mu, \tilde{\nabla}\mu_1)}{(\tilde{\nabla}\mu_{\parallel}, \tilde{\nabla}\mu_1)} \quad (7.119)$$

que es válida si y solo si

$$|\tilde{\nabla}\mu_1| \neq 0 \quad (7.120)$$

lo cual ocurre, por ejemplo, cuando la parcela de paneles  $A_i$  es plana, desde que todas las normales  $\mathbf{n}^e$  son la misma constante  $\mathbf{n}$  y entonces

$$\tilde{\nabla}\mu_1 = \frac{-3}{2A_i} \mathbf{n} \times \sum_{e=1}^{n_s} \mathbf{r}^e \quad ; \quad (7.121)$$

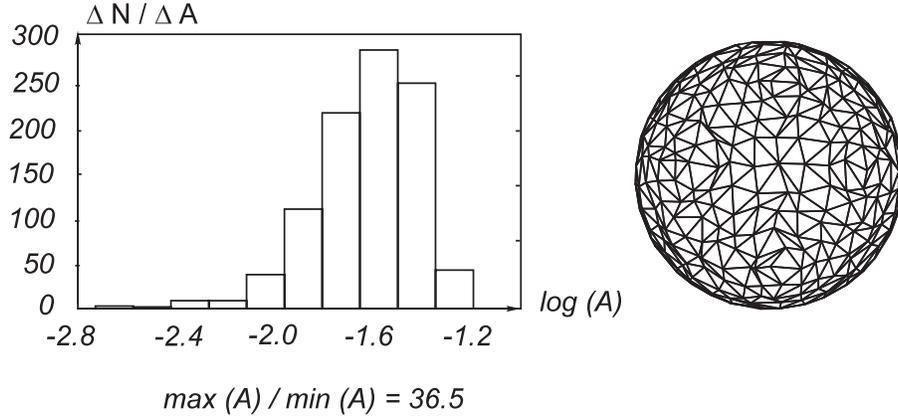


Figura 7.22: Malla de paneles perturbada sobre una esfera (derecha), histograma de las áreas elementales (izquierda).

pero

$$\sum_{e=1}^{n_s} \mathbf{r}^e = \mathbf{0} ; \quad (7.122)$$

desde que es una suma vectorial cerrada. De todas maneras puede mostrarse que la forma fuerte es suficiente para este caso excepcional. Una consecuencia adicional del procedimiento seguido para eliminar la componente espúrea, es que disponemos la normal debilitada

$$\tilde{\mathbf{n}} = \frac{\tilde{\nabla}\mu_1}{|\tilde{\nabla}\mu_1|} \quad \text{si } |\tilde{\nabla}\mu_1| \neq 0 . \quad (7.123)$$

Luego, las velocidades dipolar y monopolar debilitadas las hallamos mediante

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{u}}_\mu = -\tilde{\nabla}\mu_\parallel \\ \tilde{\mathbf{u}}_\sigma = \sigma\tilde{\mathbf{n}} \end{cases} \quad (7.124)$$

siempre que la condición (7.120) se verifique.

#### 7.8.4 Ejemplo numérico

Para validar el método propuesto, hemos considerado el flujo alrededor de una esfera de radio  $R = 1$  con rapidez no perturbada  $U = 1$ . La solución analítica para la velocidad superficial  $u(\theta)$  es (Streeter, 1961)  $u(\theta) = (3/2)U \sin(\theta)$ . El coeficiente de presión  $C_p(\theta) = 1 - |u(\theta)|^2/|U|^2$  resulta igual a  $C_p(\theta) = 1 - (9/4) \sin^2(\theta)$ ; donde  $\theta = \arccos(z/R)$ , ver figura 7.18. Para la solución numérica hemos considerado dos mallas ambas con 972 paneles triangulares. La primera es bastante estructurada y es mostrada en la figura 7.20. En la figura 7.21 mostramos el coeficiente de presión  $C_p(\theta)$  a lo largo del eje  $z$  obtenida con ambas formulaciones, donde con la forma fuerte vemos una leve tendencia a la dispersión.

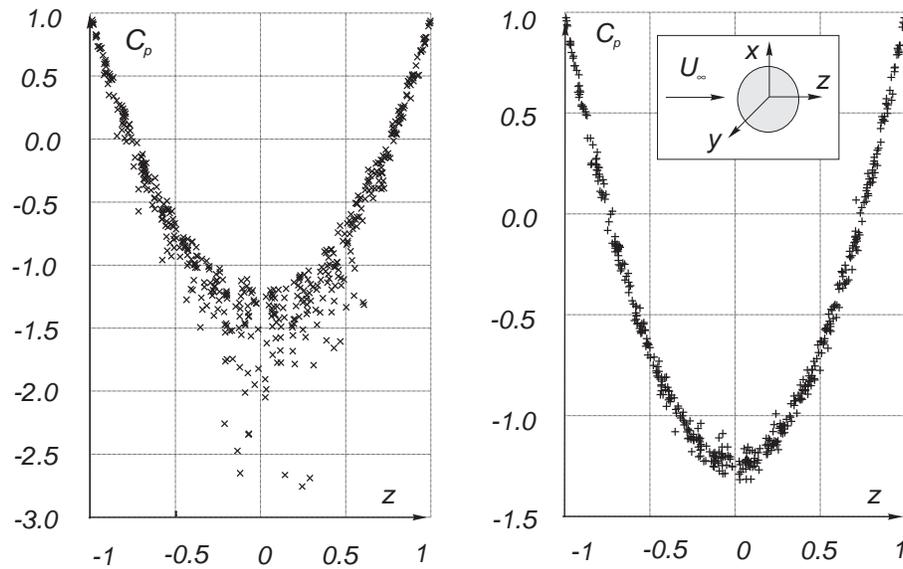


Figura 7.23: Coeficiente de presión  $C_p(z)$  para una malla de paneles no estructurada sobre una esfera: con una forma fuerte (izquierda) y con una forma debilitada (derecha).

Mientras que en la segunda malla hemos agregado un pequeño ruido nodal con el objeto de simular una malla no estructurada, la cual es mostrada en la figura 7.22. Esta malla es obtenida de la primera mediante un ruido nodal  $\varepsilon \mathbf{x} = O(h)$  sumado a las coordenadas nodales, donde  $h$  es un diámetro promedio de los paneles, y luego hemos re-proyectado a la esfera, verificando que los paneles no colapsen. En la figura 7.23 mostramos el coeficiente de presión  $C_p(\theta)$  a lo largo del eje  $z$  obtenido con ambas formulaciones, donde la tendencia a la dispersión de la forma fuerte se manifiesta claramente mientras que la forma debilitada se muestra mucho más estable.

# Capítulo 8

## Método de paneles extendido

### 8.1 Resumen

Desarrollamos un método de elementos de paneles extendido, para el problema linealizado de la resistencia de ola, para el caso del barco lento, donde el patrón de olas con sentido físico es capturado mediante la estrategia clásica de un esquema en diferencias cuasi-Dawson, orientado contra-corriente.

### 8.2 Introducción

En la formulación potencial para el patrón de olas generado por un barco lento surge una dificultad relacionada con la presencia de una superficie libre con condiciones de borde cinemáticas y dinámicas no lineales. La forma clásica para tratar numéricamente los problemas no lineales es resolver una secuencia de problemas lineales, donde esperamos que sus soluciones convergan a la solución del problema original. En nuestro caso la posición de la superficie libre es también parte de las incógnitas del problema. A continuación consideremos someramente el problema general y luego nos concentraremos en el problema linealizado, que lo resolveremos mediante un método de paneles extendido, en el sentido de ser una extensión del método de paneles estándar para superficies fijas, desarrollado originalmente para la discretización de la formulación integral de Morino para flujo potencial subsónico.

### 8.3 El método de Newton Raphson

Recordemos que en el método de paneles estándar únicamente consideramos *superficies fijas*. Por ello, si la posición de la superficie libre fuera conocida, entonces podríamos

emplear este método para obtener el campo potencial a partir de la resolución de un sistema algebraico lineal de la forma  $\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}$ , donde  $\boldsymbol{\mu}$  es el vector de los potenciales de perturbación en los centroides de los paneles,  $\boldsymbol{\sigma}$  es el vector de los flujos de masa a través de los paneles,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{C}$  son las matrices de influencia dipolar y monopolar entre todos paneles, respectivamente, donde ambas son en general llenas y no simétricas. Como el vector de flujos  $\boldsymbol{\sigma}$  lo conocemos a partir de la condición de borde “cinemática” para la velocidad en los borde de flujo, que en el flujo potencial significa la condición de resbalamiento (velocidad normal nula), entonces el problema numérico se reduce a resolver el sistema de ecuaciones para el vector potencial  $\boldsymbol{\mu}$ . Ahora bien, en realidad no sabemos dónde está la superficie libre, por lo que tenemos un conjunto adicional de incógnitas dadas por las elevaciones  $\boldsymbol{\zeta}$  de los nodos pertenecientes a la superficie libre, los cuales ajustan su posición bajo la acción del campo gravitatorio terrestre de intensidad  $g$ . Pero además, los coeficientes de interacción dependen de la geometría de los paneles, en sus distancias y ángulos de vistas relativos, de modo que el sistema previo deberíamos reescribirlo ahora en la forma  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\zeta})\boldsymbol{\mu} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\zeta})\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\zeta})$ , y tendremos que agregar la condición de ajuste en la posición de la superficie libre, dada por la ecuación de Bernoulli (condición de borde dinámica), que en forma discreta la podemos poner en la forma  $\mathbf{R}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\zeta}) = 0$ . Ahora estas ecuaciones definen un sistema no lineal en el par  $\{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\zeta}\}$  que debemos resolver con un método apropiado. A continuación veremos dos opciones para ello mediante el método de Newton Raphson, primero en una versión *discreta*, y luego otra *en el continuo*.

### 8.3.1 El método de Newton Raphson *discreto*

Desde que la primera ecuación es lineal en  $\boldsymbol{\mu}$ , un método iterativo simple basado en la iteración de punto fijo podría ser la siguiente:

- 1) Elegir un campo de elevación inicial:  $\boldsymbol{\eta}^0, n \leftarrow 0$
- 2) Computar el campo potencial  $\boldsymbol{\Phi}^n$  a partir de:

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\eta}^n)\boldsymbol{\Phi}^n = \mathbf{C}(\boldsymbol{\zeta}^n)\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\zeta}^n) \quad (8.1)$$

- 3) Computar la nueva posición de la superficie libre resolviendo para  $\boldsymbol{\eta}^{n+1}$  a partir de:

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\eta}^{n+1}, \boldsymbol{\Phi}^n) = 0 \quad (8.2)$$

- 4) Si no converge:  $n \leftarrow n + 1$ , volver a 2)

Esta estrategia es simple e involucra sólo pequeñas modificaciones al código de paneles estándar, pero exhibe muy bajas tasas de convergencia aún para muy pequeñas elevaciones, en cuyo caso el sistema es casi lineal. Entonces, en primera instancia podríamos proponer en su reemplazo un algoritmo basado en Newton Raphson, donde el cómputo

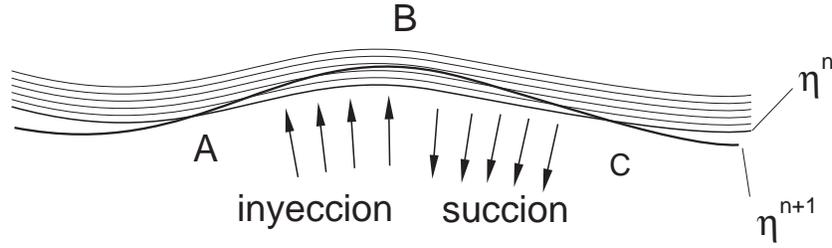


Figura 8.1: Método del *flujo de transpiración*.

de los incrementos de  $\{\Delta\mu^{n+1}, \Delta\zeta^{n+1}\}$  deberían obtenerse de una ecuación matricial de la forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & (\partial\mathbf{A}/\partial\zeta)\boldsymbol{\mu} \\ (\partial\mathbf{R}/\partial\boldsymbol{\mu}) & (\partial\mathbf{R}/\partial\zeta) \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\mu}^{n+1} \\ \Delta\zeta^{n+1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\zeta)\boldsymbol{\mu} - \mathbf{C}(\zeta)\boldsymbol{\sigma}(\zeta) \\ \mathbf{R}(\zeta, \boldsymbol{\mu}) \end{bmatrix}^n \quad (8.3)$$

### 8.3.2 El método de Newton Raphson en el continuo

Otra posibilidad es proponer un esquema de Newton Raphson para las “ecuaciones del continuo” y luego discretizar ese sistema. El sistema resultante es diferente del anterior, porque la discretización y la solución de Newton-Raphson no conmutan, y nos muestra ciertas ventajas. Primero, la formulación resultante es por lejos mucho más simple, como luego veremos. Segundo, el número de incógnitas en el sistema de Newton-Raphson “discreto” es  $2n_p + n_b$  donde  $n_p$  es el número de paneles en la superficie libre y  $n_b$  es el número de paneles sobre la superficie mojada de la nave, mientras que en el sistema de Newton Raphson “en el continuo” el número de incógnitas es simplemente  $n_p + n_b$ . Desde que en general,  $n_p > n_b$  y en un gran número de casos  $n_p \gg n_b$ , esta variante “en el continuo” permite un significativo ahorro en los recursos computacionales, y es la que adoptaremos. Ahora supongamos un proceso iterativo donde en su etapa  $l$  disponemos el par aproximado  $(\Phi, \zeta)^l$ , para el potencial total  $\Phi$  y para la elevación  $\zeta$ . Como es usual en los métodos iterativos, esperamos que el par de la iteración siguiente  $(\Phi, \zeta)^{l+1}$  sea cercano a  $(\Phi, \eta)^l$ , y esto nos permite introducir la expansión a primer orden en los incrementos

$$\begin{cases} \varepsilon\psi = \Phi^{l+1} - \Phi^l \\ \varepsilon\eta = \zeta^{l+1} - \zeta^l \end{cases} \quad (8.4)$$

Para hacer primero Newton Raphson en el continuo y luego discretizar, necesitamos obtener ecuaciones lineales para el *incremento de potencial*  $\psi$ , cuando una pequeña perturbación en el *incremento de altura*  $\eta$  en la superficie libre es producida. Como ambas funciones  $\Phi^{l+1, l}$  son armónicas, y con condiciones de borde tipo Neumann homogéneas en las superficies mojada de la nave y al infinito, y esos bordes no cambian de posición con

la perturbación en la superficie libre, es claro que esas ecuaciones también se aplican al incremento  $\psi$ . Lo único que cambia es la posición de la superficie libre y para dar cuenta de ese cambio podemos introducir un *flujo de transpiración*  $\sigma'$  en la condición de borde de la superficie libre, para el incremento  $\psi$ , flujo asimilable también a una técnica de expansión asintótica. Este flujo es un término fuente que se obtiene a partir de la iteración anterior. Su nombre responde a una interpretación hidrodinamicista, y lo podemos comprender intuitivamente a partir de la figura 8.1. Denotemos con  $\mathbf{u}_l$  la velocidad en la iteración  $l$ , correspondiente a una posición de la superficie libre dada por  $\zeta^l$ . Entonces, una pequeña perturbación en la posición de la superficie libre  $\Delta\zeta$  la podemos simular agregando un *flujo de emisión* en aquellos puntos donde la nueva posición  $\zeta^{l+1} = \zeta^l + \eta$  tiende a separarse de la vieja posición  $\zeta^l$ , mientras que tenemos que agregar un *flujo de succión* en aquellos puntos donde  $\zeta^{l+1}$  tiende a aproximarse a  $\zeta^l$ .

## 8.4 Método de paneles

La solución por paneles procede en dos etapas principales. Primero resolvemos el problema de flujo básico. Segundo, resolvemos el problema de flujo perturbado en cada velocidad. Para ambas etapas empleamos la misma malla de paneles, donde la porción de superficie libre coincide con el plano de equilibrio hidrostático (plano  $z = 0$ ). La malla de paneles es una poliédrica de caras planas  $\Gamma_n = \Gamma_p \cup \Gamma_b$ , donde  $\Gamma_p$  es la submalla con  $n_p$  paneles sobre una porción finita de la superficie libre  $\Gamma_F$ , y  $\Gamma_b$  es la submalla con  $n_b$  paneles sobre la superficie mojada de la nave. El número total de paneles activos es  $n = n_p + n_b$  y usualmente tendremos  $n_p \gg n_b$ . La numeración de los paneles será correlativa para un cómodo tratamiento por sub-matrices, comenzando con la superficie libre  $\Gamma_p$  y luego con la nave  $\Gamma_b$ . Empleamos una formulación de paneles de bajo orden para ambos casos, con colocación en los centroides de los paneles para obtener un sistema de ecuaciones algebraicas linealizado, donde las matrices del sistema son cuadradas i) de dimensión  $N = n$  en el problema del flujo básico, y de dimensión  $N = n + 2n_y$  en el problema de flujo perturbado, con  $n_y \ll n$ .

### 8.4.1 Método de paneles para el flujo básico

El sistema de ecuaciones por el método de paneles para el flujo básico puede escribirse como  $\mathbf{H}^0 \boldsymbol{\mu}^0 = \mathbf{b}^0$ , donde  $\mathbf{H}^0$  es la matriz del sistema,  $\boldsymbol{\mu}^0 = -\boldsymbol{\phi}^0$  es el vector bipolar evaluado en los centroides de los  $n$  paneles, igual a menos el vector de los potenciales de perturbación

$$\boldsymbol{\phi}^0 = [\phi^0(\mathbf{x}_1) \quad \phi^0(\mathbf{x}_2) \quad \dots \quad \phi^0(\mathbf{x}_n)]^T \quad ; \quad (8.5)$$

y  $\mathbf{b}^0$  es el vector fuente, donde el supraíndice indica cantidades asociadas con el flujo básico. La matriz del sistema  $\mathbf{H}^0$  es la suma  $\mathbf{H}^0 = 1/2\mathbf{I} + \mathbf{A}$ , de la matriz identidad  $\mathbf{I}$  escaleada y la matriz de influencia bipolar  $\mathbf{A}$ . El vector fuente  $\mathbf{b}^0 = \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}^0$ , es el producto de la matriz de influencia monopolar  $\mathbf{C}$  y el vector de flujos

$$\boldsymbol{\sigma}^0 = [\sigma^0(\mathbf{x}_1) \quad \sigma^0(\mathbf{x}_2) \quad \dots \quad \sigma^0(\mathbf{x}_n)]^T \quad ; \quad (8.6)$$

obtenido por medio de la condición de borde deslizante sobre las paredes sólidas, donde la componente normal de la velocidad es nula, obteniendo  $\sigma^0(\mathbf{x}_j) = -\mathbf{u}_0^T(\mathbf{x}_j)\mathbf{n}(\mathbf{x}_j)$  para  $j = 1, 2, \dots, n$ , donde  $\mathbf{n}(\mathbf{x}_j)$  es el versor normal  $j$  orientado hacia la cara mojada. Las matrices de influencia bipolar y monopolar  $A_{ij}, C_{ij}$  están dadas por las integrales de superficie

$$A_{ij} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} d\Gamma_j \frac{\mathbf{r}_{ij}^T \mathbf{n}_j}{r_{ij}^3} \quad \text{and} \quad C_{ij} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} d\Gamma_j \frac{1}{|\mathbf{r}_{ij}|} \quad \text{para } i, j = 1, 2, \dots, n \quad ; \quad (8.7)$$

donde  $\mathbf{r}_{ij} = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$  es la distancia entre el centroide  $\mathbf{x}_i$  y el punto de integración  $\mathbf{x}_j$  sobre la superficie del panel  $j$ , y  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ . El sistema matricial para el problema del flujo básico puede descomponerse como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{pp} & \mathbf{A}_{pb} \\ \mathbf{A}_{bp} & \mathbf{A}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_p^0 \\ \boldsymbol{\mu}_b^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{pp} & \mathbf{C}_{pb} \\ \mathbf{C}_{bp} & \mathbf{C}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_p^0 \\ \boldsymbol{\sigma}_b^0 \end{bmatrix} \quad ; \quad (8.8)$$

donde  $\mathbf{A}_{ii}, \mathbf{C}_{ii}$  son los bloques de auto-influencia,  $\mathbf{A}_{ij}, \mathbf{C}_{ij}$  con  $i \neq j$  son los bloques de acoplamiento.

### 8.4.2 Método de paneles para el flujo perturbado

Para el problema de flujo perturbado todas las superficies permanecen fijas, de modo que empleamos la misma malla y escribimos un sistema matricial similar

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{pp} & \mathbf{A}_{pb} \\ \mathbf{A}_{bp} & \mathbf{A}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_p \\ \boldsymbol{\mu}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{pp} & \mathbf{C}_{pb} \\ \mathbf{C}_{bp} & \mathbf{C}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_p \\ \boldsymbol{\sigma}_b \end{bmatrix} \quad ; \quad (8.9)$$

la condición de borde tipo Neumann es nula sobre la nave  $\boldsymbol{\sigma}_b = \mathbf{0}$  mientras que sobre la superficie libre

$$\boldsymbol{\sigma}_p = \mathbf{D}_{pp}\boldsymbol{\mu}_p + \mathbf{f} \quad ; \quad (8.10)$$

donde  $\mathbf{D}_{pp} = \text{diag}(D_i)$ , con  $D_i = D(\mathbf{x}_i)$ , es la *matriz de superficie libre* y  $f_i = f(\mathbf{x}_i)$  es el *vector forzante*. Reemplazando  $\boldsymbol{\sigma}_p$  y  $\boldsymbol{\sigma}_b$  y reordenando

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{A}_{pp} - \mathbf{C}_{pp}\mathbf{D}_{pp}) & \mathbf{A}_{pb} \\ (\mathbf{A}_{bp} - \mathbf{C}_{bp}\mathbf{D}_{pp}) & \mathbf{A}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_p \\ \boldsymbol{\mu}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{pp}\mathbf{f} \\ \mathbf{C}_{bp}\mathbf{f} \end{bmatrix} \quad ; \quad (8.11)$$

en este sistema falta introducir las condiciones de radiación desde que sin las mismas (o sin esquemas en contracorriente), el problema hidrodinámico permanece incompletamente formulado.

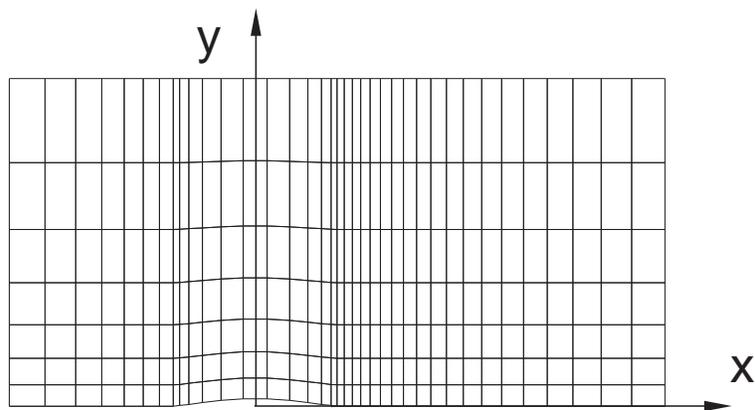


Figura 8.2: Vista  $xy$  de la mitad superior de la malla  $M_1$  con  $37 \times 14$  paneles sobre la superficie libre de referencia, y 154 paneles sobre el casco.

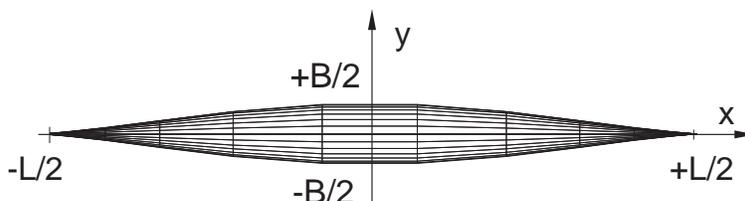


Figura 8.3: Vista  $xy$  de la malla  $M_1$ .

## 8.5 Cómputo de la matriz de inyección

La matriz del sistema extendido matricialmente la escribimos como la suma  $\mathbf{H} = \mathbf{A} + \mathbf{Z}$ , donde  $\mathbf{H}(n, n)$  es la matriz del sistema,  $\mathbf{A}(n, n)$  es la matriz de influencia dipolar,  $\mathbf{Z} = \mathbf{C}\mathbf{D}$  es la matriz de inyección, producto de la matriz de influencia monopolar  $\mathbf{C}(n, n_p)$  y de la matriz de superficie (ampliada)  $\mathbf{D}(n_p, n)$ , donde su columna  $\mathbf{d}_j$  es nula cuando  $j > n_p$ . Sus dimensiones respectivas son las indicadas donde  $n_p + n_b = n$ . Las matrices de influencia  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{C}$ , dipolar y monopolar respectivamente, son en general llenas y no

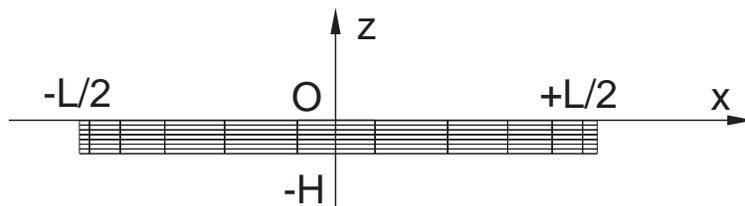


Figura 8.4: Vista  $xz$  de la malla  $M_1$ .

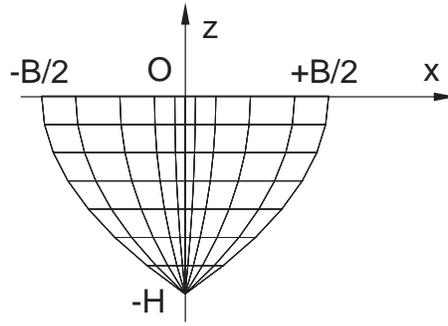
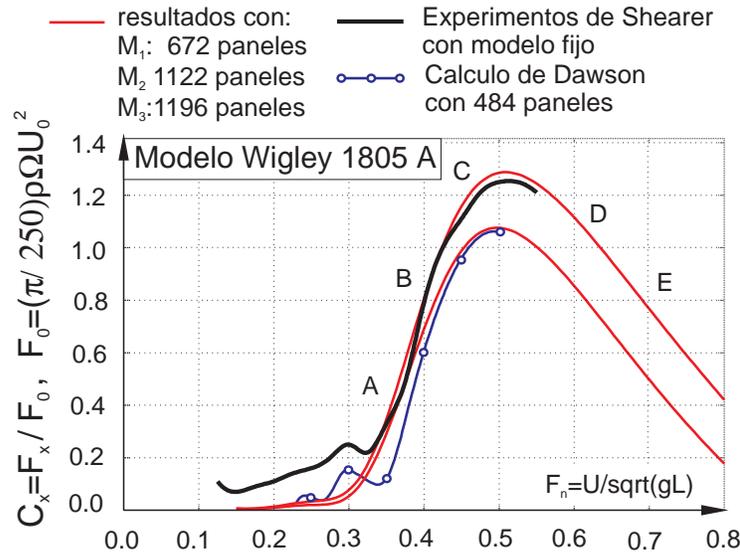
Figura 8.5: Vista  $yz$  de la malla  $M_1$ .

Figura 8.6: Curva de resistencia para el Wigley, por paneles y cuasi-Dawson.

simétricas, mientras que la matriz de superficie  $\mathbf{D}$  es rala. De todos modos, la presencia de la matriz monopolar  $\mathbf{C}$  hace que la matriz de inyección  $\mathbf{Z}$  resulte también llena y no simétrica. Por otra parte, debemos tener presente que i) las matrices de influencia  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{C}$  son re-calculadas en cada estado de velocidad, porque ocupan un espacio de memoria relativamente muy grande para su almacenamiento en disco, como se discutió en el capítulo 7, ii) las matrices  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{Z}$  dependen del factor de velocidad  $\alpha$ . Por esas dos razones, todas las matrices involucradas tienen que ser re-evaluadas para cada velocidad. Ahora bien, el tiempo  $\tau_C$  para computar la matriz monopolar  $\mathbf{C}$  es mucho mayor que el tiempo  $\tau_D$  necesario para la matriz de superficie  $\mathbf{D}$ , porque la matriz monopolar  $\mathbf{C}$ , además de llena, involucra funciones trascendentes, mientras que la matriz de superficie  $\mathbf{D}$  es muy rala y de naturaleza algebraica. Por estas dos razones, podemos aprovechar la ralidad de  $\mathbf{D}$  para reducir el tiempo de cómputo  $\tau_Z$  del producto  $\mathbf{Z} = \mathbf{CD}$ . Para este fin, desarrollemos a

continuación un pseudocódigo, en el cual nos conviene concebir cada matriz genérica  $\mathbf{X}$  como formada por *vectores columna*  $\mathbf{x}_j$ , que es la forma básica de cómputo en paneles estándar, orientada hacia las técnicas de vectorización/paralelización. Para la columna genérica  $h_j$  de la matriz del sistema ampliado  $\mathbf{H} = \mathbf{A} + \mathbf{Z}$  tendremos  $\mathbf{h}_j = \mathbf{a}_j + \mathbf{z}_j$ , donde  $j$  es el índice para el *panel fuente*, esto es, nos paramos sobre cada panel  $j$ , le imponemos carga de superficie dipolar/monopolar unitarias, y calculamos el campo medido en todos los centroides, obteniendo sus vectores columna dipolar/monopolar  $\mathbf{a}_j, \mathbf{c}_j$ . Mientras que para la matriz de inyección  $\mathbf{Z} = \mathbf{CD}$  es el producto

$$[\mathbf{z}_1 \quad \dots \quad \mathbf{z}_i \quad \dots \quad \mathbf{z}_n] = [\mathbf{c}_1 \quad \dots \quad \mathbf{c}_j \quad \dots \quad \mathbf{c}_n] = [\mathbf{d}_1 \quad \dots \quad \mathbf{d}_i \quad \dots \quad \mathbf{d}_n] \quad (8.12)$$

donde  $\mathbf{d}_j = \mathbf{0}$  cuando  $j > n_p$ , porque abandonamos la “superficie libre”, y hemos elegido conservar el índice común  $j$  para las columnas  $\mathbf{a}_j, \mathbf{c}_j$ , porque resulta conveniente calcularlas en forma simultánea en un cierto lazo  $j$ . De este modo así aprovechamos tanto las operaciones geométricas relacionadas con el panel fuente  $j$ , como así también operaciones trascendentes comunes, donde  $\mathbf{c}_j$  lo obtenemos de  $\mathbf{a}_j$  mediante algunas operaciones vectoriales adicionales. Mientras que el índice  $i$  nos permite obtener cada columna  $\mathbf{z}_i$  de la matriz producto  $\mathbf{Z}$ , mediante la serie de productos (matriz-vector)

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{C}\mathbf{d}_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8.13)$$

Para evaluar cada uno de ellos consideremos previamente el producto matriz-vector genérico

$$\mathbf{y} = \mathbf{W}\mathbf{x} = [\mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_j \dots \mathbf{w}_n]\mathbf{x} \quad (8.14)$$

donde  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  son unos vectores de entrada y de salida, respectivamente,  $\mathbf{W}$  es una matriz dada. Este producto lo podemos evaluar vectorialmente en las columnas  $\mathbf{w}_j$  en la forma

$$\mathbf{y} = \mathbf{w}_1x_1 + \mathbf{w}_2x_2 + \dots + \mathbf{w}_jx_j + \dots + \mathbf{w}_nx_n \quad (8.15)$$

Usemos este cómputo vectorizado en cada columna  $\mathbf{z}_i$

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{c}_1d_{1k} + \mathbf{c}_2d_{2k} + \dots + \mathbf{c}_jd_{jk} + \dots + \mathbf{c}_nd_{nk} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8.16)$$

su pseudocódigo lo podríamos escribir como,

```

do  $i = 1, 2, \dots, n$ 
 $\mathbf{z}_i \leftarrow \mathbf{0}$ 
do  $j = 1, 2, \dots, n$ 
obtain:  $\mathbf{c}_j, d_{ji}$ 
 $\mathbf{z}_i \leftarrow \mathbf{z}_i + \mathbf{c}_jd_{ji}$ 

```

```

end j
end i

```

Pero hacerlo en ese orden no es conveniente, porque evaluamos toda la matriz  $\mathbf{C}$  para cada columna  $\mathbf{z}_i, i = 1, 2, \dots, n$ , de modo que en total la recalculáramos  $n$  veces, y esto es inadmisibile. Si probamos en invertir los lazos  $i, j$  tendremos,

```

do j = 1, 2, ..., n
  obtain: c_j
  do i = 1, 2, ..., n
    obtain: d_ji
    z_i ← z_i + c_j d_ji
  end i
end j

```

Ahora el costo es el cómputo reiterado de  $d_{ji}$  porque, en una concepción por diferencias finitas, debemos recomputar la estrella de coeficientes para el panel  $i$  en lugar del panel fuente  $j$ , pero es un precio muy barato porque involucra un recálculo con muy pocos coeficientes. Por ejemplo, en el caso de cuasi-Dawson, unos seis por cada  $i$  cuando mucho. Es decir, la naturaleza muy rala de la matriz de superficie  $\mathbf{D}$  comparada con la matriz monopolar llena  $\mathbf{C}$ , justifica por lejos esta inversión de lazos. En resumen, un pseudocódigo para los  $m$  estados de velocidad en donde para cada estado  $k$  computamos *sólo una vez* las matrices de influencia  $\mathbf{A}, \mathbf{C}$ , y recomputamos  $n_s$  veces la matriz de superficie  $\mathbf{D}$ , donde  $n_s$  es el número de elementos de la estrella del operador derivada segunda adoptado (de bajo o alto orden) con  $n_s \ll n$ , lo escribimos en la forma

```

do k = 1, 2, ..., m
  H ← 0
  s ← 0
  b ← b_k
  do j = 1, 2, ..., n
    obtain: a_j, c_j
    h_j ← h_j + a_j
    do i = 1, 2, ..., n_s
      obtain: d_ji
      h_i ← h_i + c_j d_ji
    end i
  end j
  solve: Hs = b
  μ_k ← s

```

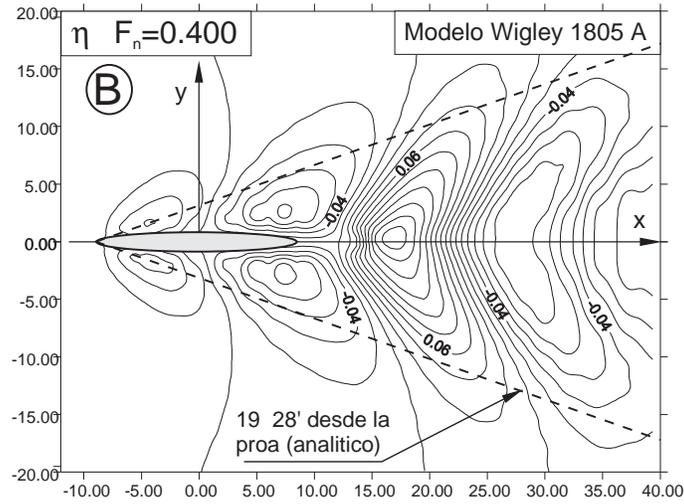


Figura 8.7: Isolíneas de elevación  $\eta$  para  $F_n = 0.40$  en la malla  $M_3$  (punto  $B$ ), por paneles y cuasi-Dawson.

end  $k$

## 8.6 Cuasi-Dawson en la matriz de superficie

Una versión discreta para el operador escalar  $\nabla^T \mathbf{u}_0 \mathbf{u}_0^T \nabla$  la podemos obtener en diferentes formas, por ejemplo, por diferencias o elementos finitos o por nube de puntos, pero en cualquier caso, tendrá una estrella de coeficientes compacta, de modo que la matriz de superficie será bastante rala. Luego, el costo computacional de evaluar el producto matricial  $\mathbf{CD}$  con la matriz monopolar  $\mathbf{C}$  densa, no será tan costoso si las operaciones son reordenadas convenientemente, como se discutió en el punto anterior. Los esquemas en contra-corriente, como los de tipo cuasi-Dawson, son usualmente introducidos en la matriz de superficie libre  $\mathbf{D}_{pp}$ . El método de Dawson para el operador de superficie  $\mathbf{D}$  discreto, en una formulación en potencial, lo escribimos con un esquema en diferencias finitas de quinto orden, no centrado y orientado contra-corriente. En una malla de paso constante  $h_x$ , los coeficientes de la estrella respectiva son

$$D\phi_i = \frac{5\phi_i - 14\phi_{i+1} + 14\phi_{i+2} - 6\phi_{i+3} + 1\phi_{i+4}}{2h_x^2} \quad (8.17)$$

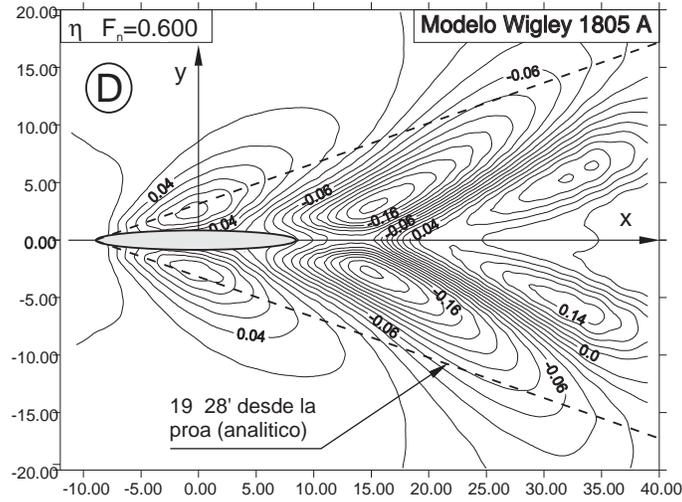


Figura 8.8: Isolíneas de elevación  $\eta$  para Froude  $F_n = 0.60$  en la malla  $M_3$  (punto  $D$ ), por paneles y cuasi-Dawson.

## 8.7 Ejemplo numérico

Consideramos el casco Wigley, modelo 1805 A. La superficie para la mitad de su carena está dada por (Dawson, 1977):

$$y^{\pm} = \pm(3/4)(1 - x^2/64)(1 - 0.6x^2/64)(1 - z^2); \quad (8.18)$$

donde  $-8 \leq x \leq +8$  y  $-1 \leq z \leq 0$ . Adimensionalizando

$$\eta^{\pm} = \pm(1 - \xi^2)(1 - 0.6\xi^2)(1 - \zeta^2) \quad (8.19)$$

donde  $\xi = 2x/L$ ,  $\eta = 2y/B$ ,  $\zeta = z/H$ . Por ejemplo, para la Ec. (8.18) tendremos: eslora  $L = 16$ , manga  $B = 3/2$  y calado  $H = 1$ . Su sección media  $\tilde{S}$  y su volumen  $\tilde{V}$  calculados en el sistema de coordenadas naturales  $\tilde{O}(\xi, \eta, \zeta)$  son, respectivamente,

$$\tilde{S} = 2 \int_0^1 d\xi \eta^+(0, \zeta) = 4/3; \quad (8.20)$$

$$\tilde{V} = 2 \times 2 \int_0^1 d\xi \int_0^1 d\zeta \eta^+(\xi, \eta); \quad (8.21)$$

introduciendo la Ec. (8.19) resulta

$$\tilde{V} = (8/3) \int_0^1 d\xi (1 - 1.6\xi^2 + 0.6\xi^4) \quad (8.22)$$

es decir,

$$\tilde{V} = (8/3)(1 - 16/30 + 6/50) = 352/225. \quad (8.23)$$

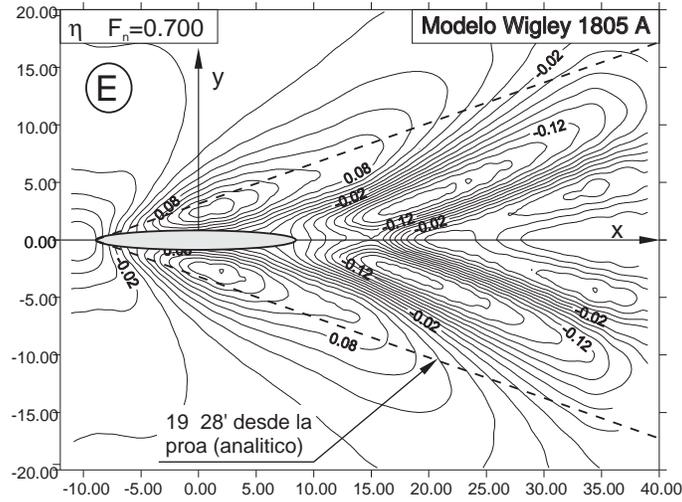


Figura 8.9: Isolíneas de elevación  $\eta$  para Froude  $F_n = 0.70$  en la malla  $M_3$  (punto  $E$ ), por paneles y cuasi-Dawson.

Para volver al sistema coordenado original  $O(x, y, z)$  empleamos tanto la jacobiana planar  $J_{22} = LB/2$  como la tridimensional  $J_{33} = LBH/4$ , resultando

$$S = J_{22}\tilde{S} = (2/3)BH ; \quad (8.24)$$

$$V = J_{33}\tilde{V} = (88/225)LBH ; \quad (8.25)$$

y el coeficiente de forma prismático  $C_p$  para esta carena será

$$C_p = \frac{V}{SL} = \frac{44}{75} \approx 0.587 ; \quad (8.26)$$

que corresponde a una de las carenas ensayadas por Shearer (eg. ver Wehausen, 1973). Retornando a la Ec. (8.18) vemos que su sección media es  $S = 16$  y su volumen  $V = 704/75 \approx 9.3867$ .

Para la solución numérica por el método de paneles extendido, hemos considerado tres mallas  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ , las cuales son estructuradas sobre la superficie libre de referencia, donde  $M_1 = 37 \times 14 + 154$ ,  $M_2 = 33 \times 28 + 198$  y  $M_3 = 37 \times 26 + 234$  paneles. En las figuras 8.2, 8.3, 8.4 y 8.5, mostramos la malla  $M_1$ . El coeficiente de resistencia de ola  $C_w$  es mostrado en la figura 8.6 donde: 1) resultados numéricos de Dawson informados con 484 paneles, 2) experimentos de Shearer sobre el modelo fijo, 3) los obtenidos por nosotros con paneles y esquema cuasi-Dawson. Finalmente en las figuras 8.7, 8.8 y 8.9, hemos graficado las isolíneas de elevación para los números de Froude  $F = 0.40, 0.60, 0.70$ , donde además hemos marcado la envolvente teórica de 19 grados 29 minutos ( $\arcsin(1/3)$ ) para una carga de presión puntual.

# Capítulo 9

## Condición de frontera DNL por elementos finitos

### 9.1 Resumen

En este capítulo mostramos una implementación por elementos finitos de la condición de frontera absorbente Discreta No-local (DNL), la cual es derivada por una análisis directo de las ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes, suponiendo que la malla es estructurada unidimensionalmente en la dirección longitudinal. El empleo de un esquema centrado para el operador de superficie nos permite una discretización completa por elementos finitos. La resistencia de ola es luego calculada mediante balances de flujos, procedimiento que es más exacto y garantiza resistencias positivas.

### 9.2 Cálculo del arrastre por amplitud de ola

Es bien sabido que, si despreciamos los fenómenos disipativos, producto de la viscosidad del fluido, entonces toda la energía entregada por la embarcación para vencer el arrastre de ola, es emitida como un tren de ondas por gravedad que se dirige corriente abajo. Este

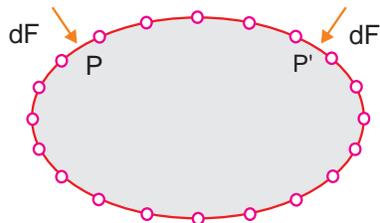


Figura 9.1: Cuerpo simétrico discretizado con malla simétrica.

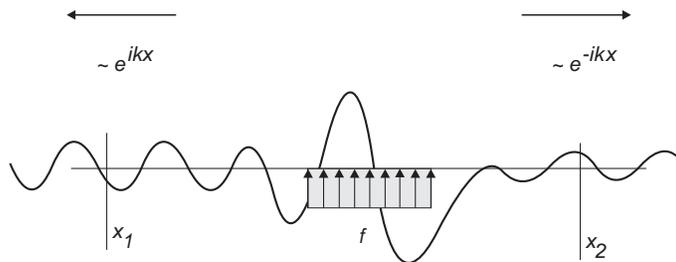


Figura 9.2: Ecuación de Helmholtz 1D. Cálculo de la potencia emitida por la fuente  $f$ .

flujo de energía se propaga sin amortiguarse y por lo tanto se plantea la posibilidad de calcular el arrastre de ola sobre el cuerpo estimando este flujo de energía en algún plano transversal corriente abajo del cuerpo. Experimentalmente, esta es la forma en que se calcula la componente de ola de la resistencia total, ya que, aplicando un dinamómetro a la embarcación en un canal experimental, sólo llega a estimarse la componente total del arrastre de ola. Ahora bien, la integración directa de las fuerzas de presión sobre el casco suele dar a veces resistencias negativas. Este no es un problema relacionado con la superficie libre, sino que incluso sucede para el problema de flujo básico con superficie fija (el problema de “cuerpo doble” o “con gravedad infinita”). Como es bien sabido, la resistencia producida para el problema del cuerpo doble (sin superficie libre) debe ser nula. Sin embargo, por errores de discretización, esto resulta en un valor no nulo, que disminuye al refinar. Ahora supongamos que el cuerpo es simétrico, y la malla utilizada también es simétrica (figura 9.1). Entonces, el campo de potenciales de perturbación discreto resultante será antisimétrico y por lo tanto el campo de presiones será simétrico (siempre a nivel discreto). Entonces, la componente de presión  $d\mathbf{F}$  sobre un panel  $P$  se compensará con la de su simétrico  $P'$  y la fuerza resultante total será nula, a precisión de la máquina. Pero si la malla utilizada no es simétrica, las contribuciones sobre partes correspondientes del cuerpo no se compensan totalmente y esto resulta en un arrastre resultante no nulo. Ahora bien, si una dada malla (no simétrica para una geometría simétrica) da un arrastre positivo, la misma malla invertida ( $x \rightarrow -x$ ) dará el misma fuerza pero de sentido contrario, de manera que esto demuestra que siempre en general se obtendrán por integración directa *resistencias no nulas de uno u otro signo*. Este hecho no es tan conocido, debido a que el flujo potencial se utiliza generalmente para calcular la *sustentación* (lift) y los momentos aerodinámicos. Mostraremos a continuación un ejemplo muy simple, en el cual cierta propiedad integral puede calcularse a partir del flujo a través de los contornos.

## 9.3 Potencia emitida en la ecuación de Helmholtz

Consideremos la ecuación de las ondas (cuerda vibrante) 1D

$$\phi_{,tt} = c^2 \phi_{,xx} + f(x, t) \quad \text{para } -\infty < x < \infty ; \quad (9.1)$$

donde  $\phi$  es el desplazamiento transversal de la cuerda,  $c$  la velocidad de propagación de las ondas y  $f(x, t)$  un término forzante. La potencia entregada por el dispositivo que genera el término forzante  $f$  es

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{,t} f \, dx \quad . \quad (9.2)$$

Si suponemos que la dependencia temporal de  $f$  es armónica, es decir,

$$f(x, t) = \text{Re} \hat{f}(x) e^{i\omega t} \quad ; \quad (9.3)$$

entonces, es de suponer que para  $t \rightarrow \infty$ , la solución será también armónica

$$\phi(x, t) = \text{Re} \hat{\phi}(x) e^{i\omega t} \quad . \quad (9.4)$$

Reemplazando la expresión (9.3) y (9.4) en (9.1) se llega a la siguiente ecuación transformada

$$\hat{\phi}_{,xx} + k^2 \hat{\phi} = -c^{-2} \hat{f} \quad ; \quad (9.5)$$

donde  $k = \omega/c$  es el número de onda característico. Esta es la *ecuación de Helmholtz*. La expresión para la potencia disipada es

$$\begin{aligned} W &= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re} i\omega \hat{\phi} e^{i\omega t} \text{Re} \hat{f} e^{i\omega t} \, dx \\ &= \frac{1}{4} i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{\phi} e^{i\omega t} - \bar{\hat{\phi}} e^{-i\omega t})(\hat{f} e^{i\omega t} + \bar{\hat{f}} e^{-i\omega t}) \, dx \quad ; \end{aligned} \quad (9.6)$$

donde  $\bar{x}$  denota el complejo conjugado de  $x$ . Ahora bien, estamos interesados más bien en la potencia disipada promediada sobre un largo período de tiempo, o lo que es equivalente, sobre un ciclo  $T = 2\pi/\omega$ , tendremos

$$\begin{aligned} \langle W \rangle &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} W \, dt \\ &= \frac{1}{4} i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (\hat{\phi} \hat{f} e^{2i\omega t} + \hat{\phi} \bar{\hat{f}} - \bar{\hat{\phi}} \hat{f} - \bar{\hat{\phi}} \bar{\hat{f}} e^{-2i\omega t}) \, dt \, dx \\ &= \frac{1}{4} i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{\phi} \bar{\hat{f}} - \bar{\hat{\phi}} \hat{f}) \, dx = -\frac{1}{4} i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} 2i \text{Im} \bar{\hat{\phi}} \hat{f} \, dx = \frac{1}{2} \omega \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Im} \bar{\hat{\phi}} \hat{f} \, dx \quad . \end{aligned} \quad (9.7)$$

En lo que sigue omitiremos, por comodidad, el acento circunflejo para denotar la componente armónica. Ahora multipliquemos la ecuación de Helmholtz (9.5) por  $\bar{\phi}$  e integremos

sobre  $x$  en un volumen de control  $x_1 < x < x_2$ . La parte imaginaria del miembro derecho nos da la potencia disipada, y trabajando sobre la parte derecha obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \bar{\phi} f \, dx &= -c^2 \int_{x_1}^{x_2} \bar{\phi} (\phi_{,xx} + k^2 \phi) \, dx \\ &= -c^2 \int_{x_1}^{x_2} (-\bar{\phi}_{,x} \phi_{,x} + k^2 \bar{\phi} \phi) \, dx - c^2 \bar{\phi} \phi_{,x} \Big|_{x=x_1}^{x_2} \\ &= -c^2 \int_{x_1}^{x_2} (-|\phi_{,x}|^2 + k^2 |\phi|^2) \, dx - c^2 \bar{\phi} \phi_{,x} \Big|_{x=x_1}^{x_2} . \end{aligned} \quad (9.8)$$

Pero la integral del miembro derecho es real, de manera que

$$\langle W \rangle = g(x_2) - g(x_1) \quad ; \quad (9.9)$$

donde el *flujo de energía*  $g(x)$  está definido como

$$g(x) = -\frac{1}{2} \omega c^2 \operatorname{Im} \bar{\phi} \phi_x \quad ; \quad (9.10)$$

de manera que, podemos computar la potencia total emitida  $\langle W \rangle$  de dos maneras esencialmente diferentes:

- Por integración directa, según ecuación (9.1-e).
- Por el balance de energía en el contorno, según ecuaciones (9.9) y (9.10).

Si tomamos los extremos  $x_{1,2}$  del volumen de control, fuera de la región donde  $f \neq 0$ , entonces,  $\phi$  debe ser combinación lineal de una onda que va hacia la derecha y otra que va hacia la izquierda,

$$\phi(x) = \begin{cases} ae^{ikx} + be^{-ikx} & \text{para } x \leq x_1 ; \\ ce^{ikx} + de^{-ikx} & \text{para } x \geq x_2 ; \end{cases} \quad (9.11)$$

y entonces para  $x \leq x_1$  tendremos

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{1}{2} \omega c^2 \operatorname{Im} \bar{\phi} \phi_x \\ &= -\frac{1}{2} \omega c^2 \operatorname{Im} (\bar{a} e^{-ikx} + \bar{b} e^{+ikx}) ik (a e^{ikx} - b e^{-ikx}) \\ &= -\frac{1}{2} \omega^2 c \operatorname{Re} |a|^2 - |b|^2 + \bar{b} a e^{2ikx} - \bar{a} b e^{-2ikx} = \frac{1}{2} \omega^2 c (|b|^2 - |a|^2) . \end{aligned} \quad (9.12)$$

Análogamente, para  $x \geq x_2$

$$g(x) = \frac{1}{2} \omega^2 c (|d|^2 - |c|^2) \quad . \quad (9.13)$$

Recordemos que  $e^{-ikx}$  representa una onda que va hacia la derecha, y  $e^{ikx}$  una que va hacia la izquierda. De manera que  $g(x)$  resulta ser el flujo neto de energía hacia la derecha.

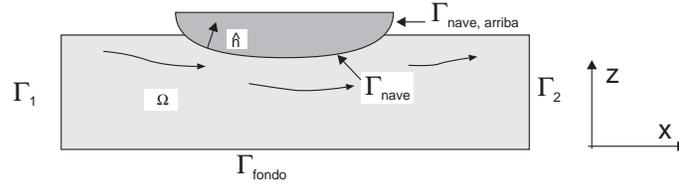


Figura 9.3: Descripción geométrica, vista lateral.

Pero si imponemos *condiciones de contorno de radiación* en los dos límites  $x \rightarrow \pm\infty$ , entonces debe ser  $b = c = 0$  y, por lo tanto, de (9.9), (9.12), (9.13), concluimos que

$$\langle W \rangle = \frac{1}{2} \omega^2 c (|b|^2 + |d|^2) \quad ; \quad (9.14)$$

y es claro que  $\langle W \rangle > 0$ . Volviendo a nuestro problema de resistencia de ola, vemos la utilidad de buscar una expresión integral como la encontrada para la ecuación de Helmholtz que nos garantice *resistencias positivas*. Además, como es de esperar que el arrastre se concentre en los modos transversales de frecuencia más baja, el arrastre resultará ser el producto de la integral de una función suave en el “plano de medición” (o, mejor dicho, “de observación”). Esto sugiere que el cálculo será mucho más preciso que una integración directa de las fuerzas de presión sobre el casco. Por otra parte, los siguientes parecen ser requisitos indispensables para poder utilizar tal esquema:

- El esquema numérico *NO debe ser disipativo*.
- Las condiciones de contorno deben ser los más *absorbentes* posibles.

Estos requisitos son plenamente satisfechos por el método propuesto.

## 9.4 Semidiscretización

Supongamos que el dominio de resolución es de la forma

$$\Omega = \{ \mathbf{x} \text{ tal que } (y, z) \in \Omega_{yz} \text{ y } -\infty < x < +\infty \} - \Omega_{\text{barco}} \quad ; \quad (9.15)$$

y  $\Omega_{yz}$  es un dominio acotado por encima por la superficie libre y por debajo por una curva dada. Las ecuaciones son

$$\begin{cases} \Delta \phi = 0 & \text{en } \Omega \ ; \\ \partial_n \phi = 0 & \text{sobre } \Gamma_\infty \cup \Gamma_{\text{barco}} \ ; \\ \partial_n \phi + g^{-1} \partial_{x_i} (u_{0i} u_{0j} \partial_{x_j} \phi) = r & \text{sobre } \Gamma_{\text{libre}} \ . \end{cases} \quad (9.16)$$

Estamos interesados en aquella parte del dominio  $\Omega_\infty$ ,  $|x| > L$  donde ya no existe  $\Omega_{\text{barco}}$  y  $\mathbf{u}_0$  es prácticamente constante e igual a  $U_\infty \hat{\mathbf{i}}$ , de manera que las ecuaciones en esta

región del dominio son

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \text{en } \Omega ; \\ \partial_n\phi = 0 & \text{sobre } \Gamma_\infty \cup \Gamma_{\text{barco}} ; \\ \partial_n\phi + K^{-1}\partial_{xx}\phi = 0 & \text{sobre } \Gamma_{\text{libre}} ; \end{cases} \quad (9.17)$$

donde  $K = g/U_\infty^2 > 0$  es el número de onda. Ahora hagamos una semi-discretización en las coordenadas  $yz$ , es decir, pongamos

$$\phi(x, y, z) = \sum_{j=1}^{N_{\text{capa}}} \phi_j N_j(y, z) \quad ; \quad (9.18)$$

donde las  $\{N_j(y, z)\}$  son las funciones de interpolación para la discretización por elementos finitos de  $\Omega_{yz}$  y  $N_{\text{capa}}$  el número de nodos en cada capa. Reemplazando esto en (9.17), pesando con funciones de peso iguales a las de interpolación (método de Galerkin) e integrando por partes llegamos a

$$\mathbf{M}\phi_{,xx} - \mathbf{K}\phi + \int_{\Gamma_{\text{libre}}} N_j \frac{\partial\phi}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad ; \quad (9.19)$$

donde  $\Gamma_{\text{libre}}$  es la frontera superior de  $\Omega_{yz}$ , en general de la forma

$$\Gamma_{\text{libre}} = \{ \text{todo } (y, z) \text{ tal que } z = 0 \text{ y } |y| < L_y/2 \} \quad ; \quad (9.20)$$

donde  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  son matrices de masa y del operador de Laplace, respectivamente, para la región bidimensional  $\Omega_{yz}$ , dadas por

$$M_{jk} = \int_{\Omega_{yz}} N_j(y, z) N_k(y, z) dy dz \quad ; \quad (9.21)$$

$$K_{jk} = \int_{\Omega_{yz}} \nabla_{yz} N_j(y, z) \cdot \nabla_{yz} N_k(y, z) dy dz \quad . \quad (9.22)$$

Reemplazando  $(\partial\phi/\partial n)$  de (9.17) llegamos a

$$(\mathbf{M} - K^{-1}\mathbf{M}_{\text{libre}})\phi_{,xx} - \mathbf{K}\phi = \mathbf{0} \quad ; \quad (9.23)$$

donde  $\mathbf{M}_{\text{libre}}$  es una matriz de masa de la superficie libre

$$M_{\text{libre},jk} = \int_{\Gamma_{\text{libre}}} N_j(y, 0) N_k(y, 0) dy \quad ; \quad (9.24)$$

donde  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{M}_{\text{libre}}$  son matrices definidas positivas, mientras que  $\mathbf{K}$  es semidefinida positiva. Si imponemos una condición Dirichlet de la forma  $\phi = 0$  en algún punto de  $\Gamma_{\text{libre}}$  para eliminar el modo rígido  $\phi = \text{cte}$ , entonces  $\mathbf{K}$  es definida positiva. El sistema (9.23) es un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) de segundo orden,

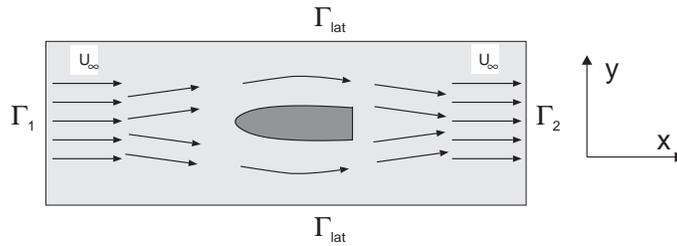


Figura 9.4: Descripción geométrica, vista en planta.

homogéneo con coeficientes constantes. Su solución puede ser obtenida por los métodos clásicos buscando soluciones de la forma

$$\phi(x) = \phi_0 e^{\lambda x} \quad . \quad (9.25)$$

Reemplazando en (9.23) llegamos al siguiente problema de autovalores

$$(\lambda^2 \tilde{\mathbf{M}} - \mathbf{K}) \phi_0 = \mathbf{0} \quad ; \quad (9.26)$$

donde

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M} - K^{-1} \mathbf{M}_{\text{libre}} \quad . \quad (9.27)$$

Ahora consideremos el caso donde la superficie no es libre, es decir, eliminando el segundo término en (9.17). Como consecuencia, desaparece el segundo término que contiene a  $\mathbf{M}_{\text{libre}}$  en (9.27) y  $\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M}$  es definida positiva. Puede verse entonces que  $\lambda^2 > 0$ , y por lo tanto los autovalores son de la forma  $\lambda = \pm a$ , con  $a$  real, entonces las soluciones (9.25) son exponenciales crecientes o decrecientes, lo cual corresponde al carácter elíptico del operador de Laplace. Ahora bien, debido al signo negativo que afecta a  $\mathbf{M}_{\text{libre}}$  en (9.27) vemos que esto tiene un efecto desestabilizante y para valores de  $K$  suficientemente grandes aparecerán autovalores  $\lambda^2 < 0$  de manera que  $\lambda = \pm ik$  con  $k$  real. Estos autovalores corresponden a las “ondas parásitas” y, por lo tanto, a la generación de la “resistencia de ola”. En este capítulo desarrollaremos una expresión que nos permita calcular la resistencia de ola, a partir de la amplitud de las olas aguas abajo en un contexto de método numérico tipo elementos finitos y diferencias finitas, continuando lo discutido en el capítulo 5.

## 9.5 Resistencia de ola por flujo de momento

Consideremos el flujo alrededor de una embarcación como se muestra en las figuras 9.3 y 9.4. Suponemos que  $\Gamma_{\text{ent/sal}}$  son planos  $x = \text{cte}$ ,  $\Gamma_{\text{fondo}}$  es un plano  $z = \text{cte}$  y  $\Gamma_{\text{lat}}$  a  $y =$

cte. En esta sección no haremos ninguna suposición en lo que respecta a linealizaciones y obtendremos una expresión para la resistencia de ola en la cual sólo aparecen expresiones que pueden interpretarse como el flujo de momento según  $x$  a través de superficies de control. Las ecuaciones que rigen tal flujo potencial son

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \text{en } \Omega ; \\ \partial_n\phi = 0 & \text{sobre } \Gamma_{\text{barco}} + \Gamma_{\text{SL}} + \Gamma_{\text{fondo}} ; \\ \partial_n\phi = U_\infty & \text{sobre } \Gamma_{\text{ent/sal}} ; \\ (1/2)\rho U^2 + \rho g\eta = (1/2)\rho U_\infty^2 & \text{sobre } \Gamma_{\text{SL}} ; \end{cases} \quad (9.28)$$

donde  $U^2 = (\nabla\phi)^2$ . La resistencia de ola sobre la embarcación puede obtenerse como

$$F_x = \int_{\Gamma_{\text{barco}} + \Gamma_{\text{barco,arriba}}} p n_x dS \quad ; \quad (9.29)$$

donde  $dS$  es el diferencial de superficie sobre el cuerpo y  $\hat{\mathbf{n}}$  la normal interior a  $\Omega$ ,  $p$  es la presión y se obtiene de la ecuación de Bernoulli

$$p + \frac{1}{2}\rho(\nabla\phi)^2 + \rho gz = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 \quad ; \quad (9.30)$$

de la cual (9.27.d) es un caso particular en la superficie libre. Pero sobre la superficie del cuerpo no mojada debe ser  $p = p_\infty =$  presión atmosférica. Además

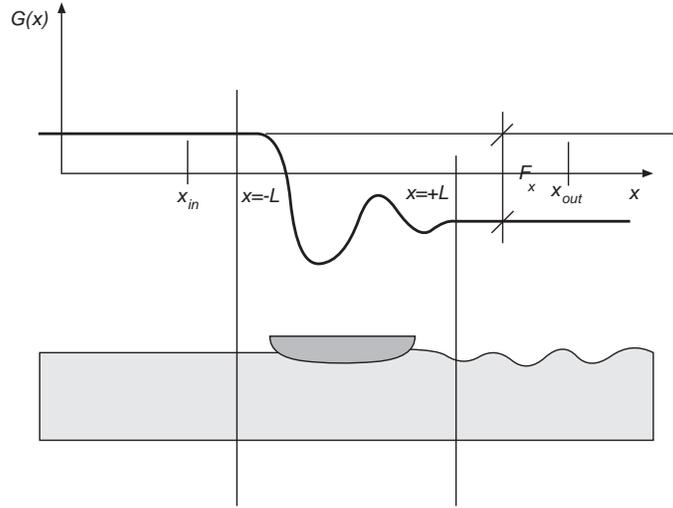
$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{\text{barco}} + \Gamma_{\text{barco,arriba}}} p_\infty n_x dS &= \int_{\Gamma_{\text{barco}} + \Gamma_{\text{barco,arriba}}} (p_\infty \hat{\mathbf{e}}_x) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \\ &= - \int_{\Gamma_{\text{barco}} + \Gamma_{\text{barco,arriba}}} \nabla \cdot (p_\infty \hat{\mathbf{e}}_x) dS = 0 \quad ; \end{aligned} \quad (9.31)$$

ya que  $p_\infty = \text{cte}$  y  $\Gamma_{\text{barco}} + \Gamma_{\text{barco,arriba}}$  es una superficie cerrada. De manera que

$$\begin{aligned} F_x &= \int_{\Gamma_{\text{barco}} + \Gamma_{\text{barco,arriba}}} p n_x dS - \int_{\Gamma_{\text{barco}} + \Gamma_{\text{barco,arriba}}} p_\infty n_x dS \\ &= \int_{\Gamma_{\text{barco}}} (p - p_\infty) n_x dS \quad ; \end{aligned} \quad (9.32)$$

porque  $\Gamma_{\text{barco}} + \Gamma_{\text{barco,arriba}}$  es una superficie cerrada. Ahora bien, la superficie  $\Gamma_{\text{ent/sal}} + \Gamma_{\text{fon/lat}} + \Gamma_{\text{SL}} + \Gamma_{\text{barco}}$  es una superficie cerrada (el contorno del dominio  $\Omega$ ), de manera que podemos aplicar el teorema de la divergencia de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{\text{ent/sal}} + \Gamma_{\text{fon/lat}} + \Gamma_{\text{SL}} + \Gamma_{\text{barco}}} [(p - p_\infty) \hat{\mathbf{e}}_x] \cdot \hat{\mathbf{n}} dS &= \\ = \int_{\Omega} \nabla \cdot [(p - p_\infty) \hat{\mathbf{e}}_x] d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x} d\Omega \quad . \end{aligned} \quad (9.33)$$

Figura 9.5: El flujo de momento  $G$  como función de  $x$ .

Pero  $\hat{\mathbf{e}}_x \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$  en  $\Gamma_{\text{fon/lat}}$ , y  $p = p_\infty$  en  $\Gamma_{\text{SL}}$  de manera que

$$F_x = - \int_{\Gamma_{\text{ent/sal}}} (p - p_\infty) n_x dS + \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x} d\Omega \quad . \quad (9.34)$$

Pero, de la ecuación de Bernoulli

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ p_\infty + \frac{1}{2} \rho (U_\infty^2 - U^2) - \rho g z \right] = -\frac{1}{2} \rho \frac{\partial}{\partial x} U_i U_i = -\rho U_i \frac{\partial U_i}{\partial x} = -\rho U_i \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial x_i} \\ &= -\rho U_i \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x} = -\rho U_i \frac{\partial \phi U_x}{\partial x_i} = -\rho \frac{\partial U_i U_x}{\partial x_i} = -\rho \nabla \cdot (U_x \mathbf{U}) \quad ; \end{aligned} \quad (9.35)$$

y entonces

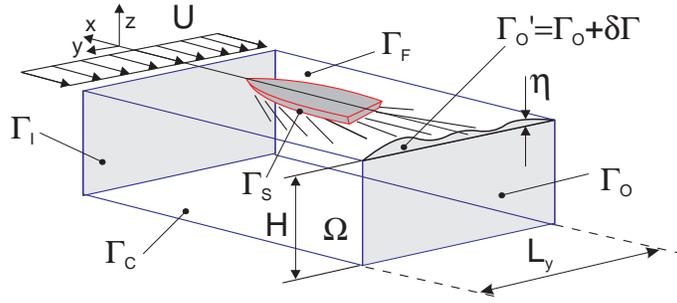
$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x} d\Omega &= -\rho \int_{\Omega} \nabla \cdot (U_x \mathbf{U}) d\Omega \\ &= -\rho \int_{\Gamma_{\text{ent/sal}} + \Gamma_{\text{fon/lat}} + \Gamma_{\text{SL}} + \Gamma_{\text{barco}}} U_x \mathbf{U} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\rho \int_{\Gamma_{\text{ent/sal}}} U_x^2 dS \quad ; \end{aligned} \quad (9.36)$$

ya que  $\mathbf{U} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$  en todas las fronteras, menos  $\Gamma_{\text{ent/sal}}$  y la normal a  $\Gamma_{\text{ent/sal}}$  es  $\hat{\mathbf{e}}_x$ . Finalmente, reemplazando en (9.34)

$$F_x = - \int_{\Gamma_{\text{ent/sal}}} (p - p_\infty + \rho U_x^2) n_x dS \quad . \quad (9.37)$$

Esto puede ponerse también como

$$F_x = G(x_{\text{ent}}) - G(x_{\text{sal}}) \quad ; \quad (9.38)$$


 Figura 9.6: La superficie de salida  $\Gamma_{\text{sal}}$ .

donde  $G(x)$  puede ser claramente identificado con *el flujo total de momento que pasa a través de la sección  $\Gamma_x$* , donde  $\Gamma_x$  es la sección del canal a  $x = \text{cte}$ ,

$$G(x) = \int_{\Gamma_x} (p - p_\infty + \rho U_x^2) dz dy \quad . \quad (9.39)$$

Ahora bien, manteniendo  $x_{\text{ent}} = \text{cte}$  y variando  $x_{\text{sal}}$  vemos que, como  $F_x$  debe ser constante, entonces  $G(x)$  debe ser constante para  $x_{\text{sal}} > L$ . El mismo razonamiento, indica que  $G(x) = \text{cte}$  para  $x_{\text{ent}} < -L$ . De manera que  $G(x)$  debe tener un comportamiento como indica la figura 9.5, es decir, *el salto en  $G(x)$  al pasar de aguas abajo a aguas arriba representa la resistencia de ola sobre la embarcación*.

## 9.6 Versión linealizada del flujo de momento

Buscamos ahora una versión linealizada de (9.39), de tal manera que la integral sobre  $\Gamma_x$  sea reemplazada por una sobre  $\Gamma_0$ , que es aquella parte de  $\Gamma_x$  por debajo de la superficie de referencia  $z = 0$ . Por la ecuación de Bernoulli tendremos

$$\begin{aligned} p - p_\infty + \rho U_x^2 &= \frac{1}{2} \rho (U_\infty^2 - U^2) - \rho g z + \rho U_x^2 \\ &= \frac{1}{2} \rho (U_\infty^2 + U_x^2 - U_y^2 - U_z^2) - \rho g z \quad . \end{aligned} \quad (9.40)$$

Ahora suponemos que  $x$  está suficientemente alejado de la embarcación como para poder poner

$$\begin{cases} U_x = U_\infty + u_x \\ U_y = u_y \\ U_z = u_z \end{cases} \quad ; \quad (9.41)$$

donde  $u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \ll U_\infty^2$ . Entonces

$$p - p_\infty + \rho U_x^2 = \frac{1}{2} \rho (2U_\infty^2 + 2U_\infty u_x + u_x^2 - u_y^2 - u_z^2) - \rho g z =$$

$$= \frac{1}{2}\rho[2U_\infty(U_\infty + u_x) + u_x^2 - u_y^2 - u_z^2] - \rho gz = \frac{1}{2}\rho(2U_\infty U_x + u_x^2 - u_y^2 - u_z^2) - \rho gz ; \quad (9.42)$$

y reemplazando en (9.39)

$$G(x) = \int_{\Gamma_x} \left[ \frac{1}{2}\rho(2U_\infty U_x + u_x^2 - u_y^2 - u_z^2) - \rho gz \right] dS \quad . \quad (9.43)$$

Consideremos la contribución del primer término

$$\rho U_\infty \int_{\Gamma_x} U_x dS = U_\infty \dot{M} = \text{cte} \quad ; \quad (9.44)$$

que no depende de  $x$  ya que  $\dot{M}$  es el flujo másico a través de  $\Gamma_x$ . Lo mismo ocurre si consideramos la integral del término de presión hidrostática  $\rho gz$  integrado sobre aquella parte  $\Gamma_0$  de la superficie de referencia  $z = 0$  (ver figura 9.6) esto da una constante independiente de  $x$ . Ahora bien, como en la expresión para la resistencia de ola (9.38) aparecen diferencias de  $G(x)$ , una constante es irrelevante y por lo tanto

$$G(x) = \frac{1}{2}\rho \int_{\Gamma_x} (u_x^2 - u_y^2 - u_z^2) dS - \rho g \int_{y=-L_y}^{+L_y} \int_{z=0}^{\eta} z dz dy + \text{cte} \quad . \quad (9.45)$$

El segundo término representa la integral de la presión hidrostática sobre  $\delta\Gamma$  y puede ser evaluado explícitamente como

$$\int_{y=-L_y}^{+L_y} \int_{z=0}^{\eta} z dz dy = \int_{y=-L_y}^{+L_y} \frac{1}{2}\eta^2 dy \quad . \quad (9.46)$$

Finalmente, suponiendo que estamos suficientemente lejos de la embarcación,  $\eta$  es suficientemente pequeño de manera que podemos reemplazar la integral del primer término en (9.45) por la integral sobre el área bajo la superficie de referencia. Concretamente, bajo la aproximación de barco delgado de espesor  $O(\epsilon)$ , tenemos que  $\eta, u_j = O(\epsilon)$ . De manera que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_x} (u_x^2 - u_y^2 - u_z^2) dS &= \int_{\Gamma_0} (u_x^2 - u_y^2 - u_z^2) dS + \int_{\delta\Gamma} (u_x^2 - u_y^2 - u_z^2) dS \\ &= \int_{\Gamma_0} (u_x^2 - u_y^2 - u_z^2) dS + O(\epsilon^3) \quad . \end{aligned} \quad (9.47)$$

Finalmente, la versión linealizada buscada es

$$G(x) = \frac{1}{2}\rho \int_{\Gamma_0} (u_x^2 - u_y^2 - u_z^2) dS - \frac{1}{2}\rho g \int_{y=-L_y}^{+L_y} \eta^2 dy + \text{cte} \quad . \quad (9.48)$$

Nótese que, de acuerdo a lo discutido previamente, ambos términos son  $O(\epsilon^2)$ , lo cual es coherente con el hecho bien conocido de que, *en la aproximación de barco delgado la resistencia de ola es proporcional al cuadrado de la manga*. Sin embargo, la expresión que hemos desarrollado aquí no es aplicable sólo bajo la aproximación de barco delgado. La suposición  $u^2 \ll U_\infty^2$  es válida también para barcos anchos, a una distancia suficientemente lejos aguas abajo de la embarcación.

## 9.7 Implementación numérica

Ahora aplicaremos la expresión (9.48) al sistema puesto en la forma (9.23) y subsiguientes. Recordemos que

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = \sum_{j=1}^{N_{\text{capa}}} \dot{\phi}_j N_j(y, z) ; \\ u_y &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = \sum_{j=1}^{N_{\text{capa}}} \phi_j \frac{\partial}{\partial y} N_j(y, z) ; \\ u_z &= \frac{\partial \phi}{\partial z} = \sum_{j=1}^{N_{\text{capa}}} \phi_j \frac{\partial}{\partial z} N_j(y, z) ; \end{aligned} \quad (9.49)$$

de manera que podemos identificar cada uno de los términos en (9.48) como

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_0} u_x^2 dy dz &= \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} dy dz \\ &= \int_{\Gamma_0} \left[ \sum_{j=1}^{N_{\text{capa}}} \dot{\phi}_j N_j(y, z) \right] \left[ \sum_{k=1}^{N_{\text{capa}}} \dot{\phi}_k N_k(y, z) \right] dy dz \\ &= \sum_{j,k=1}^{N_{\text{capa}}} \dot{\phi}_j \dot{\phi}_k \int_{\Gamma_0} [N_j(y, z) N_x(y, z) dy dz] = \sum_{j,k=1}^{N_{\text{capa}}} M_{jk} \dot{\phi}_j \dot{\phi}_k = \dot{\phi}^T \mathbf{M} \dot{\phi} \quad . \end{aligned} \quad (9.50)$$

Similarmente

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_0} (u_y^2 + u_z^2) dy dz &= \int_{\Gamma_0} (\nabla_{yz} \phi) \cdot (\nabla_{yz} \phi) dy dz \\ &= \int_{\Gamma_0} \left[ \sum_{j=1}^{N_{\text{capa}}} \phi_j \nabla_{yz} N_j(y, z) \right] \cdot \left[ \sum_{k=1}^{N_{\text{capa}}} \phi_k \nabla_{yz} N_k(y, z) \right] dy dz \\ &= \sum_{j,k=1}^{N_{\text{capa}}} \phi_j \phi_k \int_{\Gamma_0} [\nabla_{yz} N_j(y, z)] \cdot [\nabla_{yz} N_k(y, z)] dy dz = \phi^T \mathbf{K} \phi \quad ; \end{aligned} \quad (9.51)$$

y

$$\int_{y=-L_y}^{+L_y} \eta^2 dy = (U_\infty/g)^2 \int_{y=-L_y}^{+L_y} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{z=0} \right]^2 dy = (U_\infty/g)^2 \dot{\phi}^T \mathbf{M}_{\text{libre}} \dot{\phi} \quad . \quad (9.52)$$

Reemplazando estas expresiones en (9.48)

$$G(x) = \frac{1}{2} \rho \left[ \dot{\phi} (\mathbf{M} - K^{-1} \mathbf{M}_{\text{libre}}) \dot{\phi} - \phi \mathbf{K} \phi \right] + \text{cte} = \frac{1}{2} \rho \left[ \dot{\phi} \tilde{\mathbf{M}} \dot{\phi} - \phi \mathbf{K} \phi \right] + \text{cte} \quad . \quad (9.53)$$

Ahora bien, resolviendo el problema de autovalores (9.26, 9.27) y retomando la discusión en cuanto al tratamiento de los modos hiperbólicos y elípticos, podemos poner la solución aguas abajo de la embarcación ( $x > L$ ) como

$$\phi(x) = \sum_{j,\text{elip}} a_j \phi_j e^{-\lambda_j x} + \sum_{j,\text{hipe}} \phi_j (b_j e^{+ik_j x} + c_j e^{-ik_j x}) \quad \text{para } x > L ; \quad (9.54)$$

mientras que aguas arriba ( $x < -L$ ), se puede plantear un desarrollo similar pero sin modos hiperbólicos y con los signos de las exponenciales invertidos

$$\phi(x) = \sum_{j,\text{elip}} a_j \phi_j e^{+\lambda_j x} \quad \text{para } x < -L . \quad (9.55)$$

En ambas expresiones la suma sobre “*j elíptico*” significa suma sobre los modos elípticos, esto es,  $1 \leq j \leq N_{\text{hip}}$  y suma sobre “*j hiperbólico*” significa suma sobre los modos hiperbólicos, esto es  $N_{\text{hip}} + 1 \leq j \leq N_{\text{capa}}$ . Los coeficientes en el desarrollo son  $a_j, b_j, c_j$ , y pueden obtenerse a partir del vector  $\phi$  a través de la matriz de cambio de base  $\mathbf{S}$ , donde  $\lambda_j, k_j$  se suponen reales y positivos. Por comodidad pondremos los modos hiperbólicos en forma de una sinusoide con una fase, es decir,

$$\phi(x) = \sum_{j,\text{elip}} a_j \phi_j e^{-\lambda_j x} + \sum_{j,\text{hipe}} b_j \phi_j \sin(k_j x + \gamma_j) \quad . \quad (9.56)$$

Su derivada con respecto a  $x$  es

$$\dot{\phi} = - \sum_{j,\text{elip}} \lambda_j a_j \phi_j e^{-\lambda_j x} + \sum_{j,\text{hipe}} k_j b_j \phi_j \cos(k_j x + \gamma_j) \quad ; \quad (9.57)$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\phi &= \sum_{j,\text{elip}} a_j \mathbf{K}\phi_j e^{-\lambda_j x} + \sum_{j,\text{hipe}} b_j \mathbf{K}\phi_j \sin(k_j x + \gamma_j) \\ &= \sum_{j,\text{elip}} \lambda_j^2 a_j \tilde{\mathbf{M}}\phi_j e^{-\lambda_j x} - \sum_{j,\text{hipe}} k_j^2 b_j \tilde{\mathbf{M}}\phi_j \sin(k_j x + \gamma_j) \quad ; \end{aligned} \quad (9.58)$$

donde hemos usado (9.25) y el hecho que  $\lambda^2 = -k_j^2$  para los modos hiperbólicos. Como es conocido, los autovectores  $\phi_j$  son ortogonales entre sí con respecto a la matriz de masa  $\tilde{\mathbf{M}}$ . En los problemas usuales transmisión del calor o dinámica de estructuras,  $\tilde{\mathbf{M}}$  es definida positiva, por lo tanto puede ser interpretada como una métrica, y  $\mathbf{v}^T \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{w}$  como un producto interno en  $\mathbb{R}^{N_{\text{capa}}}$ , pero debemos recordar que en este problema  $\tilde{\mathbf{M}}$  es simétrica pero no necesariamente definida positiva. Sin embargo la ortogonalidad entre los autovectores del problema sigue siendo válida. Supongamos primero que no hay autovalores múltiples, es decir que todos los autovalores  $\lambda_j^2$  de (9.25) son diferentes entre sí. Entonces

$$\mathbf{K}\phi_j = \lambda_j^2 \tilde{\mathbf{M}}\phi_j \mathbf{K}\phi_k = \lambda_k^2 \tilde{\mathbf{M}}\phi_k \quad . \quad (9.59)$$

Multiplicando la primera ecuación por  $\phi_k^T$  y la segunda por  $\phi_j^T$

$$\begin{aligned}\phi_k^T \mathbf{K} \phi_j &= \lambda_j^2 \phi_k^T \tilde{\mathbf{M}} \phi_j \\ \phi_j^T \mathbf{K} \phi_k &= \lambda_k^2 \phi_j^T \tilde{\mathbf{M}} \phi_k\end{aligned}$$

y restando la transpuesta de la segunda a la primera, recordando que  $\mathbf{K}$  y  $\tilde{\mathbf{M}}$  son simétricas

$$(\lambda_j^2 - \lambda_k^2) \phi_k^T \tilde{\mathbf{M}} \phi_j = 0 \quad ; \quad (9.60)$$

pero, como hemos supuesto que los autovalores son distintos,

$$\phi_k^T \tilde{\mathbf{M}} \phi_j = 0 \quad . \quad (9.61)$$

Cuando hay dos autovalores múltiples, se demuestra que el subespacio expandido por los autovectores correspondientes a un dado autovalor es invariante y por lo tanto se puede elegir una base ortogonal dentro de ese subespacio. Reemplazando (9.56, 9.57) en (9.53), todos los términos cruzados desaparecen y

$$\begin{aligned}\phi^T \mathbf{K} \phi &= \sum_{j, \text{elip}} \lambda_j^2 a_j^2 e^{-2\lambda_j x} (\phi_j^T \tilde{\mathbf{M}} \phi_j) \\ &= - \sum_{j, \text{hipe}} k_j^2 b_j^2 \sin^2(k_j x + \gamma_j) (\phi_j^T \tilde{\mathbf{M}} \phi_j) \\ \phi^T \tilde{\mathbf{M}} \phi &= \sum_{j, \text{elip}} \lambda_j^2 a_j^2 e^{-2\lambda_j x} (\phi_j^T \tilde{\mathbf{M}} \phi_j) \\ &+ \sum_{j, \text{hipe}} k_j^2 b_j^2 \cos^2(k_j x + \gamma_j) (\phi_j^T \tilde{\mathbf{M}} \phi_j) \quad ; \quad (9.62)\end{aligned}$$

y reemplazando en (9.53)

$$\begin{aligned}G(x) &= \frac{1}{2} \rho \sum_{j, \text{hipe}} k_j^2 b_j^2 (\phi_j^T \tilde{\mathbf{M}} \phi_j) + \text{cte} \\ &= -\frac{1}{2} \rho \sum_{j, \text{hipe}} b_j^2 (\phi_j^T \mathbf{K} \phi_j) + \text{cte} \quad \text{para } x > L . \quad (9.63)\end{aligned}$$

Esto comprueba la aseveración que habíamos hecho después de la ecuación (9.39), con respecto a que  $G$  debía ser constante aguas abajo de la embarcación. Se puede mostrar de la misma forma, que  $G(x) = \text{cte}$  para  $x < -L$  y por lo tanto,

$$F_x = \frac{1}{2} \rho \sum_{j, \text{hipe}} b_j^2 (\phi_j^T \mathbf{K} \phi_j) > 0 \quad . \quad (9.64)$$

Ahora bien, cada uno de los términos de la sumatoria en (9.63.b) es positivo ya que  $\mathbf{K}$  (la matriz de  $-\Delta_{yz}$  del operador de Laplace en 2D) es definida positiva. Esto demuestra que esta forma de calcular la resistencia de ola *dará siempre un valor positivo*.

## 9.8 Cómputo de los coeficientes $b_j$

Resta explicar cómo obtener las amplitudes de los modos hiperbólicos  $b_j$  a partir de la solución. Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen valores nodales de  $\phi^j$  y tomamos los valores en dos capas adyacentes  $k$  y  $k+1$  en aquella región  $k \geq M$  donde ya la solución es de la forma (9.54), pero en su versión discreta

$$\phi^k = \sum_{j,\text{elip}} a_j \phi_j(\xi_j)^k + \sum_{j,\text{hipe}} \phi_j [c_j(\mu_j)^{+k} + d_j(\mu_j)^{-k}] \quad ; \quad (9.65)$$

donde hemos vuelto a la forma exponencial compleja. Los  $\xi_j, \mu_j$  en esta ecuación corresponden a

$$\begin{cases} \xi_j = b_j - \sqrt{b_j^2 - 1} & \text{para } j \text{ eliptico } (|b_j| > 1) \\ \mu_j = b_j + i\sqrt{1 - b_j^2} & \text{para } j \text{ hiperbólico } (|b_j| \leq 1; ) \end{cases} \quad (9.66)$$

y puede verificarse que  $\xi_j$  es real y  $|\xi_j| < 1$  y  $\mu_j$  es complejo, con  $|\mu_j| = 1$ . Entonces, tomando la componente  $k$ -ésima de aplicar  $\mathbf{S}^{-1}$  a (9.65) obtenemos

$$(c_j \mu^{+k} + d_j \mu^{-k}) = s_k = \text{componente } j \text{ de } (\mathbf{S}^{-1} \phi^k) \quad ; \quad (9.67)$$

y tomando las ecuaciones para  $k, k+1$ , tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas para  $c_j, d_j$

$$\begin{bmatrix} (\mu_j)^k & (\mu_j)^{-k} \\ (\mu_j)^{k+1} & (\mu_j)^{-(k+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_j \\ d_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_k \\ s_{k+1} \end{bmatrix} \quad . \quad (9.68)$$

El determinante del sistema es

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} (\mu_j)^k & (\mu_j)^{-k} \\ (\mu_j)^{k+1} & (\mu_j)^{-(k+1)} \end{bmatrix} &= (\mu_j)^{-1} - \mu_j \\ &= b - i\sqrt{1 - b_j^2} - [b + i\sqrt{1 - b_j^2}] = -2i\sqrt{1 - b_j^2} \neq 0 \quad ; \end{aligned} \quad (9.69)$$

ya que  $|b_j| < 1$ . Una vez hallados  $c_j, d_j$ , la amplitud máxima del modos  $b_j$ , necesaria para calcular la resistencia de ola por (9.64) puede obtenerse de

$$b_j^2 = c_j^2 + d_j^2 \quad . \quad (9.70)$$

## 9.9 Solución numérica del sistema de ecuaciones

Como hemos visto las condiciones de contorno absorbentes propuestas involucran, en el caso hiperbólico, un pasaje de un cierto número de ecuaciones desde la frontera aguas abajo hacia la frontera aguas arriba. Esto tiene una consecuencia práctica muy importante

desde el punto de vista de la resolución numérica del sistema de ecuaciones. Primero, veamos que el sistema puede ponerse en la forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 & \mathbf{0} & \dots & & & & & \\ \mathbf{A} & -2\mathbf{B} & \mathbf{A} & \mathbf{0} & \dots & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & -2\mathbf{B} & \mathbf{A} & \mathbf{0} & \dots & & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{A} & -2\mathbf{B} & \mathbf{A} & \mathbf{0} & \\ & & & & \mathbf{0} & \mathbf{A} & -2\mathbf{B} & \mathbf{A} & \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_3 & \mathbf{0} & \dots & & \mathbf{0} & \mathbf{G}_4 & \mathbf{G}_5 & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \phi^{-(M+1)} \\ \phi^{-M} \\ \vdots \\ \phi^M \\ \phi^{M+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}^{-M+1} \\ \vdots \\ \mathbf{F}^{M-1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} . \quad (9.71)$$

Recuérdese que suponemos  $\mathbf{F}^j = \mathbf{0}$  para  $|j| \geq M$ . Todas las matrices en (9.71) son cuadradas de  $N_{\text{capa}} \times N_{\text{capa}}$ . Los términos  $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$  surgen de (5.98.b) y (5.101.a). Agrupando ambos conjuntos de ecuaciones tenemos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_{\text{hip}} \\ \mathbf{\Pi}_{\text{elip}} \end{bmatrix} \phi^{-(M+1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N_{\text{hip}} \times N_{\text{capa}}} \\ \mathbf{\Lambda}_{\text{elip}} \mathbf{\Pi}_{\text{elip}} \end{bmatrix} \phi^{-M} . \quad (9.72)$$

Pero teniendo en cuenta (5.97) y (5.102)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_{\text{hip}} \\ \mathbf{\Pi}_{\text{elip}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{N_{\text{hip}} \times N_{\text{hip}}} & \mathbf{0}_{N_{\text{hip}} \times N_{\text{elip}}} \\ \mathbf{0}_{N_{\text{elip}} \times N_{\text{hip}}} & I_{N_{\text{elip}} \times N_{\text{elip}}} \end{bmatrix} \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{I} \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^{-1} ; \quad (9.73)$$

de manera que, multiplicando toda la ecuación (9.72) a la derecha por  $\mathbf{S}$ ,

$$\phi^{-(M+1)} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N_{\text{hip}} \times N_{\text{capa}}} \\ \mathbf{\Lambda}_{\text{elip}} \mathbf{\Pi}_{\text{elip}} \end{bmatrix} \phi^{-M} ; \quad (9.74)$$

de manera que podemos identificar

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{I} , \quad \mathbf{G}_2 = -\mathbf{S} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N_{\text{hip}} \times N_{\text{capa}}} \\ \mathbf{\Lambda}_{\text{elip}} \mathbf{\Pi}_{\text{elip}} \end{bmatrix} . \quad (9.75)$$

Las últimas  $N_{\text{capa}}$  ecuaciones se obtienen análogamente

$$\mathbf{G}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_{\text{hip}} \\ \mathbf{0}_{N_{\text{elip}} \times N_{\text{capa}}} \end{bmatrix} , \quad \mathbf{G}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N_{\text{hip}} \times N_{\text{capa}}} \\ \mathbf{\Lambda}_{\text{elip}} \mathbf{\Pi}_{\text{elip}} \end{bmatrix} , \quad \mathbf{G}_5 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N_{\text{hip}} \times N_{\text{capa}}} \\ \mathbf{\Pi}_{\text{elip}} \end{bmatrix} . \quad (9.76)$$

De la observación de la estructura en bloques del sistema se desprenden tres inconvenientes para la resolución numérica:

- El bloque  $\mathbf{G}_3$  en la esquina inferior izquierda hace imposible la resolución del sistema como una matriz banda, sin embargo, usando un resolvidor que tenga en cuenta el *perfil activo* de la matriz, esta modificación sólo representa un incremento en memoria del orden de  $N_{\text{hip}}N_{\text{eq}}$ , donde  $N_{\text{eq}} = 2(M + 1)N_{\text{capa}}$  es el número total de ecuaciones. Asintóticamente, esto no es de importancia ya que la memoria total requerida para almacenar la matriz es  $2N_{\text{capa}}N_{\text{eq}}$ . El cociente entre ambos es  $N_{\text{hip}}/(2N_{\text{capa}})$ , pero como mencionamos anteriormente, el número de autovalores hiperbólicos es igual al de nodos de superficie, de manera que  $N_{\text{hip}}/N_{\text{capa}} \approx$  número de nodos en profundidad, y entonces, este incremento se hace despreciable a medida que se refina;

- El sistema deja de ser simétrico, lo cual representa el doble de memoria requerida;
- Los elementos diagonales de las ecuaciones adicionales correspondientes a los modos hiperbólicos (esto es, las  $N_{\text{hip}}$  primeras filas de la última fila de bloques en (9.71) son nulos, con lo cual es muy probable que aparezcan *pivotes nulos* durante el proceso de factorización, en el caso de resolver con un método tipo banda o de perfil activo.

Esta última es la más severa de las restricciones ya que, de no resolverla, invalida el uso de métodos tipo banda o perfil activo, y el costo computacional hace el método inviable. Reordenar las ecuaciones, pasando las ecuaciones adicionales para los modos hiperbólicos a las primeras posiciones, no resuelve el problema

$$\begin{array}{l}
 (N_{\text{capa}}) \\
 (N_{\text{hip}}) \\
 (N_{\text{capa}}) \\
 (N_{\text{capa}}) \\
 \dots \\
 (N_{\text{capa}}) \\
 (N_{\text{capa}}) \\
 (N_{\text{elip}})
 \end{array}
 \left[ \begin{array}{ccccccc}
 \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 & \mathbf{0} & \dots & & & \\
 \mathbf{0} & \mathbf{\Pi}_{\text{hip}} & \mathbf{0} & \dots & & & \\
 \mathbf{A} & -2\mathbf{B} & \mathbf{A} & \mathbf{0} & \dots & & \\
 \mathbf{0} & \mathbf{A} & -2\mathbf{B} & \mathbf{A} & \mathbf{0} & \dots & \\
 \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{A} & -2\mathbf{B} & \mathbf{A} & \mathbf{0} \\
 & & & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{A} & -2\mathbf{B} & \mathbf{A} \\
 & & & & \dots & \mathbf{0} & -\mathbf{A}_{\text{elip}}\mathbf{\Pi}_{\text{elip}} & \mathbf{\Pi}_{\text{elip}}
 \end{array} \right] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \phi^{-(M+1)} \\ \phi^{-M} \\ \vdots \\ \phi^M \\ \phi^{M+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{-(M+1)} \\ \mathbf{F}^{-M} \\ \vdots \\ \mathbf{F}^M \\ \mathbf{F}^{M+1} \end{bmatrix} \quad . \quad (9.77)$$

Como las matrices ya no son cuadradas, los pequeños números entre paréntesis a la izquierda indican el tamaño (número de filas que contiene el bloque). Las ecuaciones

para los nodos interiores, las ecuaciones  $N_{\text{capa}} < j \leq (M - 1)N_{\text{capa}}$  en (9.71), han sido desplazadas  $N_{\text{hip}}$  posiciones hacia abajo y por lo tanto sus elementos diagonales ya no están en la diagonal. Hemos considerado infructuosamente otras posibilidades en cuanto a reenumerar las ecuaciones de forma de evitar los pivotes nulos.

Para resolver este problema hemos ideado un procedimiento en el cual reemplazamos las  $N_{\text{hip}}$  ecuaciones adicionales para los modos hiperbólicos por otras tantas elegidas convenientemente. La solución para el sistema original se obtiene por *superposición* de soluciones al sistema modificado. Este método es muy eficiente, ya que eligiendo convenientemente las nuevas ecuaciones el sistema puede ser llevado a la forma simétrica, lo cual representa un ahorro significativo en memoria RAM. Sin embargo el nuevo sistema es singular para un cierto número de valores del número de Froude. Todo esto será discutido en las siguientes secciones.

## 9.10 Solución por superposición

Reemplazemos las  $N_{\text{hip}}$  ecuaciones adicionales en (9.71) por

$$\mathbf{\Pi}_{\text{hip}} \phi^{M+1} = \mathbf{r.h.s.} \quad ; \quad (9.78)$$

esto es, arbitrariamente hemos pasado las condiciones adicionales sobre los modos hiperbólicos en la capa  $-M$  a la capa  $M + 1$ . Ahora, supongamos que el nuevo sistema así modificado no es singular, y consideremos el conjunto de las soluciones  $\mathbf{W}$  haciendo variar  $\mathbf{r.h.s.}$  sobre todo el espacio  $\mathbb{R}^{N_{\text{hip}}}$ . La solución  $\Phi$  al sistema original (9.71) pertenece a dicho conjunto, ya que basta con considerar aquella solución que se obtiene cuando reemplazamos  $\mathbf{r.h.s.}$  por  $\mathbf{\Pi}_{\text{hip}} \phi^{M+1}$ . Ahora bien es sencillo ver que los elementos de este conjunto deben ser de la forma

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_0 + \sum_{j=1}^{N_{\text{hip}}} \alpha_j \mathbf{W}_j \quad ; \quad (9.79)$$

donde  $\mathbf{W}_0$  se obtiene poniendo  $\mathbf{r.h.s.} = \mathbf{0}$ , y los  $\mathbf{W}_j$  se obtienen sucesivamente el sistema para  $N_{\text{hip}}$  valores linealmente independientes de  $\mathbf{r.h.s.}$  y nulo para el resto de las ecuaciones. Por ejemplo, podemos poner  $\mathbf{r.h.s.} = \mathbf{e}_j$  donde

$$\mathbf{e}_j = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T \quad ; \quad (9.80)$$



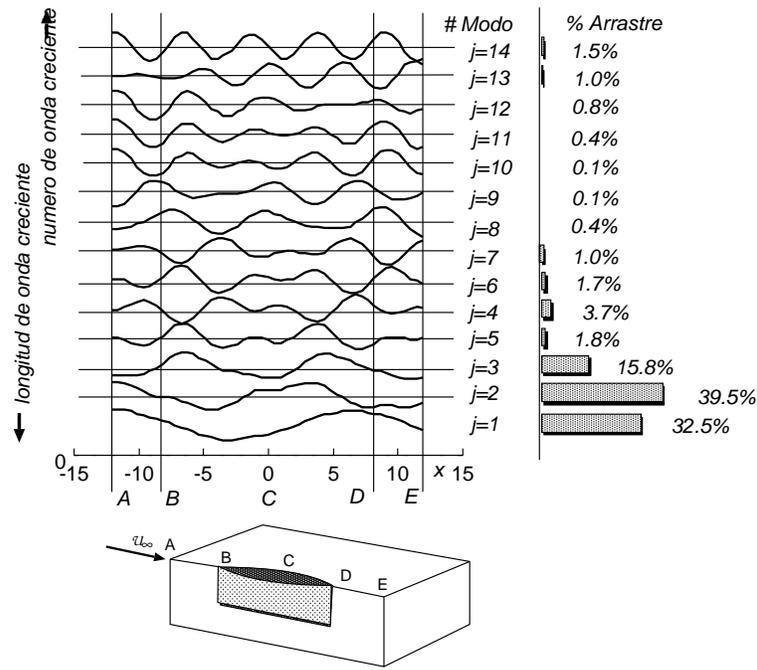


Figura 9.7: Modos usados en la superposición para el Wigley.

- 4) resolver el sistema reducido para hallar los coeficientes  $\{\alpha_j\}$ ;
- 5) armar la solución  $\Phi$  por superposición, ecuación (9.79).

Nótese que este método es aplicable en cualquier caso donde sea conveniente reemplazar cierto número reducido de ecuaciones lineales por otro. Sin embargo, como veremos más adelante, puede que el sistema modificado puede ser singular, mientras que el original no lo sea, de tal manera que este recurso debe ser utilizado con precaución, como veremos en el siguiente ejemplo simple. Por otra parte, cabe mencionar que todos estos problemas desaparecen si se opta por un resolvidor iterativo, sin embargo, es bien conocido y así también nosotros lo hemos comprobado que estos sistemas con superficie libre no son muy aptos para la resolución iterativa.

## 9.11 Ejemplo sobre el método de superposición

Consideremos el sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  de  $3 \times 3$ , con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad (9.86)$$

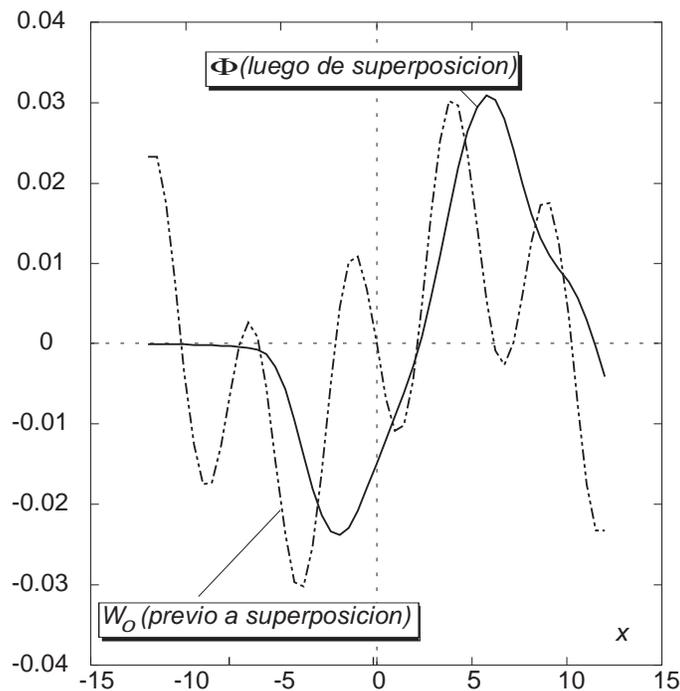


Figura 9.8: Potencial sobre el plano de simetría.

cuya solución es  $\mathbf{x} = [1/3 \ 1/3 \ 1/3]'$ . Queremos cambiar la tercera fila por  $(1, 0, -2)$ , de manera que el sistema modificado sea  $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{w} = \tilde{\mathbf{b}}$ , con

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ c \end{bmatrix} \quad ; \quad (9.87)$$

manteniendo un miembro derecho indeterminado  $c$ . La solución al sistema modificado es de la forma  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + c\mathbf{w}_1$ , con

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{w}_0 = [1 \ 2 \ 0]^T \quad \implies \quad \mathbf{w}_0 = [4/10 \ 3/10 \ 2/10]$$

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{w}_1 = [0 \ 0 \ 1] \quad \implies \quad \mathbf{w}_1 = [2/10 \ -1/10 \ -4/10] \quad . \quad (9.88)$$

Ahora, aplicando la última ecuación del sistema original a la combinación introducida, obtenemos

$$[0 \ 1 \ 2]\mathbf{w} = 1 \quad ; \quad (9.89)$$

$$[0 \ 1 \ 2] \left( \begin{bmatrix} 4/10 \\ 3/10 \\ 2/10 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 2/10 \\ -1/10 \\ -4/10 \end{bmatrix} \right) = 1$$

$$7/10 - 9/10c = 1 \quad \implies \quad c = -1/3 \quad ; \quad (9.90)$$

y la solución a (9.86) es

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4/10 \\ 3/10 \\ 2/10 \end{bmatrix} - 1/3 \begin{bmatrix} 2/10 \\ -1/10 \\ -4/10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} . \quad (9.91)$$

## 9.12 Método de superposición sobre el Wigley

Consideremos el casco Wigley a  $Fr = 0.5$ . El cálculo se hizo sobre una malla estructurada de  $51 \times 14 \times 14$  nodos (longitud/profundidad/manga) y se encontraron 14 modos hiperbólicos, ya que como mencionamos, en general hay tantos modos como nodos *según la manga* haya. La solución  $\mathbf{W}_0$  para el problema modificado es la que se muestra en la figura 9.8. La curva que se muestra el potencial sobre la línea ABCD que pasa por el costado del casco. Vemos que es antisimétrica con respecto a  $x = 0$  y claramente no es la solución *con sentido físico* que buscamos, ya que posee olas tanto aguas arriba como aguas abajo. En la figura 9.7 vemos los modos  $\mathbf{W}_j$  usados para el cálculo de la resistencia de ola. Han sido ordenados de acuerdo al  $k_j$  es decir, con respecto al número de onda. Así  $j = 1$  es el de mayor longitud de onda (menor  $k_j$ ) hasta llegar a  $j = 14$  que es el de menor longitud de onda (mayor  $k_j$ ). En la figura 9.8 se observa el potencial obtenido luego de aplicar el principio de superposición. Vemos que ahora sí han sido eliminadas las componente ondulatorias aguas arriba. Al costado de cada modo se puede observar la contribución a la resistencia de ola, es decir el porcentaje que representa cada modo en la suma (9.64). Finalmente, en la figura 9.9 vemos las curvas de elevación de la superficie para líneas aproximadamente paralelas a líneas de corriente.

## 9.13 Condicionamiento del sistema modificado

Como ya fue mencionado, la validez del método de superposición se basa en que el sistema modificado no sea singular. Veremos que esto es así *salvo para un conjunto discreto de números de Froude*. Esto se debe a que el problema modificado es equivalente a la ecuación de Helmholtz 1D con condiciones tipo Dirichlet o Neumann (dependiendo de  $\beta$ ) en los extremos. Este problema, como es sabido, tiene un conjunto discreto de *frecuencias propias*, en las cuales el sistema es singular. Consideremos la siguiente ecuación unidimensional:

$$\begin{cases} \phi_{,xx} + k^2\phi = f(x) & \text{para } 0 < x < 1 ; \\ \phi = \partial_x\phi = 0 & \text{en } x = 0 . \end{cases} \quad (9.92)$$

Esta ecuación corresponde a una simplificación de la ecuación para cada uno de los modos, una vez que el sistema de ecuaciones es desacoplado a través de la matriz de

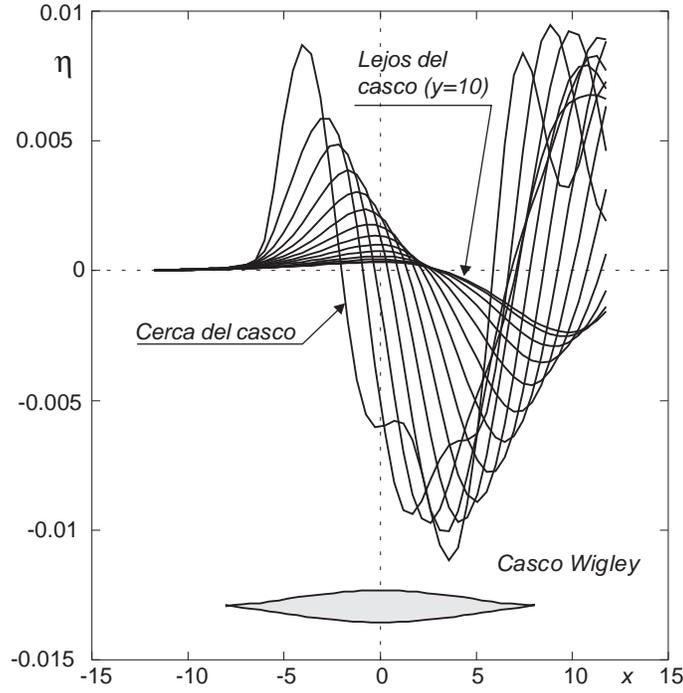


Figura 9.9: Elevación de la superficie sobre (cuasi) líneas de corriente.

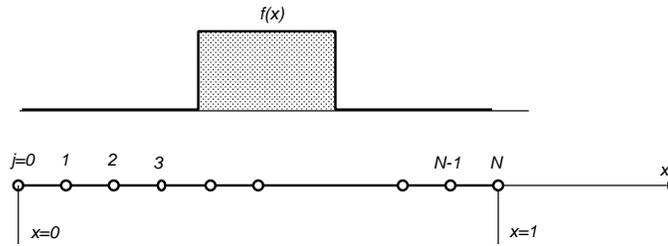


Figura 9.10: Descripción del problema 1D para las ecuaciones modales.

cambio de base  $\mathbf{S}^{-1}$  como descrito en el capítulo 5. Discretizamos la ecuación dividiendo el intervalo  $[0, 1]$  en  $N$  intervalos con  $x_j = jh$ ,  $h = 1/N$  (ver figura 9.10). Por simplicidad discretizaremos por diferencias finitas y supondremos que la fuente  $f$  es tipo escalón como se muestra en la figura. Aplicando los conceptos que hemos desarrollado sobre los modos hiperbólicos, llegamos al siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{cases} \phi_0 = 0 & ; \\ \phi_1 = 0 & ; \\ [\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}]h^{-2} + k^2\phi_j = f_j & \text{para } j = 1, \dots, (N - 1) ; \end{cases} \quad (9.93)$$



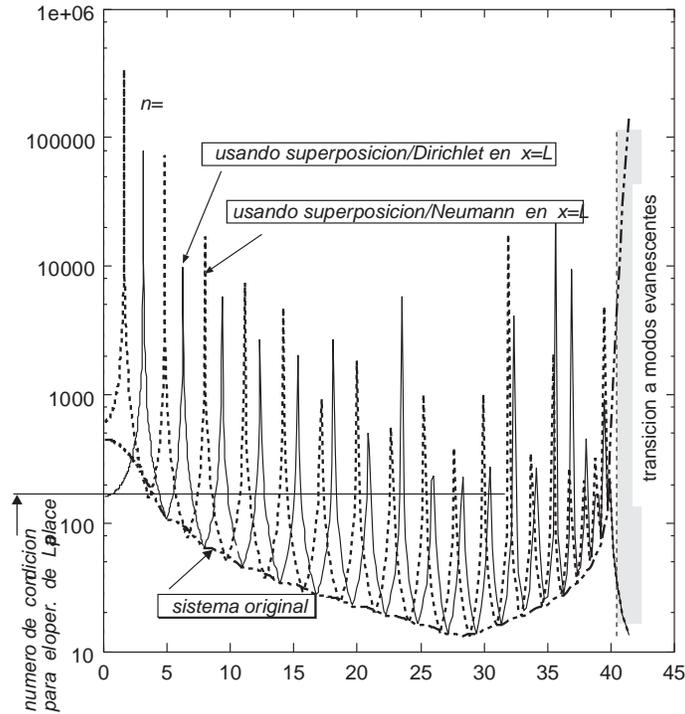


Figura 9.11: Número de condición para la ecuación modal 1D con el sistema original y el modificado con condiciones de contorno Dirichlet o Neumann aguas abajo.

$$\tilde{\mathbf{f}}^T = [f_1 \quad f_2 \quad \vdots \quad -c] \quad . \quad (9.99)$$

Como hemos visto, debemos resolver dos veces el sistema para  $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1$ , es decir,

$$\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{w}_0 = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ c \end{bmatrix}; \quad (9.100)$$

y entonces la solución será

$$\phi = \mathbf{w}_0 + c \mathbf{w}_1 \quad ; \quad (9.101)$$

la constante  $c$  se determina imponiendo la condición  $\phi_1 = 0$ , es decir,

$$\phi = \mathbf{w}_0 - (w_{0,1}/w_{1,1}) \mathbf{w}_1 \quad ; \quad (9.102)$$

donde  $w_{j,k}$  denota la componente  $k$  de  $\mathbf{w}_j$ . Hemos resuelto el problema para  $N = 20$  para más de 1000 valores de  $k$  distribuidos logarítmicamente entre  $k = 0.1$  y  $k = 41.687$ . Para cada valor de  $k$  hemos calculado el número de condición del sistema sin modificar (9.93 y el del sistema modificado (9.98, con  $\beta = 0$  (Dirichlet) y  $\beta = 1$  (Neumann)).

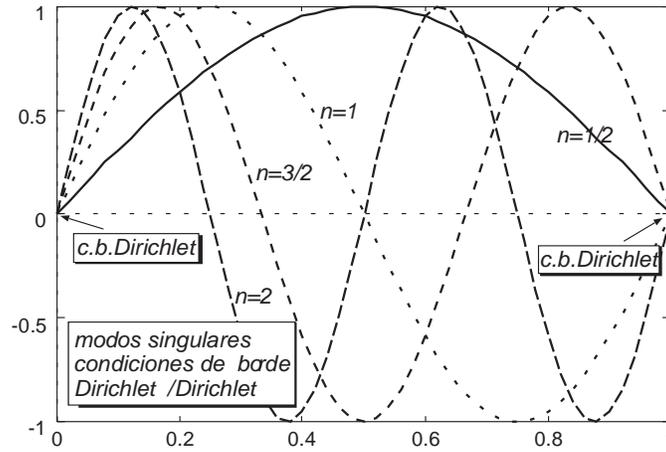


Figura 9.12: Modos propios del problema 1D con condiciones de contorno Dirichlet/Dirichlet.

Los resultados se muestran en un gráfico semi-logarítmico en la figura 9.11. Ambas versiones del sistema modificado (con  $\beta = 0, 1$ ) se vuelven singulares para cierto conjunto discreto de números de onda  $k$ , mientras que el sistema original está “razonablemente” bien condicionado. Recuérdese que el operador de Laplace 1D tiene un número de condición  $\propto h^{-2}$ , en particular para esta malla su número de condición es  $\sim 161.45$ . Estos números de onda, para los cuales ambas versiones del sistema modificado son singulares, coinciden salvo errores de aproximación con los modos propios del problema para las condiciones de contorno correspondientes. Por ejemplo, para  $\beta = 0$  los modos propios se producen cuando un número entero de semi-longitudes de onda entran en el dominio, es decir,

$$1 = n\lambda = n \frac{2\pi}{k} \implies k = n\pi \quad \text{para } n = 1/2, 1, 3/2, \dots, \quad ; \quad (9.103)$$

y los modos correspondientes son

$$\psi_n(x) = \sin(2n\pi x) \quad ; \quad (9.104)$$

mientras que para  $\beta = 1$  (condición Neumann en  $x = 1$ ) las singularidades se producen cuando un número impar de cuartos de longitudes de onda entran en el dominio  $n = 1/4, 3/4, 5/4, \dots$ . En el caso del flujo con superficie libre el parámetro  $k$  debe asimilarse al número de onda característico del flujo  $K = g/U_\infty^2 \propto Fr^{-2}$ , y este ejemplo nos permite extraer las siguientes conclusiones:

- para flujo 2D (por ejemplo, el cilindro sumergido), es de esperar que el sistema modificado sea singular para un conjunto discreto de valores de  $Fr$ . Este conjunto debería mantener, aproximadamente  $\Delta Fr^{-2} = \text{cte}$ , es decir que este conjunto debería ser más denso hacia Froude bajos;

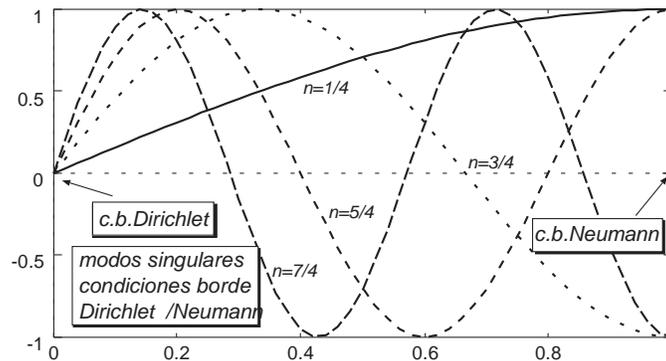


Figura 9.13: Modos propios del problema 1D con condiciones de contorno Dirichlet/Neumann.

- en 3D, cada modo hiperbólico genera su propio conjunto de valores donde el sistema modificado es singular, de manera que es de esperar que éste sea más denso al refinar transversalmente;

- si bien el cambiar el valor de  $\beta$  altera la posición de los puntos singulares, la situación no mejora. Si bien hemos intentado evitar el problema de los modos singulares, parece ser que el hecho de “cambiar de lugar” las condiciones de contorno, *lleva indefectiblemente a la aparición de modos singulares*;

- en la práctica el problema de los modos singulares no ha ocasionado inconvenientes. Hemos computado los números de condición para cada Fr en los diferentes problemas y si bien presentan un comportamiento como el descrito, es difícil (a menos que se hagan barridos muy “finos” en el número de Froude) que se de en un punto tan cerca de una singularidad como para que el número de condición sea demasiado alto y esto afecte la precisión de los resultados;

- parece ser que aumentando la longitud del dominio de resolución hace más “denso” el conjunto de puntos singulares. Esta es otra razón (además del costo computacional) para tratar de acotar lo más posible la malla en la dirección longitudinal (eje  $x$ ). Recordemos que, bajo ciertas condiciones, por ejemplo perfil delgado, el método propuesto da soluciones que son independientes del punto donde se corta la malla, mientras esto sea fuera de la zona donde se produce la perturbación (la zona donde está el casco).

Para  $k \approx 40$  existe una transición del sistema de ecuaciones, por la cual los modos pasan a ser evanescentes en vez de oscilatorios. Esto se caracteriza porque las raíces de (9.93) pasan a ser de complejas conjugadas con módulo unitario a reales. Esto ocurre

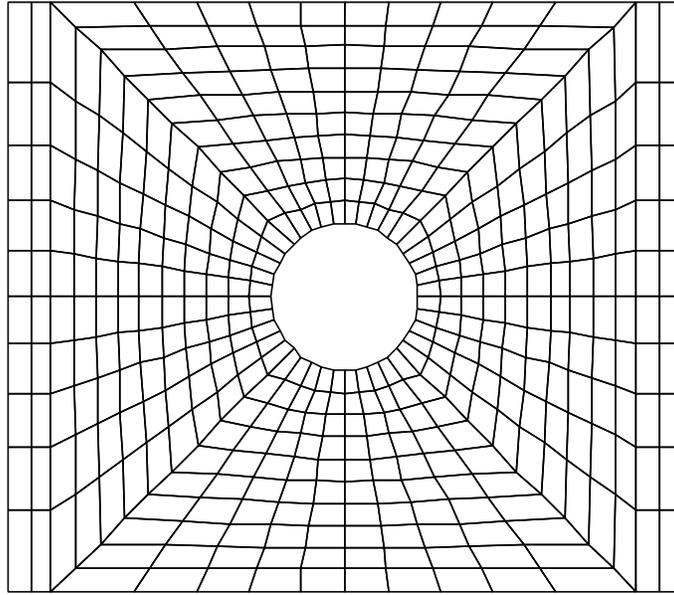


Figura 9.14: Malla de elementos finitos sobre el cilindro sumergido.

cuando

$$1 - \frac{1}{2}(kh)^2 < -1 \quad \implies \quad k > \frac{2}{h} \quad ; \quad (9.105)$$

que en este caso corresponde, efectivamente a  $k > 40$ . En este rango las ecuaciones cambian completamente de carácter y ambas versiones del sistema modificado pasan a tener un condicionamiento muy bajo, mientras que el esquema original pasa a tener un número de condición que tiende rápidamente a infinito. Esto corresponderían nuestro problema a números de Froude muy bajos, donde algunos autovalores hiperbólicos pasan a ser elípticos, sin embargo, en nuestro método este cambio de carácter no afectaría, ya que automáticamente, si un modo pasa de hiperbólico a elíptico entonces no se hace el pasaje de la condición de contorno de aguas abajo a aguas arriba.

## 9.14 Forma simétrica de las ecuaciones

Una ventaja adicional de esta propuesta es que la matriz del sistema (9.82) puede ponerse en forma simétrica, con el consiguiente ahorro de 50 % de memoria RAM. Puede verse que las únicas partes no simétricas del sistema son las primera y última filas de bloques ( $N_{\text{capa}}$  ecuaciones cada una) de  $\mathbf{K}$ . Consideremos la primera fila. Como hemos visto, esto representa las ecuaciones (9.72). Ahora bien, como las ecuaciones adicionales imponen que  $\mathbf{H}_{\text{hip}} \mathbf{w}^{-M} = \mathbf{0}$ , bien podemos reemplazar el bloque nulo en el miembro derecho por

un múltiplo escalar  $\beta > 0$  de  $\mathbf{II}_{\text{hip}} \mathbf{w}^{-M}$ , de manera que el sistema modificado sea

$$\begin{bmatrix} \mathbf{II}_{\text{hip}} \\ \mathbf{II}_{\text{elip}} \end{bmatrix} \mathbf{w}^{-(M+1)} - \begin{bmatrix} \beta \mathbf{II}_{\text{hip}} \\ \mathbf{A}_{\text{elip}} \mathbf{II}_{\text{elip}} \end{bmatrix} \mathbf{w}^{-M} = \mathbf{0} \quad . \quad (9.106)$$

En estas expresiones  $\mathbf{w}^k$  representa el  $k$ -ésimo bloque de  $N_{\text{hip}} \times 1$  dentro del vector  $\mathbf{W}$ . Ahora, usando (9.73),

$$\mathbf{S}^{-1} \mathbf{w}^{-(M+1)} = \mathbf{A}' \mathbf{S}^{-1} \mathbf{w}^{-M} \quad ; \quad (9.107)$$

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \beta \mathbf{I}_{N_{\text{hip}} \times N_{\text{hip}}} & \mathbf{0}_{N_{\text{hip}} \times N_{\text{elip}}} \\ \mathbf{0}_{N_{\text{elip}} \times N_{\text{hip}}} & \mathbf{A}_{\text{elip}} \end{bmatrix} \quad ; \quad (9.108)$$

donde  $\mathbf{A}'$  es una matriz diagonal, no-singular ya que  $\beta > 0$  y los elementos diagonales de  $\mathbf{A}_{\text{elip}}$  son todos reales y positivos, ver ecuación (5.43). Multiplicamos ahora las ecuaciones (9.107) por  $\mathbf{AS}(\mathbf{A}')^{-1}$ , de manera que el sistema resultante puede ponerse de la forma

$$\mathbf{G} \mathbf{w}^{-(M+1)} + \mathbf{A} \mathbf{w}^{-M} = \mathbf{0} \quad ; \quad (9.109)$$

donde

$$\mathbf{G} = \mathbf{AS}(\mathbf{A}')^{-1} \mathbf{S}^{-1} \quad . \quad (9.110)$$

Ahora consideremos las ecuaciones aguas abajo. Queremos obtener la misma estructura que en las condiciones aguas arriba, de manera que reemplazamos las ecuaciones adicionales modificadas (9.78) por

$$\mathbf{II}_{\text{hip}} \mathbf{w}^{M+1} - \beta \mathbf{II}_{\text{hip}} \mathbf{w}^M = \mathbf{r.h.s.} \quad . \quad (9.111)$$

Las ecuaciones aguas abajo son ahora

$$\begin{bmatrix} \mathbf{II}_{\text{hip}} \\ \mathbf{II}_{\text{elip}} \end{bmatrix} \mathbf{w}^{M+1} - \begin{bmatrix} \beta \mathbf{II}_{\text{hip}} \\ \mathbf{A}_{\text{elip}} \mathbf{II}_{\text{elip}} \end{bmatrix} \mathbf{w}^M = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_j \\ \mathbf{0}_{N_{\text{elip}} \times 1} \end{bmatrix} \quad . \quad (9.112)$$

La ecuación anterior es (a menos del miembro derecho que, por supuesto, es irrelevante para la discusión de la simetría del sistema de ecuaciones) idéntica a la (9.106) de manera que haciendo las mismas operaciones podemos llevarla a

$$\mathbf{G} \mathbf{w}^{M+1} + \mathbf{A} \mathbf{w}^M = -\mathbf{AS}(\mathbf{A}')^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_j \\ \mathbf{0}_{N_{\text{elip}} \times 1} \end{bmatrix} \quad . \quad (9.113)$$

El sistema resultante que reemplaza a (9.81, 9.82) es

$$\mathbf{KW}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{F}^{-M+1} \\ \vdots \\ \mathbf{F}^{M-1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{KW}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{AS}(\mathbf{A}')^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_j \\ \mathbf{0}_{N_{\text{elip}} \times 1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad ; \quad (9.114)$$



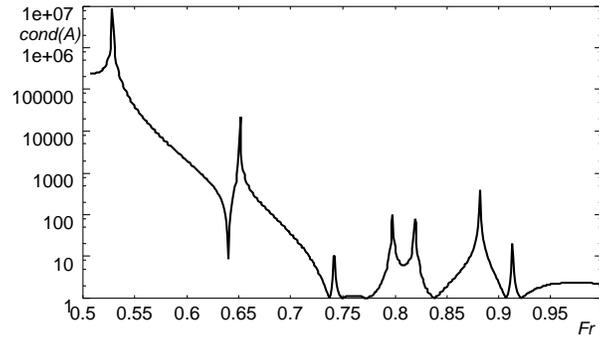


Figura 9.16: Número de condición para el problema del cilindro sumergido.

$$= a_0 \mathbf{A} + a_1 \mathbf{B} + a_2 \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} + \dots + a_m \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \dots \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad . \quad (9.118)$$

Pero cada uno de los términos es simétrico, por ejemplo,

$$(\mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-T} \mathbf{B}^T = \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad ; \quad (9.119)$$

de manera que  $\mathbf{A} f(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})$  es simétrica. Ahora bien, gracias a la descomposición (5.43)

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{S} \mathbf{D} \mathbf{S}^{-1} \quad ; \quad (9.120)$$

podemos poner

$$\mathbf{A} f(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}) = \mathbf{A} f(\mathbf{S} \mathbf{D} \mathbf{S}^{-1}) = \mathbf{A} \mathbf{S} f(\mathbf{D}) \mathbf{S}^{-1} \quad ; \quad (9.121)$$

donde

$$f(\mathbf{D}) = f(\text{diag} \{b_i\}) = \text{diag} \{f(b_i)\} \quad . \quad (9.122)$$

Como es bien conocido de la representación de funciones de matrices. Si encontramos un polinomio tal que la imagen de los  $b_i$  sea los elementos diagonales  $\{c_j\}_{j=1}^{N_{\text{capa}}}$  de  $\mathbf{A}'$ , es decir,

$$c_j = f(b_j) \quad , \quad j = 1, 2, \dots, N_{\text{capa}} \quad ; \quad (9.123)$$

donde los  $\{c_j\}$  son evidentes de (9.108), es decir,

$$c_j = \begin{cases} \beta & \text{para } 1 \leq j \leq N_{\text{hip}} ; \\ \lambda_{+,j}^{-1} & \text{para } N_{\text{hip}} < j \leq N_{\text{capa}} ; \end{cases} \quad (9.124)$$

entonces la demostración está completa. Pero la construcción de tal polinomio es bien conocida (los llamados polinomios de Lagrange), mientras que el mapeo sea univaluado, esto es,  $c_j = c_k$  cuando  $b_j = b_k$ . La demostración alternativa es puramente algebraica y nos basaremos en las expresiones que se obtienen para la semidiscretización por elementos finitos

$$\tilde{\mathbf{M}} \phi_{,xx} - \mathbf{K} \phi = 0 \quad ; \quad (9.125)$$

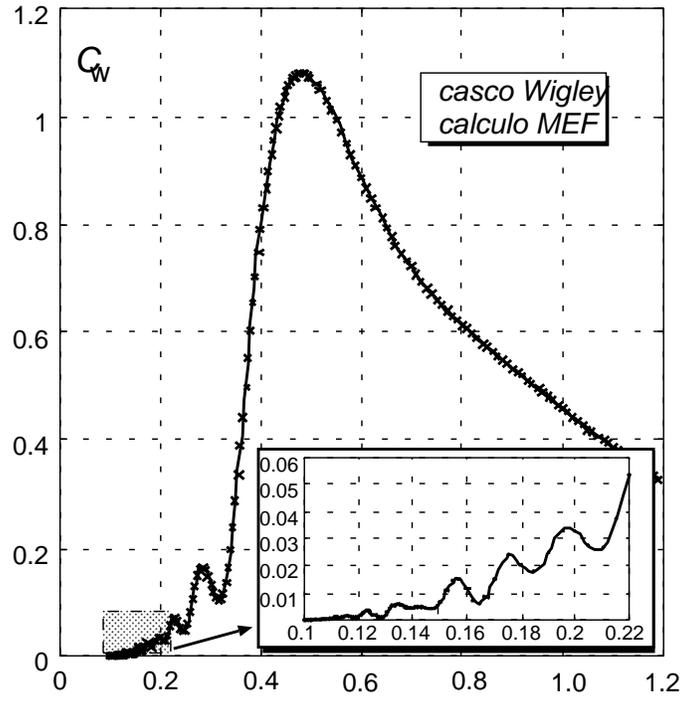


Figura 9.17: Curva de arrastre por MEF+DNL para el modelo Wigley.

donde  $\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M} - \mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}_{\text{libre}}$ . Las matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{M}_{\text{libre}}$  y  $\mathbf{K}$  son definidas positivas pero  $\tilde{\mathbf{M}}$  obviamente no lo es. Obtenemos la discretización completa por elementos finitos. Discretizando en  $x$

$$\tilde{\mathbf{M}} \frac{\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}}{h^2} + \mathbf{K} \frac{\phi_{j+1} + 4\phi_j + \phi_{j-1}}{6} = 0 \quad ; \quad (9.126)$$

de donde salen las siguientes expresiones para  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ ,

$$\mathbf{A} = h^{-2}\tilde{\mathbf{M}} - 1/6\mathbf{K} \quad ; \quad (9.127)$$

$$\mathbf{B} = -2h^{-2}\tilde{\mathbf{M}} - 2/3\mathbf{K} \quad . \quad (9.128)$$

Ahora sean  $\mathbf{W}$  y  $\mathbf{\Lambda}''$  las matrices de autovectores y autovalores que resuelven el siguiente problema generalizado de autovalores

$$\tilde{\mathbf{M}}\mathbf{W} = \mathbf{K}\mathbf{W}\mathbf{\Lambda}'' \quad ; \quad (9.129)$$

donde  $\mathbf{W}$  es no singular y  $\mathbf{\Lambda}''$  es diagonal. Como es bien sabido los autovectores (las columnas de  $\mathbf{W}$ ) son ortogonales con respecto a  $\mathbf{K}$  y, normalizándolos,

$$\mathbf{W}^T\mathbf{K}\mathbf{W} = \mathbf{I} \quad ; \quad (9.130)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{K}\mathbf{W}(h^{-2}\mathbf{\Lambda}'' - 1/6\mathbf{I})\mathbf{W}^{-1} \quad ; \quad (9.131)$$

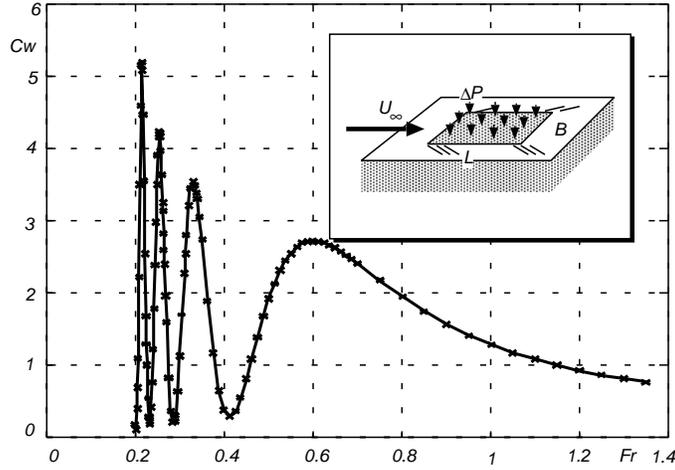


Figura 9.18: Resultados numéricos por MEF + DNL para el rectángulo de presión.

$$\mathbf{B} = -2\mathbf{KW}(h^{-2}\mathbf{A}'' - 2/3\mathbf{I})\mathbf{W}^{-1} \quad ; \quad (9.132)$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} &= -2\mathbf{W}(h^{-2}\mathbf{A}'' - 1/6\mathbf{I})^{-1}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{KW}(h^{-2}\mathbf{A}'' - 2/3\mathbf{I})\mathbf{W}^{-1} \\ &= -2\mathbf{W}[(h^{-2}\mathbf{A}'' - 1/6\mathbf{I})^{-1}(h^{-2}\mathbf{A}'' - 2/3\mathbf{I})]\mathbf{W}^{-1} \quad . \end{aligned} \quad (9.133)$$

Pero el término entre corchetes es diagonal, de manera que podemos reemplazar a  $\mathbf{W}$  como la matriz de cambio de base  $\mathbf{S}$  en (9.109). Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \mathbf{AW}(\mathbf{A}')^{-1}\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{KW}(h^{-2}\mathbf{A}'' - 1/6\mathbf{I})\mathbf{W}^{-1}\mathbf{W}(\mathbf{A}')^{-1}\mathbf{W}^{-1} \\ \mathbf{G} &= \mathbf{KW}(h^{-2}\mathbf{A}'' - 1/6\mathbf{I})(\mathbf{A}')^{-1}\mathbf{W}^{-1} \quad ; \end{aligned} \quad (9.134)$$

y

$$\mathbf{G}^T = \mathbf{W}^{-T}(h^{-2}\mathbf{A}'' - 1/6\mathbf{I})(\mathbf{A}')^{-1}\mathbf{W}^T\mathbf{K}^T \quad . \quad (9.135)$$

Pero de 9.130 resulta

$$\mathbf{W}^T\mathbf{K}^T = \mathbf{W}^{-1} \quad ; \quad (9.136)$$

$$\mathbf{W}^{-T} = \mathbf{KW} \quad . \quad (9.137)$$

De manera que  $\mathbf{G}^T = \mathbf{G}$ .

## 9.16 Ejemplos numéricos

### 9.16.1 Cilindro sumergido en un canal

Este problema es 2D y consiste en un cilindro sumergido a una profundidad  $f$  (referida a su eje) de 4 veces su radio  $b$  (ver figura 9.15). La profundidad del canal es  $H = 2f$ . La

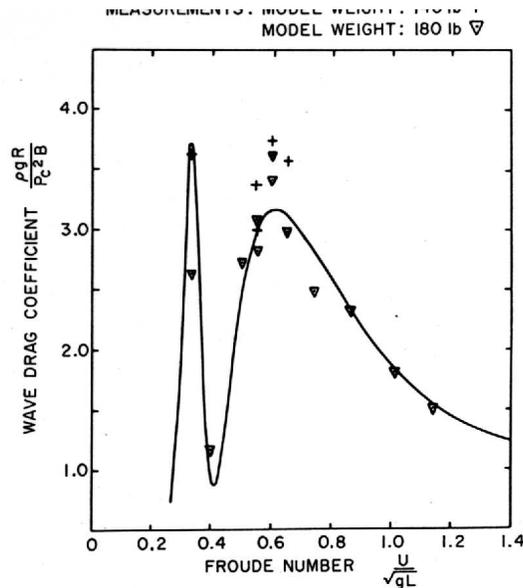


Fig. 9.19. Comparison of calculated wave resistance with measurements of

Figura 9.19: Resultados experimentales y semi-analíticos para el rectángulo de presión.

La malla (ver figura 9.14) es básicamente una malla tipo “O” alrededor del cilindro con dos capas adicionales estructuradas a la entrada y a la salida. La malla básica contiene 10 elementos en la dirección radial y 40 en la circunferencial. A esta malla básica se le han agregado dos capas de elementos a la entrada y a la salida que es la parte “estructurada” necesaria para aplicar el método. El Fr se refiere a la profundidad, es decir,  $Fr = U/\sqrt{gf}$  y el coeficiente de arrastre ha sido adimensionalizado como

$$C_w = \left(\frac{f}{b}\right)^3 \frac{F_x}{\rho U_\infty^2 b} \quad (9.138)$$

Es decir, como en el caso del dipolo sumergido. El factor  $(f/b)^3$  hace que la curva de resistencia de ola sea independiente del diámetro del cilindro en el límite  $b/f \ll 1$ . La curva de resistencia de ola es bastante similar a la del dipolo sumergido, las diferencias se deben a que la profundidad está acotada y a que el problema de dipolo corresponde a un cilindro de diámetro muy pequeño. El cálculo de la resistencia de ola se realizó para 500 valores de Fr entre  $0.5 < Fr < 1$ , y al mismo tiempo calculamos el número de condición de la matriz  $\mathbf{A}$  (9.85) en el sistema de superposición (9.83) (ver figura 9.16).

Vemos que el número de condición presenta una serie de picos que indican un conjunto discreto de números de Froude para los cuales el sistema se hace singular. A pesar de esto la curva de resistencia de ola no presenta ningún tipo de irregularidad, lo cual es una señal de que estos picos en el número de condición no llegan a afectar la precisión del método, al menos no dentro de los parámetros en que hemos realizado el experimento (grado de

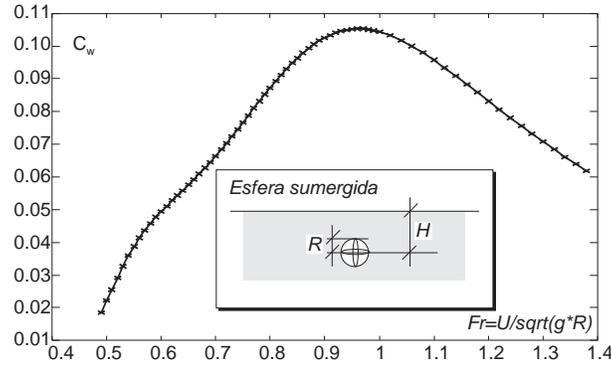


Figura 9.20: Curva de resistencia de ola para una esfera sumergida  $H = 4R$ .

refinamiento y tipo de la malla, rango de números de Froude, etc). Para números de Froude muy bajos ( $Fr < 0.6$ ) el número de condición crece y, a partir de cierto valor los resultados dejan de tener sentido. Todavía no tenemos una explicación satisfactoria para este comportamiento, pero de todas formas debemos recalcar que los valores del rango de valores de Froude para los cuales obtenemos resultados satisfactorios con este método supera ampliamente el que se obtiene con los otros métodos con los que hemos experimentado, fundamentalmente: paneles + cuasiDawson y MEF + cuasiDawson.

### 9.16.2 Casco de la serie Wigley

En la figura 9.17 vemos la curva de resistencia de ola obtenida con el método propuesto, la cual está en muy buena coincidencia con los resultados reportados en la literatura. La malla consistió de  $50 \times 13 \times 13 = 8450$  elementos. Vemos que el método propuesto reproduce muy bien el pico primario y los secundarios. En ningún caso el arrastre se vuelve negativo, por lo que hemos discutido previamente.

### 9.16.3 Rectángulo de presión (hovercraft)

Se trata de un caso especial donde la perturbación no es una embarcación sino una variación de presión sobre la superficie libre. Esta perturbación puede ser producida, por ejemplo, por un hovercraft. Las ecuaciones de gobierno linealizadas son:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\phi = 0 & \text{en } \Omega ; \\ \partial_n\phi = 0 & \text{sobre } \Gamma_{\text{barco/lat}} ; \\ \partial_n\phi + K^{-1}\partial_{xx}\phi = (U_\infty/\rho g)\partial_x(\Delta P) & \text{sobre } \Gamma_{\text{libre}} ; \\ \text{condiciones absorbentes DNL} & \text{sobre } \Gamma_{\text{ent/sal}} ; \end{array} \right. \quad (9.139)$$

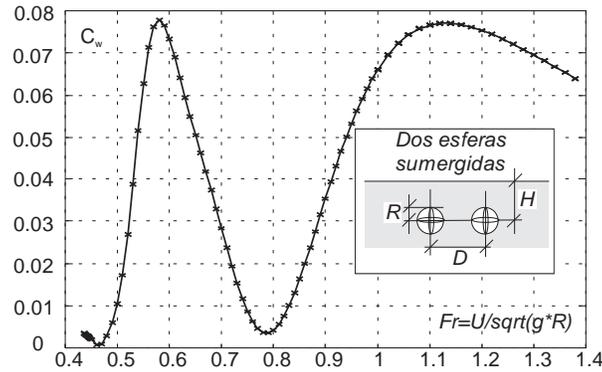


Figura 9.21: Curva de arrastre para dos esferas sumergidas  $R = 1/2, H = 2, D = 4$ .

donde  $\Delta P$  es constante dentro de un rectángulo de ancho  $B$ , de longitud  $L$  y nula fuera del mismo. Aquí hemos levantado la curva de arrastre para  $L/B = 3/2$ , para el cual contamos con resultados experimentales reproducidos por Wehausen (figura 9.19). Este es un caso interesante porque es puramente 3D y no entra dentro de las teorías, ni la del barco esbelto ni la del barco delgado. Además notemos que, como en la condición de superficie libre entra la derivada longitudinal de  $\Delta P$ , lo que corresponde a  $\delta$ -s de Dirac en la parte anterior y posterior del rectángulo. Como hemos visto en el capítulo 6 el arrastre es, básicamente, proporcional a la transformada de Fourier de  $\Delta P$ . Ahora bien, cuanto más singular es la distribución de presión, más oscilatoria es su transformada. Como límite, la transformada de una  $\delta$  de Dirac es una exponencial compleja de amplitud constante. Es de esperar que la curva de arrastre sea muy oscilatoria para  $Fr \rightarrow 0$ . Efectivamente, esto es lo que se observa en los resultados tanto numéricos (figura 9.18) como experimentales. La coincidencia entre ambos es, además, muy buena. Nótese como se resuelven los picos secundarios en la curva de resistencia hasta  $Fr \approx 0.2$ . La malla empleada fue de  $30 \times 10 \times 15 = 4500$  elementos en longitud-profundidad-transversal.

#### 9.16.4 Esferas sumergidas

Primero consideramos una esfera de radio  $R = 1/2$  sumergida a una profundidad de  $H = 2$ . La curva de arrastre es muy suave lo cual es típico de cuerpos sumergidos y con un máximo cerca de  $Fr = 1$ . La malla fue de 3328 elementos, donde por simetría sólo se discretizo una mitad ( $y \geq 0$ ). Luego, modelamos dos esferas sumergidas donde valen las mismas observaciones, pero se destaca un pico secundario para  $Fr \approx 0.58$ .

# Capítulo 10

## Condición de frontera DNL por paneles

### 10.1 Resumen

Mostramos una implementación por paneles de la condición de frontera absorbente Discreta No-local (DNL). El procedimiento numérico implementado es una combinación del método de paneles estándar, de la estrategia de las condiciones absorbentes Discretas No-locales (DNL), y de una representación del potencial de ola asintótico en corriente abajo mediante serie de Fourier. El punto de partida será la solución bidimensional del problema linealizado de flujo potencial en aguas profundas y con una superficie libre, que será adaptada para la representación de la solución tridimensional por superposición finita de ondas planas, en donde la malla de paneles en la superficie del flujo básico es estructurada en un cierto número de bandas transversales, lo que nos facilitará la introducción de una base de Fourier finita. Entre los ejemplos numéricos, mostramos la estela de un ferry en un dominio ampliado de aproximadamente quince esloras.

### 10.2 Matriz de superficie libre

Como mencionamos en el capítulo 8, los esquemas en contra-corriente, como los de tipo cuasi-Dawson, son usualmente introducidos en la matriz de superficie libre  $\mathbf{D}_{pp}$ , en contraste, en el método de paneles-Fourier podemos emplear un método de segundo orden para el operador discreto. Por ejemplo, consideremos una malla estructurada  $(x_i, y_j)$  sobre la superficie libre, con  $n_x \times n_y$  nodos y pasos de malla  $h_x, h_y$ , donde las velocidades son evaluadas en los nodos pero los potenciales lo son en los centroides de los paneles. Si

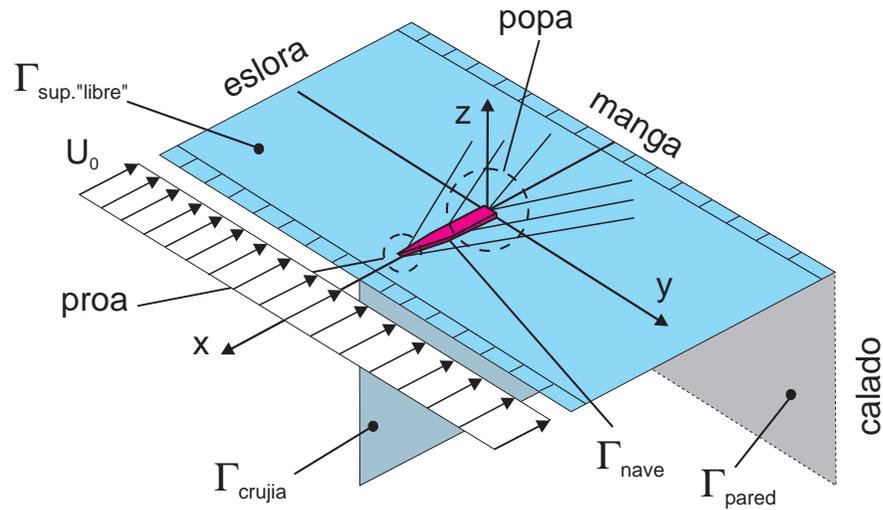


Figura 10.1: Esquema descriptivo para el problema de olas generadas por una embarcación.

además  $\mathbf{u}_0 = (U, 0, 0)$ , donde  $U \approx \text{cte}$ , podemos estimar

$$(\mathbf{D}_{pp}\boldsymbol{\mu})_{i+1/2,j+1/2} \approx -\frac{U^2}{g} \left( \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} \right)_{i+1/2,j+1/2} ; \quad (10.1)$$

y emplear un esquema de segundo orden centrado, el cual no introduce un mecanismo disipativo equivalente en el método numérico

$$(\partial_{xx}\mu)_{i+1/2,j+1/2} \approx h_x^{-2} (\mu_{i-1/2,j+1/2} - 2\mu_{i+1/2,j+1/2} - \mu_{i+1/2,j+1/2}) . \quad (10.2)$$

## 10.3 Flujo bidimensional

Consideremos primero un flujo bidimensional de izquierda a derecha con velocidad no perturbada  $U$ , alrededor de un objeto de longitud característica  $L$  y situado en  $x = 0$ . Las ecuaciones gobernantes para el potencial de ola  $\hat{\mu}(x, z)$  pueden obtenerse en un modo similar al de Stoker (1957, chap. 7)

$$\begin{cases} \nabla^2 \hat{\mu} = 0 & , \text{ en } -\infty < z \leq 0 \\ \hat{\mu}_{,z} + (U^2/g)\hat{\mu}_{,xx} = 0 & , \text{ sobre } z = 0 \\ \hat{\mu} \text{ y } \partial_z \hat{\mu} \text{ acotados} & , \text{ para todo } y, z. \end{cases} ; \quad (10.3)$$

Su solución asintótica corriente abajo y suficientemente lejos del cuerpo, puede escribirse

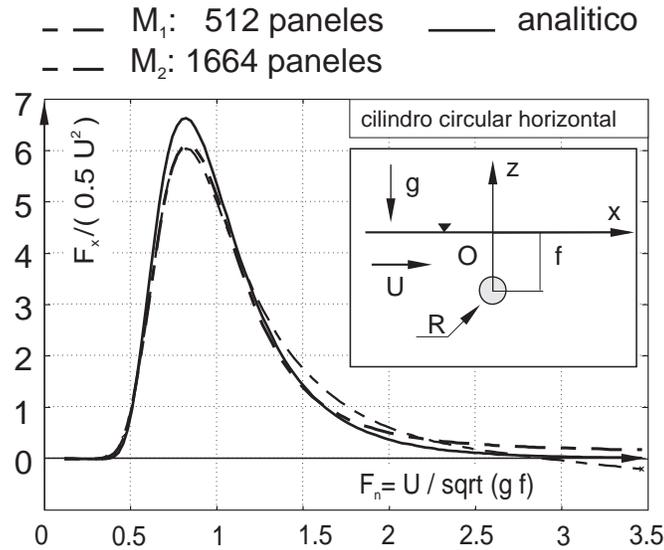


Figura 10.2: Curva de arrastre  $C_w$  en un cilindro circular sumergido en posición horizontal, por paneles/Fourier.

como una combinación lineal de senos y cosenos en la dirección de propagación  $x$  afectado con una exponencial decreciente en la dirección del calado  $z$

$$\hat{\mu}(x, z) = Ae^{Kz} \sin(Kx) + Be^{Kz} \cos(Kx) \quad \text{para } x > x_w \text{ y } z \leq 0, \quad (10.4)$$

donde  $x_w$  es una abscisa suficientemente lejos del objeto, es decir,  $0 < L < x_w < \infty$ ,  $A, B$  son dos amplitudes arbitrarias las cuales son determinadas a partir de las condiciones de borde, y  $K = g/U^2$  es el número de onda asociado con la longitud de onda  $\lambda = 2\pi K^{-1} = 2\pi(U^2/g)$ .

## 10.4 Flujo tridimensional

Para el caso tridimensional necesitamos obtener una solución asintótica equivalente. Esto puede hacerse imponiendo condiciones de borde periódicas en la dirección de la manga, y es equivalente a una cascada infinita de objetos con disposición transversal a la corriente media. Entonces, introducimos una serie finita de Fourier en la banda  $-L_y/2 \leq y \leq L_y/2$  sobre una malla estructurada de paneles en  $n_y$  tiras transversales y consideramos los  $n_y$  modos de Fourier

$$\begin{cases} N_q = \cos(k_{yq}y) = \cos(2\pi qy/L_y) & \text{para } q = 0, 2, \dots, n_y/2 - 1 \\ M_q = \sin(k_{yq}y) = \sin(2\pi qy/L_y) & \text{para } q = 1, 2, \dots, n_y/2 \end{cases} \quad (10.5)$$

con la condición  $n_y \geq 2$ , donde  $k_{yq}$  es el número de onda en la dirección de la manga, y  $N_q, M_q$  son los modos de Fourier coseno y seno, respectivamente. Esta base de Fourier

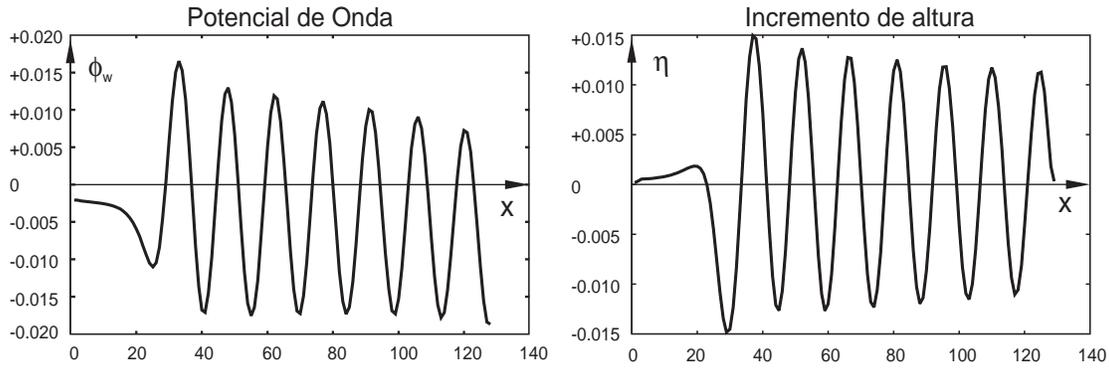


Figura 10.3: Ensayo de la altura de ola constante para el cilindro sumergido en posición horizontal, por paneles/Fourier.

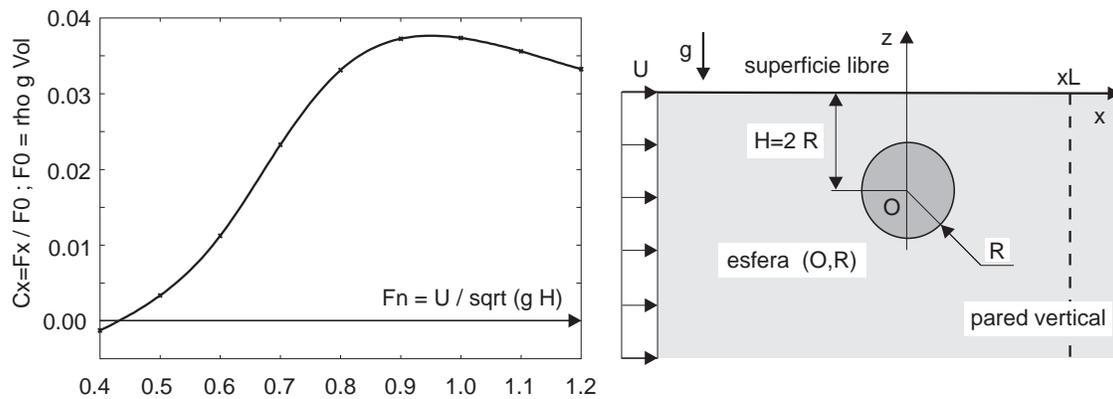


Figura 10.4: Curva de arrastre para una esfera sumergida a  $H = 2R$ , por paneles/Fourier.

finita evaluada en las ordenadas  $y_i$  de los centroides satisface las relaciones de ortogonalidad, lo cual puede mostrarse por medio de una matriz modal  $\mathbf{W}$  cuadrada de dimensión  $n_y \times n_y$  obtenida por el algoritmo simple

**Algoritmo: matriz modal cuadrada**

**do**  $q = 1, 2, \dots, n_y/2$

$k'_y \leftarrow 2\pi(q - 1)/L_y$

$k''_y \leftarrow 2\pi q/L_y$

**do**  $i = 1, 2, \dots, n_y$

$y_i = (1/2 + i)h_y$

$W_{i,2q-1} \leftarrow \cos(k'_y y_i)$

$W_{i,2q} \leftarrow \sin(k''_y y_i)$

**end do**  $i, q$

Su primera columna es el modo constante  $+1$ , y la última contiene el modo  $\pm 1$  con la

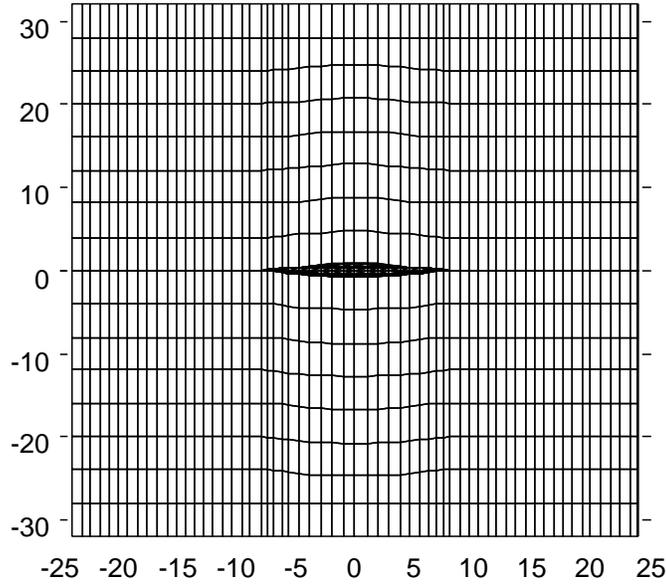


Figura 10.5: Malla de paneles suave y estructurada sobre la superficie libre alrededor de un casco Wigley (vista  $xy$ ).

máxima frecuencia admisible en la malla discreta. Con esta construcción para la matriz modal  $\mathbf{W}$ , luego de normalizar por columnas, es no singular  $\det(\mathbf{W}) \neq 0$ , y ortonormal, esto es, el producto de  $\mathbf{W}$  con su traspuesta  $\mathbf{W}'$  es la matriz identidad  $\mathbf{I} = \mathbf{W}\mathbf{W}'$ . Los  $n_y$  modos de Fourier nos permite escribir el potencial de ola asintótico  $\tilde{\mu}(x, y, z)$  y su derivada parcial respecto de  $x$ ,  $\tilde{\sigma}(x, y, z) = \partial_x \tilde{\mu}$ , como

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(x, y, z) = & \sum_{q=0}^{n_y/2-1} \left[ A_q e^{k_{zq}z} \sin(k_{xq}x) + B_q e^{k_{zq}z} \cos(k_{xq}x) \right] \cos(k_{yq}y) + \\ & + \sum_{q=1}^{n_y/2} \left[ C_q e^{k_{zq}z} \sin(k_{xq}x) + D_q e^{k_{zq}z} \cos(k_{xq}x) \right] \sin(k_{yq}y) \end{aligned} \quad (10.6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(x, y, z) = & \sum_{q=0}^{n_y/2-1} \left[ A_q k_{xq} e^{k_{zq}z} \cos(k_{xq}x) - B_q k_{xq} e^{k_{zq}z} \sin(k_{xq}x) \right] \cos(k_{yq}y) + \\ & + \sum_{q=1}^{n_y/2} \left[ C_q k_{xq} e^{k_{zq}z} \cos(k_{xq}x) - D_q k_{xq} e^{k_{zq}z} \sin(k_{xq}x) \right] \sin(k_{yq}y) \end{aligned} \quad (10.7)$$

donde  $A_q, B_q, C_q, D_q$  son las constantes de amplitud de los modos de Fourier,  $k_{xq}, k_{yq}$  son los números de onda en plano de equilibrio hidrostático y  $k_{zq}$  es la atenuación en calado de cada modo. Ahora, necesitamos una relación entre  $k_{xq}, k_{yq}$  y  $k_{zq}$ .

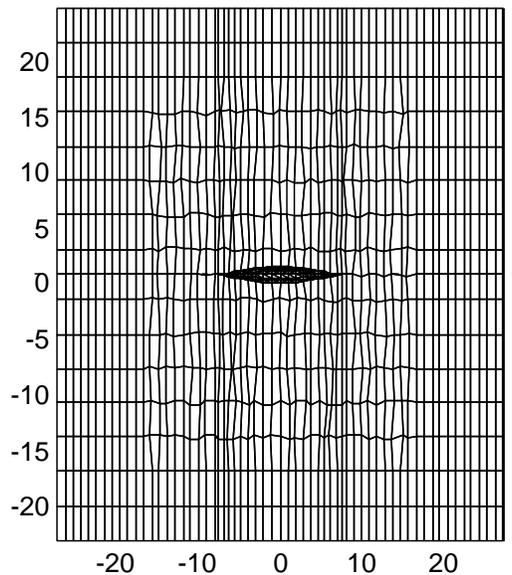


Figura 10.6: Malla de paneles perturbada y estructurada sobre la superficie libre alrededor de un casco Wigley (vista  $xy$ ).

## 10.5 Relación de dispersión

Con las suposiciones geométricas, el potencial de ola asintótico  $\tilde{\mu}(x, y, z)$  lo hemos representado como la superposición de ondas planas  $\mu_q(x, y, z)$  en los planos  $z = \text{cte}$ , con atenuación exponencial en la dirección del calado  $z \leq 0$ , esto es,

$$\tilde{\mu}(x, y, z) = \sum_{q=0}^{n_y/2} E_q \tilde{\mu}_q(x, y, z) \quad \text{donde} \quad \tilde{\mu}_q(x, y, z) = e^{ik_{xq}x + ik_{yq}y + k_{zq}z} \quad ; \quad (10.8)$$

y  $E_q$  son ciertas constantes complejas. Por superposición, cada onda viajera satisface la ecuación de Laplace en el dominio  $\Omega$  y la condición linealizada de superficie libre sobre  $z = 0$

$$\begin{cases} \partial_{xx}\tilde{\mu}_q + \partial_{yy}\tilde{\mu}_q + \partial_{zz}\tilde{\mu}_q = 0 & \text{en } \Omega ; \\ K\partial_z\tilde{\mu}_q + \partial_{xx}\tilde{\mu}_q = 0 & \text{sobre } z = 0 . \end{cases} \quad (10.9)$$

A partir de las cuales hallamos las relaciones discretas

$$\begin{cases} k_{yq} = 2\pi q/L_y \\ k_{xq} = \sqrt{1/2K^2 + 1/2\sqrt{K^4 + 4K^2k_{yq}^2}} \\ k_{zq} = k_{xq}^2/K \end{cases} \quad \text{para } q = 0, 2, \dots, n_y/2 . \quad (10.10)$$

Estas pueden verse como una “relación de dispersión” (desde que la coordenada  $x$  puede considerarse como una coordenada temporal) entre los números de onda cartesianos  $k_{xq}, k_{yq}$  y la atenuación en calado  $k_{zq}$  de cada modo de Fourier.

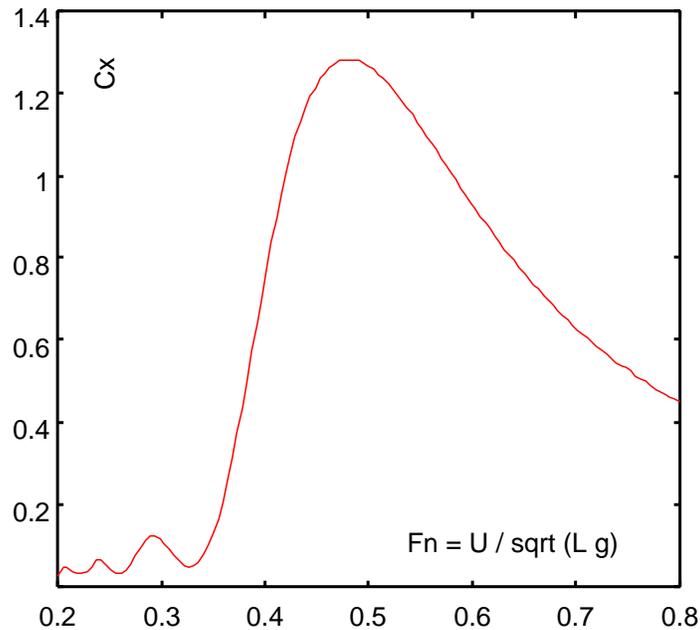


Figura 10.7: Curva de arrastre para el casco Wigley para una malla suave y otra perturbada, según un cálculo por paneles/Fourier.

## 10.6 Condiciones absorbentes DNL equivalentes

Consideremos una porción finita de la superficie libre del flujo básico (el plano  $z = 0$ , discretizada con una malla estructurada en  $n_p = n_x \times n_y$  paneles, donde  $n_x$ ,  $n_y$  son el número de paneles en la dirección de la eslora y de la manga, respectivamente, numerados  $l = (i - 1)n_y + j$ , para  $1 \leq i \leq n_x$  y  $1 \leq j \leq n_y$ . Introduzcamos una pared vertical en corriente abajo suficientemente lejos de la nave, a una abscisa  $x_w$  tal que  $0 < L < x_w < \infty$ , también discretizada con una malla estructurada con  $n_w = n_y \times n_z$  paneles, donde  $n_z$  es el número de paneles en la dirección del calado, mientras que la malla sobre la nave tiene  $n_b$  paneles y puede ser no-estructurada, de modo que tenemos un número total de paneles de  $n = n_p + n_b + n_w$ . El sistema matricial para el problema del flujo perturbado con esta malla “ampliada” es similar a la ecuación (8.9)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{pp} & \mathbf{A}_{pb} & \mathbf{A}_{pw} \\ \mathbf{A}_{bp} & \mathbf{A}_{bb} & \mathbf{A}_{bw} \\ \mathbf{A}_{wp} & \mathbf{A}_{wb} & \mathbf{A}_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_p \\ \boldsymbol{\mu}_b \\ \boldsymbol{\mu}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{pp} & \mathbf{C}_{pb} & \mathbf{C}_{pw} \\ \mathbf{C}_{bp} & \mathbf{C}_{bb} & \mathbf{C}_{bw} \\ \mathbf{C}_{wp} & \mathbf{C}_{wb} & \mathbf{C}_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_p \\ \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma}_w \end{bmatrix} . \quad (10.11)$$

Introduciendo la ecuación (8.10) y reordenando

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_{pp} & \mathbf{A}_{pb} & \mathbf{A}_{pw} \\ \hat{\mathbf{A}}_{bp} & \mathbf{A}_{bb} & \mathbf{A}_{bw} \\ \mathbf{A}_{wp} & \mathbf{A}_{wb} & \mathbf{A}_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_p \\ \boldsymbol{\mu}_b \\ \boldsymbol{\mu}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{pp} & \mathbf{C}_{pw} \\ \mathbf{C}_{bp} & \mathbf{C}_{bw} \\ \mathbf{C}_{wp} & \mathbf{C}_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\sigma}_w \end{bmatrix} ; \quad (10.12)$$

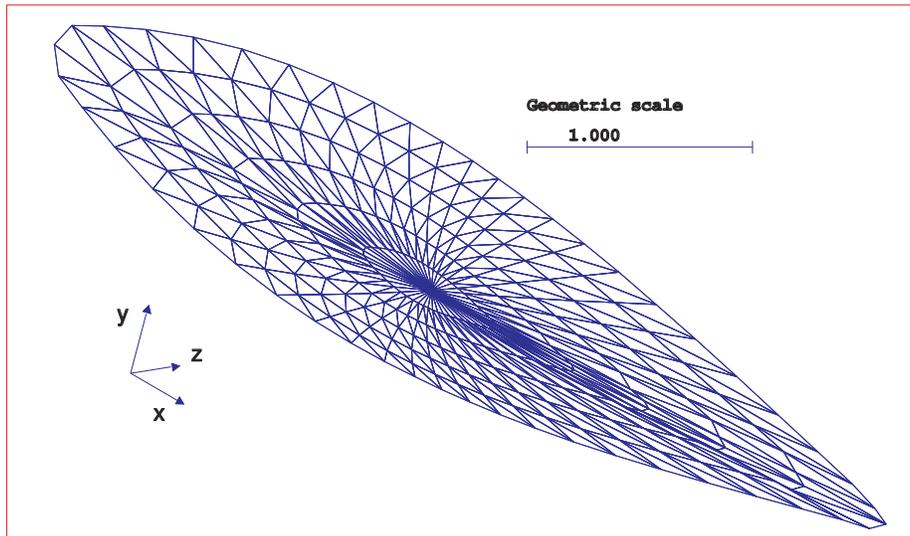


Figura 10.8: Malla de paneles sobre el casco sin apéndices de un modelo en escala reducida de un velero.

donde  $\hat{\mathbf{A}}_{pp} = \mathbf{A}_{pp} - \mathbf{C}_{pp}\mathbf{D}_{pp}$  y  $\hat{\mathbf{A}}_{bp} = \mathbf{A}_{bp} - \mathbf{C}_{pp}\mathbf{D}_{pp}$ . Ninguno de los vectores  $\boldsymbol{\mu}_w$  ni  $\boldsymbol{\sigma}_w$  son conocidos, de modo que el sistema es sub-determinado. Hallaremos una relación entre ambos mediante las condiciones de borde absorbentes. Primero, introducimos los  $n_y$  modos de Fourier sobre la pared vertical

$$\boldsymbol{\sigma}_j = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_j \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\mu}_j = \tilde{\boldsymbol{\mu}}_j \quad \text{para } j - n_p - n_b = 1, 2, \dots, n_w ; \quad (10.13)$$

Como estas satisfacen las ecuaciones gobernantes descartamos la última fila de ecuaciones (10.12). El conjunto de ecuaciones remanentes las escribimos en forma desarrollada

$$\sum_{j=1}^{n_p} \hat{a}_{ij} \mu_j + \sum_{j=n_p+1}^{n_p+n_b} a_{ij} \mu_j + \sum_{j=n_p+n_b+1}^n a_{ij} \mu_j = \sum_{j=1}^{n_p} c_{ij} f_j + \sum_{j=n_p+n_b+1}^n c_{ij} \sigma_j \quad ; \quad (10.14)$$

para  $i = 1, 2, \dots, (n_p + n_b)$ , reemplazando a partir de las ecuaciones (10.12) y (10.6, 10.7)

$$\sum_{j=1}^{n_p} \hat{a}_{ij} \mu_j + \sum_{j=n_p+1}^{n_p+n_b} a_{ij} \mu_j + \sum_{j=n_p+n_b+1}^n \sum_{q=1}^{n_y/2} (\alpha_{ijq} A_q + \beta_{ijq} B_q + \gamma_{ijq} C_q + \delta_{ijq} D_q) = \sum_{j=1}^{n_p} c_{ij} f_j \quad (10.15)$$

para  $i = 1, 2, \dots, (n_p + n_b)$  donde tenemos  $n_p + n_b + 2n_y$  incógnitas, pero solo disponemos de  $n_p + n_b$  ecuaciones de colocación, de modo que necesitamos agregar  $2n_y$  ecuaciones para las amplitudes de Fourier. En segundo lugar, introducimos  $2n_y$  condiciones de borde cinemáticas tanto corriente arriba como corriente abajo. En corriente arriba imponemos *pendiente nula según x* en cada tira de paneles

$$-\mu_i + \mu_{n_y+i} = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n_y ; \quad (10.16)$$

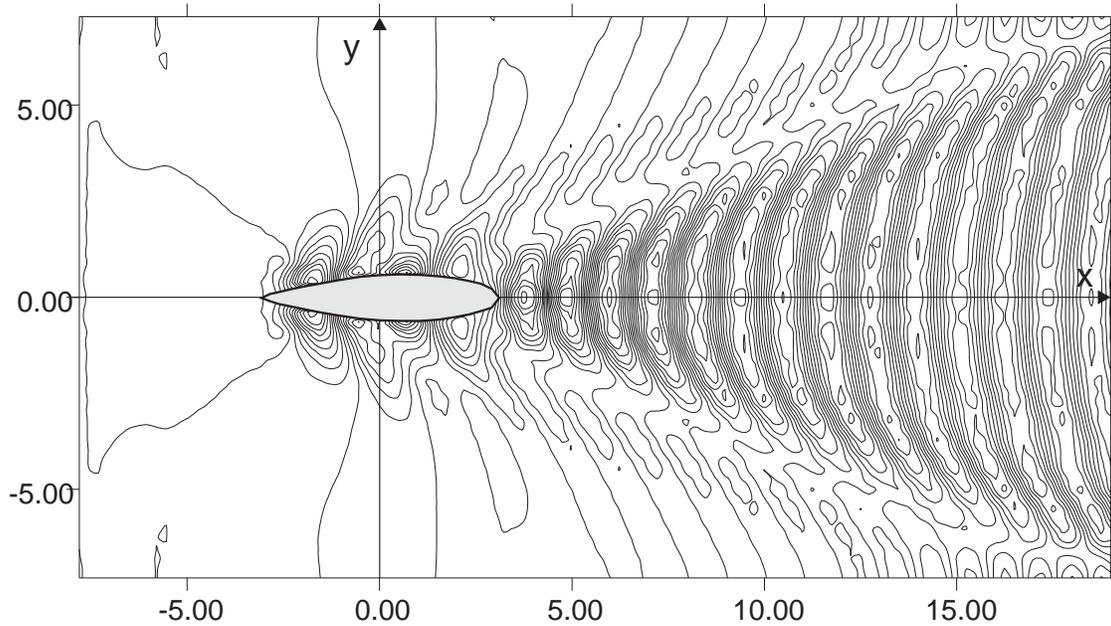


Figura 10.9: Iso-elevación a 7 nudos equivalentes del velero, por paneles/Fourier.

mientras que corriente abajo imponemos compatibilidad entre el potencial de ola y su expansión asintótica en cada tira de paneles, en la intersección entre la superficie libre y la pared vertical

$$-\frac{1}{2}\mu_{i-n_y} + \frac{3}{2}\mu_i - \sum_{j=n_p+n_b+1}^n \sum_{q=1}^{n_y/2} (\alpha_{qi}^* A_q + \beta_{qi}^* B_q + \gamma_{qi}^* C_q + \delta_{qi}^* D_q) = 0 \quad ; \quad (10.17)$$

para  $i - n_p + n_y = 1, 2, \dots, n_y$ , donde los coeficientes  $\alpha_{qi}^*$ ,  $\beta_{qi}^*$ ,  $\gamma_{qi}^*$  y  $\delta_{qi}^*$  son extrapolaciones de  $\alpha_{ijq}$ ,  $\beta_{ijq}$ ,  $\gamma_{ijq}$  y  $\delta_{ijq}$  a  $(x_w, y_i, 0)$ , y además hemos usado un esquema de extrapolación sobre las dos últimas capas de paneles, desde que los potenciales son evaluados en los centroides de los paneles. En esta forma cerramos el problema algebraico, desde que ahora tenemos  $N = n + 2n_y$  ecuaciones e incógnitas. Hay  $n$  paneles *activos*, como filas e incógnitas de la ecuación matricial y  $2n_y$  ecuaciones absorbentes, donde  $n_y \ll n$ .

## 10.7 Ejemplos Numéricos

### 10.7.1 Cilindro sumergido

Hemos considerado un cilindro circular sumergido en posición horizontal. La resistencia de ola analítica por unidad de profundidad transversal  $W_L$  es

$$W_L = \frac{4\pi^2 g^3 \rho R^4}{U^4} e^{-2gf/U^2} \quad (10.18)$$

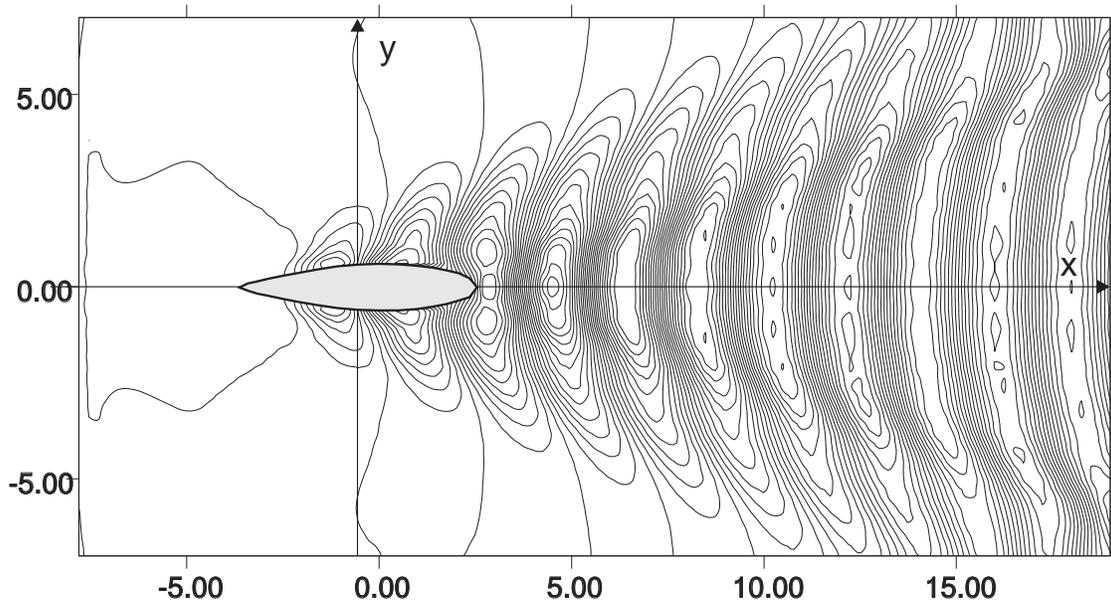


Figura 10.10: Iso-elevación a 9 nudos equivalentes del velero, por paneles/Fourier.

donde  $R$  es el radio del cilindro,  $f$  es la profundidad de su eje,  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $U$  es la velocidad no perturbada corriente arriba. En este caso el número de Froude representativo es definido como  $F = U/\sqrt{gf}$ . En la figura 10.2 mostramos el coeficiente de arrastre de ola analítico  $C_w$  en función del número de Froude  $F$  para  $R = 0.1$ ,  $f = 1$ ,  $g = 3$ , el cual lo comparamos con la solución numérica obtenida por el método de paneles extendido para dos mallados, i) la malla  $C_1$  con  $128 \times 3$  paneles sobre la superficie libre, y 128 paneles sobre el cilindro, ii) la malla  $C_2$  con  $512 \times 3$  paneles sobre la superficie libre y 128 paneles sobre el cilindro. Mientras que en la figura 10.3 mostramos el potencial de ola  $\phi_w \equiv \psi$  y el incremento de altura  $\eta$  como una función de la coordenada  $x$  paralela a la velocidad externa impuesta, donde podemos constatar que la altura de ola numérica no se amortigua apreciablemente hacia corriente abajo, es decir, que se verifica el ensayo de la altura de ola constante, introducido en el capítulo 2.

### 10.7.2 Esfera sumergida

Se trata de una esfera de radio  $R = 1$  sumergida a una profundidad de  $H = 2R$ , con respecto al centro de la esfera. El número de Froude está calculado con respecto a la profundidad,  $Fn = u/\sqrt{gH}$ , y la resistencia de ola  $F_x$  está adimensionalizada con el empuje  $W = \rho V$ , ver figura 10.4. Podemos observar que la curva de resistencia es muy suave, lo cual es característico de los cuerpos sumergidos, y se compara razonablemente bien con los resultados de Kim, reproducidos por Wehausen (fig.42, pág. 219). La curva

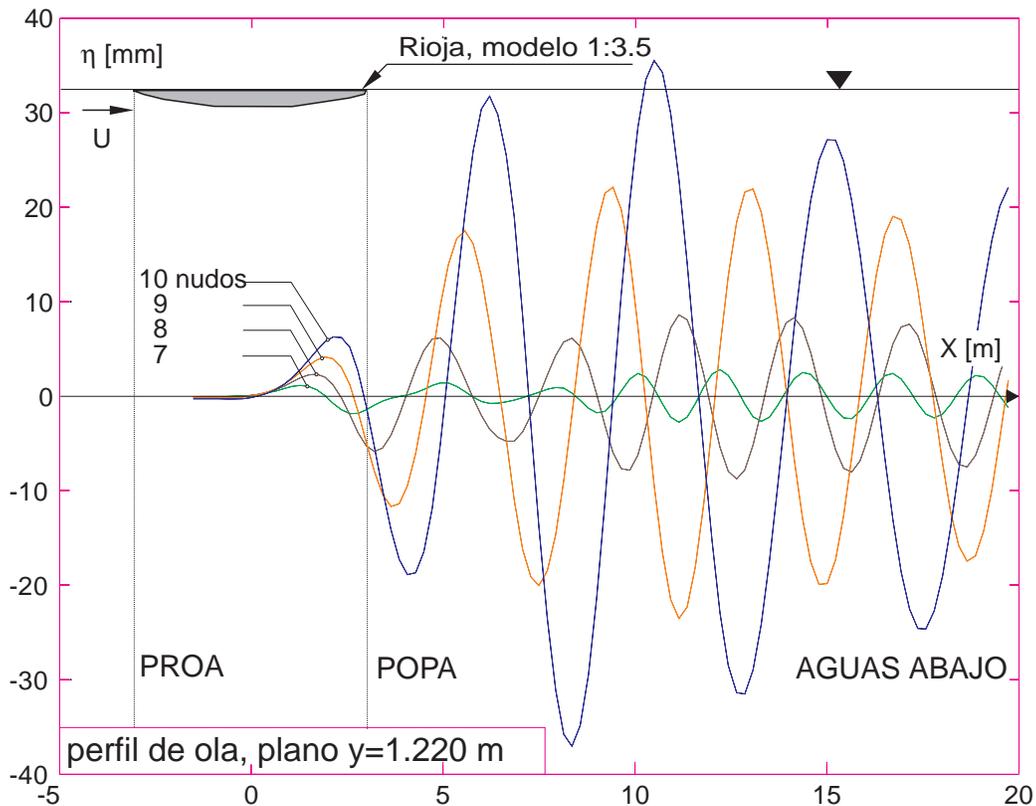


Figura 10.11: Perfiles de ola en [m] sobre el plano  $y = 1.22$  [m] paralelo al plano de crujía a 7, 8, 9 y 10 nudos equivalentes del velero, por paneles/Fourier.

presenta un máximo cerca de  $Fr = 0.9$ . El cálculo fue hecho con paneles y condición absorbente por Fourier. La malla de paneles consiste en 1216 paneles activos (plano y esfera) más 512 pasivos (pared vertical).

### 10.7.3 Casco Wigley

Para el casco Wigley (modelo 1805) A (eg. Ref. 9 and 11), hemos considerado dos mallas de paneles las cuales cubren: la superficie libre del flujo básico con  $60 \times 16 = 960$  cuadriláteros, el casco mojado con 319 triángulos y una pared vertical con  $16 \times 8 = 128$  cuadriláteros, de modo que son 1279 paneles activos, 16 tiras en manga, 32 modos de Fourier y 1311 incógnitas en total. La primera malla es suave (sobre la superficie libre) mientras que la segunda tiene un pequeño ruido en las coordenadas nodales dentro de una pequeña ventana centrada en el casco. El ruido lo hemos agregado con el propósito de estimar la sensibilidad del método a las mallas no estructuradas. En la figura 10.7 mostramos las curvas de resistencia de ola obtenidas con el método propuesto para 61 estados de velocidad. A la izquierda éstas han sido resaltadas con cruces, y están en

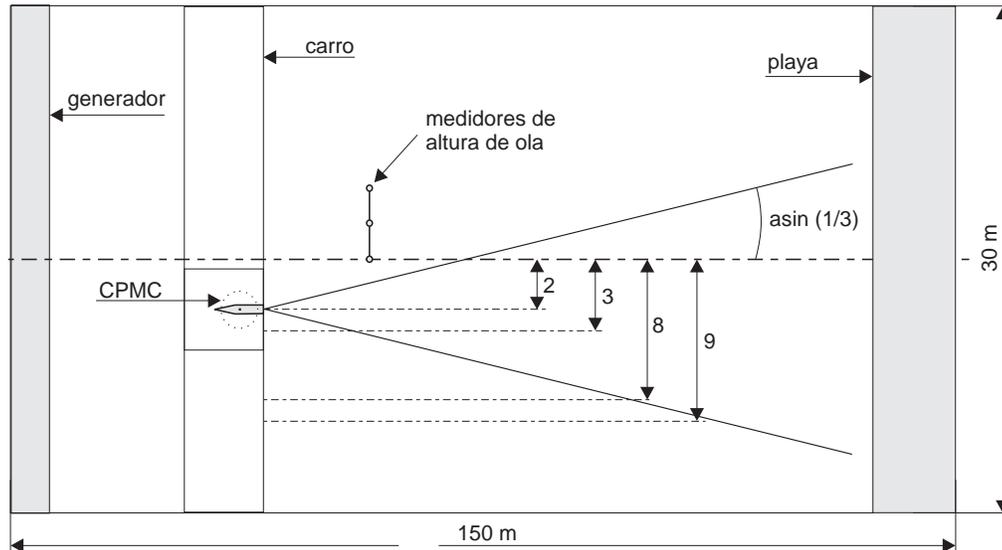


Figura 10.12: Esquema para la mediación en el canal.

buen acuerdo con los hallados en literatura (Wehausen, 1973), mientras que a la derecha hemos graficado ambas, donde la sensibilidad del método a la malla con ruido no es tan apreciable.

#### 10.7.4 Velero

Consideramos el casco de un velero sin apéndices, por medio de un modelo en escala reducida (1:3.5), ensayado en un canal de sección de 12.3 [m] por 6.5 [m], donde el modelo fue arrastrado desde su centro de su manga. El modelo no tiene ni quilla ni timón, su longitud a nivel de flotación es de 18.3 [m], un calado máximo de 0.9 [m] respecto a la línea de flotación de referencia. El único caso considerado es con el casco paralelo a la corriente media y trimado nulo, a las velocidades equivalentes del prototipo  $u_p$  entre  $7 \leq u_p \leq 10$  nudos. En la figura 10.8 mostramos la malla del casco sin apéndices. En la generación de la malla sobre el casco hemos empleado una interpolación de los datos con suavización mediante mínimos cuadrados, y nos ha bastado una única función interpolante para la mitad simétrica del casco definida por el plano de crujía. Sobre esta superficie suave descansan los nodos de la malla de paneles, siendo ésta una superficie poliedra con triángulos planos. La zona de generación singular, donde tienden a deformarse excesivamente los paneles obtenidos, la hemos ubicado en el fondo del casco, lo más alejado posible de la zona de empalmes con la superficie libre. Los paneles los hemos dispuesto en la forma más simétrica posible, en este caso, simetría con respecto al plano de crujía, de modo de

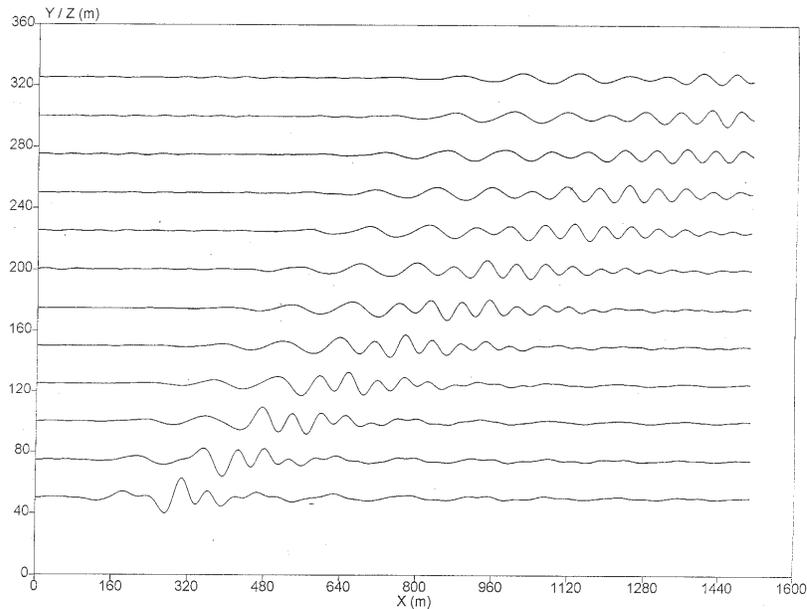


Figura 10.13: Perfiles de estela medidos cada 25 [m] en planos paralelos al de crujía, a 30 nudos.

reducir las componentes de fuerzas espúreas causadas por la discretización. En todos los casos, las submallas de paneles en la superficie libre son estructuradas, y contornean los bordes de la intersección de los cascos con el plano de equilibrio hidrostático. La malla de paneles cubre: la superficie libre del flujo básico con  $140 \times 24 = 3360$  cuadriláteros, la superficie mojada del casco 528 triángulos y una pared vertical con  $24 \times 24 = 576$  cuadriláteros, de modo que tenemos 3888 paneles activos,  $n_y = 24$  tiras en manga, 48 modos de Fourier y 3936 incógnitas. En las figuras 10.9 y 10.10, mostramos las isolíneas de elevación esperables a 7 y 9 nudos equivalentes del prototipo obtenidas por el método propuesto. Finalmente, en la figura 10.11 mostramos los perfiles de ola en [mm], según el plano  $y = 1.220$  [m] paralelo al plano de crujía (de simetría vertical-longitudinal del modelo) para cada una de las velocidades.

### 10.7.5 Ferry de transporte

Consideramos un ferry de transporte. Los ensayos de medición de alturas de olas a diferentes velocidades se realizaron en un modelo en escala reducida 1:25, construido en fibra de vidrio, donde se reprodujeron la cuña de popa, los skegs y los orificios de las hélices transversales de proa junto con sus rejillas. El modelo se lastró de modo de reproducir el desplazamiento, calado medio y trimado correspondiente al buque real. Las dimensiones principales del buque real y del modelo son las siguientes:

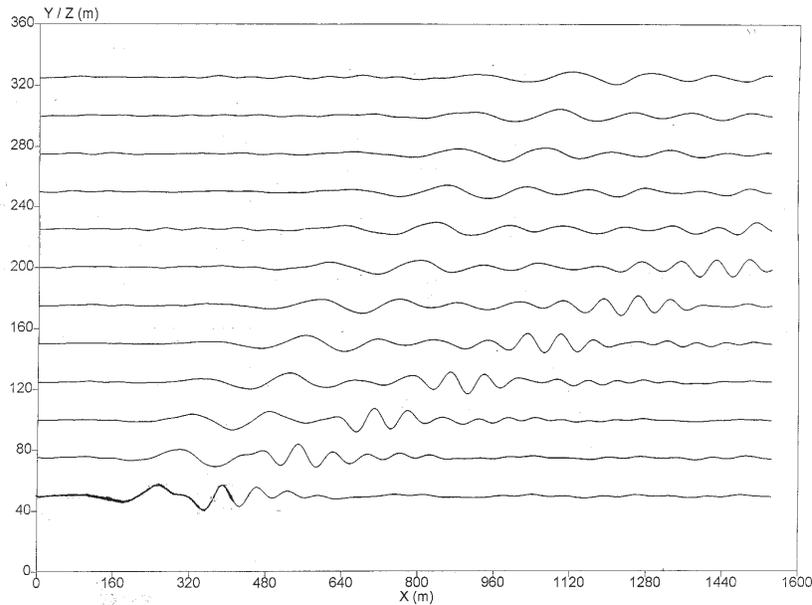


Figura 10.14: Perfiles de estela medidos cada 25 [m] en planos paralelos al de crujía, a 40 nudos.

Desplazamiento con apéndices [tnf-kgf]	1807.800	112.87
Eslora entre perpendiculares [m]	110.000	4.400
Manga de trazado [m]	14.696	0.588
Calado medio [m]	2.375	0.095
Asiento [m]	0.650	0.026

Los ensayos en olas se realizaron en el Canal de “Dinámica del Buque” del CEHIPAR, cuya vasija es de 150 x 30 x 5 [m], dispone de un CPMC (Computerized Planar Motion Carriage) para el arrastre y control del modelo. La profundidad del agua en los ensayos de oleaje fue de 5 [m], equivalentes a 125 [m] a escala real, por lo que se considera como aguas profundas, que es lo único que nos interesa aquí. El modelo fue remolcado por el carro en trayectorias rectilíneas mediante un sistema de remolque enganchado en el baricentro del modelo, tal que permitía los movimientos de desplazamiento vertical y de trimado dinámico. Las mediciones se efectuaron mediante tres sensores resistivos de elevación de la superficie del agua, situados en puntos fijos de la zona central del canal, para evitar las reflexiones en las paredes, en una misma línea transversal al canal separados por una distancia de 2 [m] entre si (equivalentes a 50 [m] a escala real). Para cada velocidad se hicieron cuatro pasadas a distancias de 2, 3, 8 y 9 [m] entre la crujía del modelo y el sensor más próximo, de este modo se midió la estela entre 50 y 325 [m] a escala real a

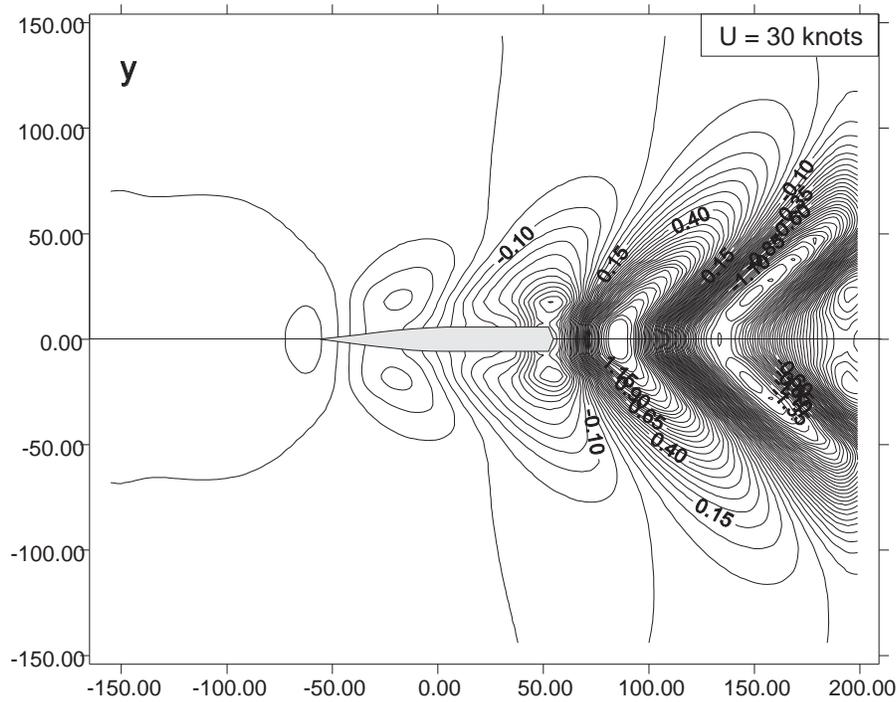


Figura 10.15: Iso elevación por paneles/Fourier a 30 nudos.

intervalos de 25 [m], en planos paralelos al de crujía. Las gráficas de los perfiles de estela medidos por los sensores cada 25 metros en planos paralelos al de crujía son mostradas en las figuras 10.13 y 10.14. Las superficies discretizadas comprenden: una porción finita del plano de equilibrio hidrostático, la superficie mojada hidrostática del casco, y una pared vertical aguas abajo de la nave. Los paneles son cuadriláteros tanto en el plano como en la pared vertical, y triangulares para el casco mojado de la nave. Para el mallado del casco se disponía de una cierta malla base inicial, proporcionada por el constructor, empero como no era adecuada para paneles/Fourier, se optó por generar una nueva en donde se tomaban secciones típicas (planos de cubierta y de crujía), e interpolaban curvas suaves por mínimos cuadrados, generalmente de tercer y de segundo grado y ocasionalmente de primer grado. En base a estas curvas suaves se generó una malla suavizada, en el sentido de que los nodos de la superficie poliédrica de caras planas que la definen, descansan sobre una superficie de interpolación suave. Esta exigencia de suavidad en la posición de los nodos de la malla, es un detalle a los efectos de un mejor cálculo del coeficiente de presión sobre la superficie mojada del casco, y por ende de la resistencia de ola. Así, en las figuras 10.15 y 10.16 mostramos las isolíneas de elevación del agua a 30 y 40 nudos, respectivamente, donde las porciones de superficie libre mostradas han sido cubiertas con paneles. Una vez hallada la solución en ese dominio más reducido, podemos conocer el patrón de olas aguas abajo y

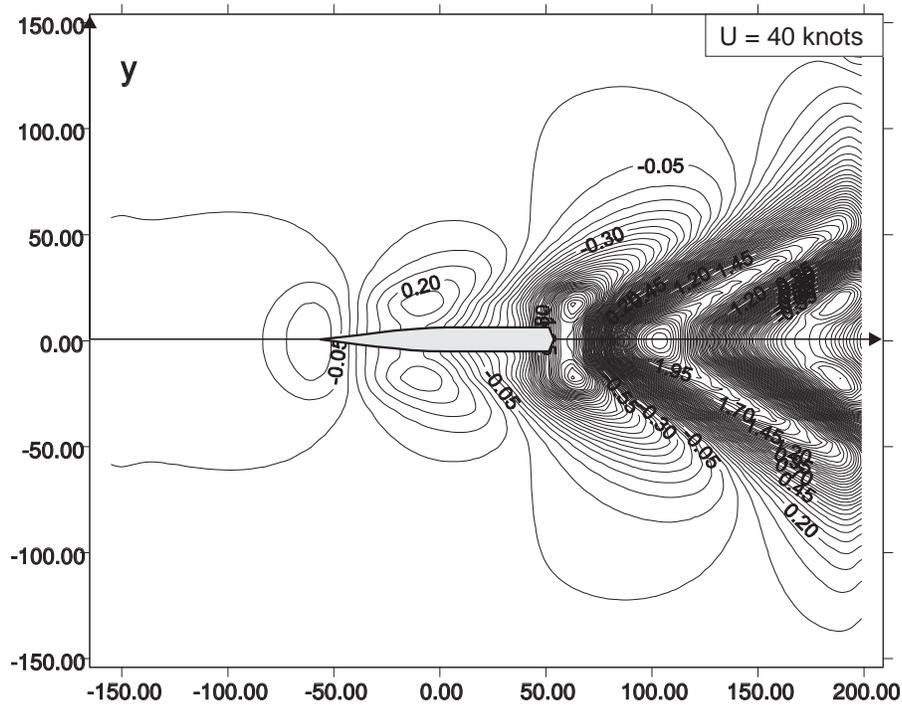


Figura 10.16: Iso elevación por paneles/Fourier a 40 nudos.

detrás de la pared vertical, mediante un cálculo de pos-procesamiento, en el sentido de que el dato inicial es el potencial y su derivada halladas por paneles/Fourier en dicha pared, luego en base a dichos valores nos vamos propagando corriente abajo detrás de la pared mediante la solución asintótica y la relación de dispersión, donde ésta última nos vincula los números de onda en la superficie libre y el factor de atenuación en profundidad. En las figuras 10.17 y 10.18, mostramos los perfiles de estela calculados numéricamente según las mismas líneas de medición en el canal de experiencias hidrodinámicas, las cuales se comparan razonablemente bien con gráficas filtradas y suavizadas de las mediciones de los sensores. Notemos que en el cómputo numérico de pos-procesamiento nos hemos podido alejar a una distancia de unas 15 esloras hacia corriente abajo de la nave, y de unas 3 esloras hacia sus costados, con una razonable calidad en las estimaciones de los perfiles, y a un costo de cómputo notoriamente menor que si hubiéramos optado por una estrategia directa (y clásica) de cubrir esa superficie con paneles. En las figuras 10.19 y 10.20, mostramos las correspondientes vista 3D de las estelas generadas por el ferry de transporte aguas abajo de la pared vertical obtenidas por pos-procesamiento.

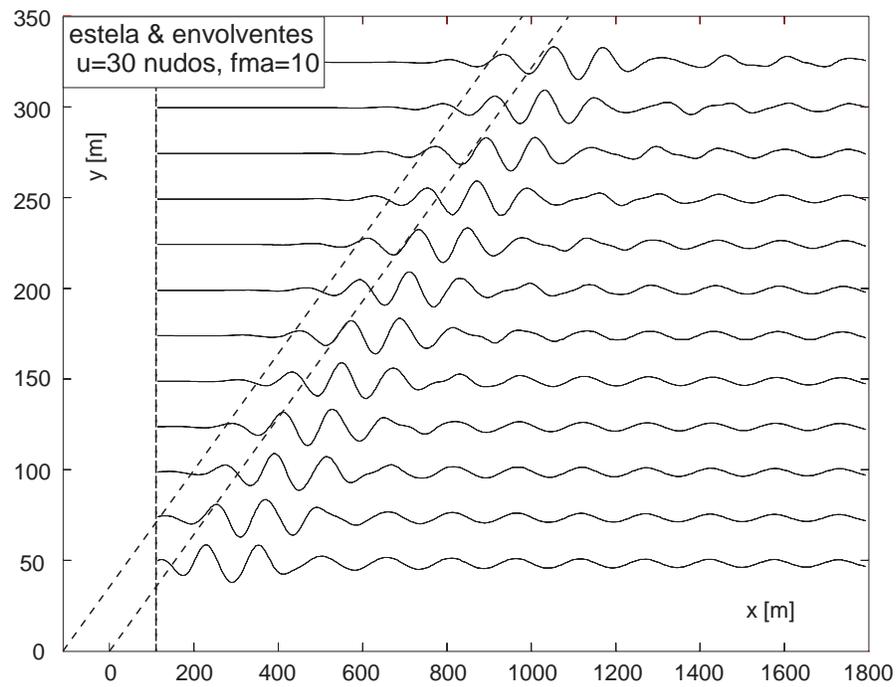


Figura 10.17: Perfiles de estela a 30 nudos obtenidos por pos-procesamiento.

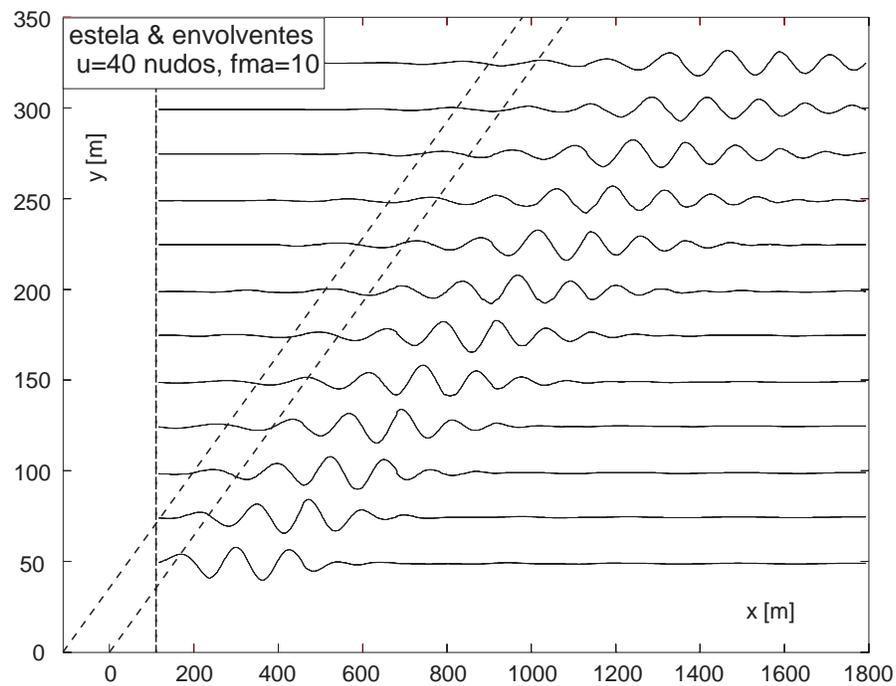


Figura 10.18: Perfiles de estela a 40 nudos obtenidos por pos-procesamiento.

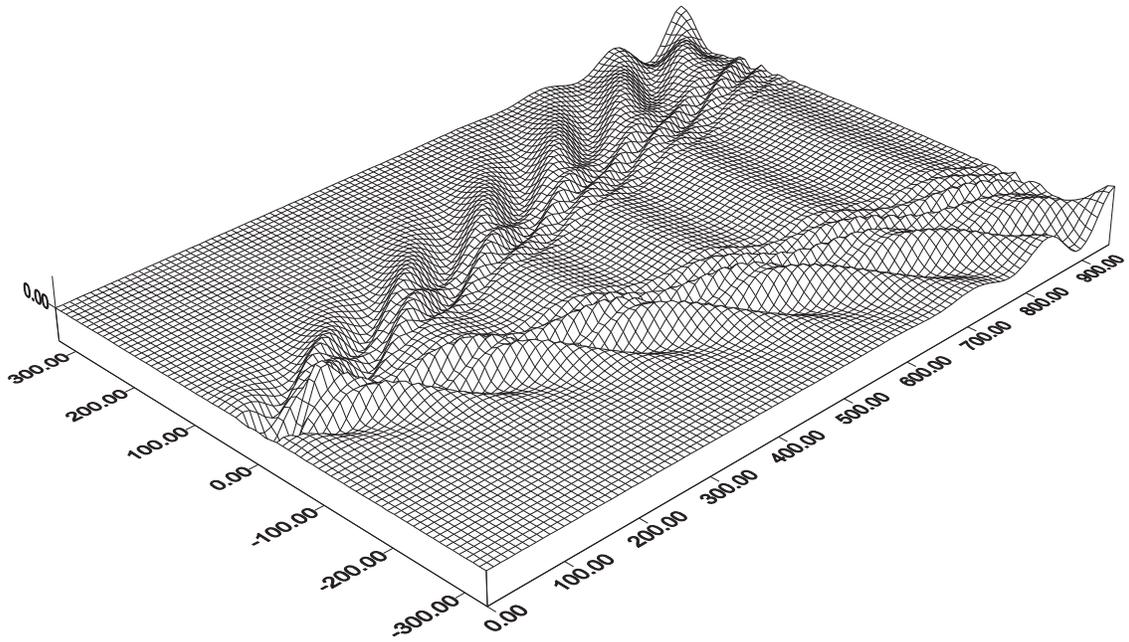


Figura 10.19: Vista 3D de la estela del ferry a 30 nudos hasta 15 esloras corriente abajo.

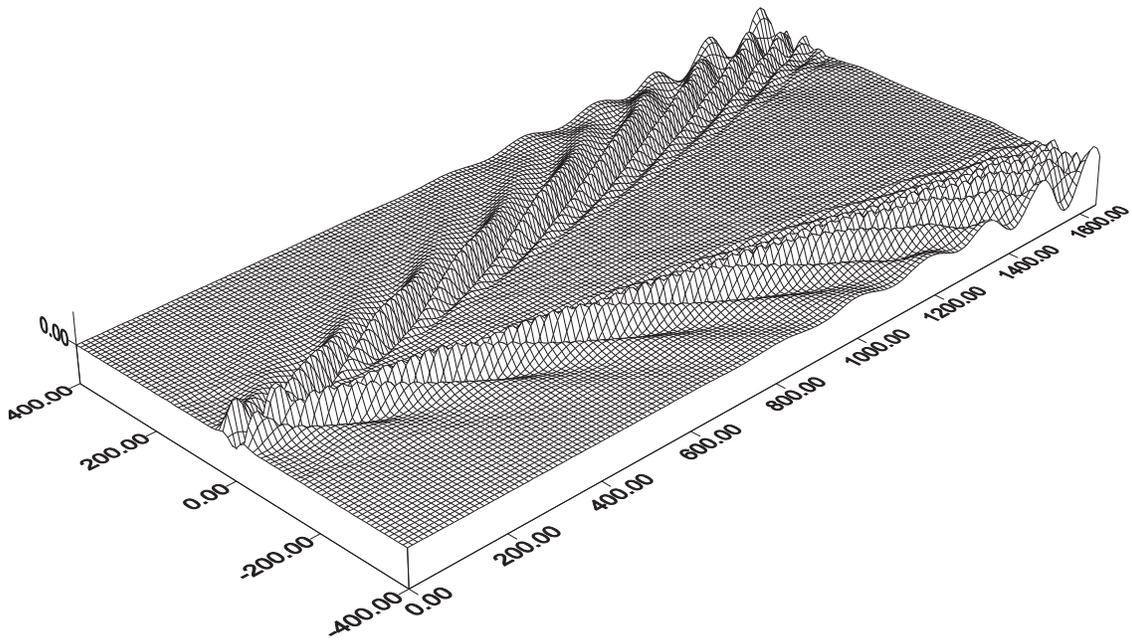


Figura 10.20: Vista 3D de la estela del ferry a 40 nudos hasta 15 esloras corriente abajo.

# Capítulo 11

## Epílogo

Los desarrollos originales más destacables son: iginales más destacables son:

- *Condición de frontera absorbente Discreta No-local (DNL)*: es un procedimiento general que permite introducir el sentido de propagación con sentido físico para el patrón de olas generado por una nave emergida/sumergida. Matemáticamente se traduce en eliminar los “modos hiperbólicos” corriente arriba y retener los “modos elípticos” corriente abajo. De esa forma se asegura la propagación de olas desde la fuente de perturbación (la nave) hacia corriente abajo. Este procedimiento i) *es general* con prescindencia del método numérico empleado en el problema discreto (por ejemplo, diferencias o elementos finitas, paneles), ii) *evita la estrategia de los esquemas con difusividad numérica equivalente* (o derivadas contra-corriente). Introducido en los cap. 5, 9 y 10.
- *Cálculo de la resistencia de ola en función de la amplitud de ola lejana*: exhibe la nítida ventaja de entregar valores *siempre positivos*. Esto contrasta con una integración directa de la presión sobre la superficie mojada de la nave, la cual no muestra esta propiedad para Froude muy pequeños, defecto bastante conocido en literatura, como lo menciona Raven (1996) en su análisis del método de Dawson.

Mientras que en un segundo plano podemos ubicar:

- *Condición de superficie libre linealizada* para el problema de flujo perturbado a partir del problema del *flujo básico* donde la superficie libre es el *plano de equilibrio hidrostático*. Su mérito es que conduce a un operador definido positivo, de modo que su implementación por elementos finitos, con ciertas precauciones en los extremos corriente arriba y abajo, conduce a una matriz simétrica y banda. Introducido en el cap. 4.
- *El ensayo de altura de ola constante*: reconocerlo como un ensayo de validación para los métodos numéricos en el problema de resistencia de ola. Introducido en el cap. 2.
- *Planteamiento incompleto de la formulación potencial* (en el sentido de Birkhoof): el sistema de ecuaciones con flujo potencial y sin condiciones explícitas de radiación (a nivel

del continuo) no captura el sentido de propagación de las olas con significado físico. Para superarlo reconocemos al menos dos estrategias generales: mediante esquemas difusivos tipo cuasi-Dawson o por condiciones absorbentes. Discutido en el cap. 3.

- *Resistencia de ola negativa*: hemos dado una justificación cuando se la obtiene por integración de la presión sobre la superficie mojada del casco y para Froude muy bajos. Este efecto espúreo es frecuentemente informado en literatura, pero incompletamente atribuido a la omisión de términos no lineales. Discutido en el cap. 9.

- *Esquema de Newton-Raphson para las ecuaciones del continuo y luego su discretización*: exhibe al menos dos ventajas. Primero, la formulación resulta mucho más simple que a la inversa. Segundo, el número de incógnitas en sistema de Newton Raphson “discreto” se duplica en la superficie libre, porque se calculan simultáneamente tanto los potenciales como las alturas, mientras que “en el continuo” es simplemente el número de elementos, porque las alturas es un cálculo diferido. Como el número de elementos sobre la superficie suele ser mucho mayor que el del la nave, la variante “en el continuo” permite un significativo ahorro en los recursos computacionales. Desarrollado en el cap. 8.

- *Cómputo debilitado del coeficiente de presión*: apto en particular para paneles y mallas no estructuradas, superando la degradación de su forma fuerte, mencionada en la tesis de Maître (1988). Desarrollado en el cap. 7.

- *Integración analítica de las matrices de influencia dipolar y monopolar*: específico en el método de elementos de borde/paneles 3D, aunque sigue cercanamente la propuesta de Medina/Liggett (1988). Su ventaja evita introducir un error de consistencia inicial en el problema numérico, más o menos pronunciado. Desarrollado en el cap. 7.

Finalmente, como problemas abiertos mencionamos los siguientes:

- *Interacción viscosa/invíscida*: para completitud de un código orientado a hidrodinámica naval, debería acoplarse un cálculo de la capa límite a la solución invíscida, en particular cuando el Froude es muy reducido o cuando los efectos viscosos resultan preponderantes.

- *Extensión de las condiciones absorbentes a mallas 3D completamente generales*.

- *Condición de superficie libre linealizada* para el flujo perturbado cuando en el flujo básico la superficie libre no coincide con el plano de equilibrio hidrostático.

- *Efectos hidrodinámicos de segundo orden*: en particular cálculo de eventuales fuerzas de sustentación, de arrastre inducido, y de interferencia hidrodinámicas, ocasionadas por superficies con aptitud portante, por ejemplo, en quillas relativamente altas.

# Apéndice A

## Notación y nomenclatura

### Letras griegas:

$\Phi = \mathbf{u}_{\infty}^T \mathbf{x} + \phi$	= potencial total
$\phi$	= potencial de perturbación
$\mu$	= densidad bipolar (salto pot.)
$\sigma$	= densidad monopolar (flujo)
$\psi, \eta$	= potencial de ola y altura de ola
$\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}$	= vectores bipolar y monopolar
$\Gamma$	= superficie de borde
$\Omega$	= volumen de flujo
$\rho$	= densidad del fluido

### Letras latinas:

$\text{Fn} = U/\sqrt{gL}$	= número de Froude
$\text{Rn} = UL/\nu$	= número de Reynolds
$U$	= rapidez no perturbada
$L, B, H$	= eslora, manga y calado
$F_w$	= fuerza de resistencia de ola
$C_w$	= coeficiente de resistencia de ola
$\mathbf{A}, \mathbf{C}$	= matrices bipolar y monopolar
$\mathbf{D}$	= matriz de superficie
$\mathbf{H}$	= matriz del sistema
$\mathbf{b}$	= vector fuente del sistema lineal
$n$	= número de paneles activos
$n_y$	= número de tiras en manga
$N$	= número de incógnitas
$\mathbf{n}$	= versor normal

$\mathbf{t}$	= versor tangencial
$K = g/U^2$	= número de onda
$k_x, k_y$	= número de onda plano
$k_z$	= atenuación en calado
$p$	= presión hidrostática
$g$	= aceleración de la gravedad

**Supraíndices:**

0	= flujo potencial básico
1	= flujo potencial perturbado

**Subíndices:**

0	= flujo potencial básico
$\infty$	= condiciones no perturbadas

# Bibliografía

- [1] Abraham L.H., *Aeronautics*, en *Handbook of Fluid Dynamics*, Baumeister T., Marks L.S. (edt.), pág. 11-76 a 11-111, McGraw-Hill, 1967.
- [2] Alessandrini B., Delhommeau G., “Simulation of three-dimensional unsteady viscous free surface flow around a ship model”, *Int. Jour. for Num. Meth. in Fluids*, vol. 19, pág. 321-342 (1994).
- [3] Ashley H., Landahl M., *Aerodynamics of Wings and Bodies*, Dover Inc., New York, 1965.
- [4] Axelsson O., Barker V.A., *Finite Element Solution of Boundary Value Problems*, Academic Press, 1984.
- [5] Baba E., Hara M., “Numerical evaluation of a wave-resistance theory for slow ships”, pág. 17-29, copia de comunicación.
- [6] Batchelor G.K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 2da edición, 1974.
- [7] Banerjee P.K., Butterfield R., *Developments in Boundary Element Methods-1*, Applied Science Publishers, 1979.
- [8] Bathe K.J., Wilson E.L., *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice Hall, Inc., 1976.
- [9] Birkhoof G., *Hydrodynamics*, Greenwood Press Publishers , 2da edición, 1978.
- [10] Bollay W., *Air Resistance of Trains, Automobiles and Ships*, en *Handbook of Fluid Dynamics*, Baumeister T., Marks L.S. (edt.), pág. 11-74 a 11-75, McGraw-Hill, 1967.
- [11] Brebbia C.A. (edt.), *Topics in Boundary Elements Research*, Vol. 1,2,3,5. Springer Verlag, 1984.

- [12] Broeze J., Romate J.E., “Absorbing boundary conditions for free surface wave simulations with a panel method”, *Jour. Comp. Physics*, vol. 99, pág. 146-158 (1992).
- [13] Bourianoff G.I., Penumalli B.R., “Numerical simulation of ship motion by Eulerian hydrodynamic techniques”, pág. 358-370, copia de comunicación.
- [14] Chang M.S., “Computations of three-dimensional ship-motions with forward speed”, pág. 124-125, copia de comunicación.
- [15] Chang M.S., “Finites difference simulation of the planar motion of a ship”, pág. 39-47, copia de comunicación.
- [16] Chapman R.B., “Survey of numerical solutions for ship free-surface problems”, pág. 5-16, copia de comunicación.
- [17] Ching-Yeh Hsin, *Development and Analysis of Panel Methods for Propellers in Unsteady Flow*, Informe 91-1, Massachusetts Institute of Technology, Departament of Ocean Engineering, 1991.
- [18] Daube O., Dulieu A. “A numerical approach of the nonlinear wave resistance problem”, pág. 73-80, copia de comunicación.
- [19] Dawson C.W., “A practical computer method for solving ship-wave problems”, en *Proceedings 2nd International Conference on Numerical Ships Hydrodynamics*, Berkeley, CA., pág. 30-38 (1977).
- [20] Dongarra J.J., Duff I.S., Sorensen D.C., van der Vorst H.A., *Solving Linear Systems on Vector and Shared Memory Computers*, SIAM, 2da edición, 1993.
- [21] Euvrard D., “A short review of mathematics and numerical methods in transient ship hydrodynamics”, pág. 151-162, copia de comunicación.
- [22] Farmer J., Martinelli L., Jameson A., “Fast multigrid method for solving incompressible hydrodynamics problems with a free surface”, *AIAA Journal*, pág. 1175-1182, vol. 32, nro 6, Junio (1994).
- [23] Gennaretti M., Morino L., “A boundary element method for the potential, compressible aerodynamics of bodies in arbitrary motion”, *AIAA Journal*, pág. 15-19, vol. 96 (1992).
- [24] Golub G.H., Van Loan C., *Matrix Computation*, 2nd. edition, The John Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1993.

- [25] Guevel P., Delhommeau G., Cordonnier J.P., “Numerical solution of the Neumann-Kelvin problem by the method of singularities”, pág. 107-108, copia de comunicación.
- [26] Hackbusch W., Sauter S.A., “On the efficient use of the Galerkin method to solve Fredholm integral equations”, Bericht Nr. 92-18, Kiel-Germany, *Applications of Mathematics* vol. 38, nro 4-5, pág. 301-322 (1993).
- [27] Hirsch C., *Numerical Computation of Internal and External Flows*, John Wiley & Sons Inc., 1992.
- [28] Hunt B. (edt.), *Numerical Methods in Applied Fluid Dynamics*, Academic Press, 1980.
- [29] Israeli M., Orszag S.A., “Approximation of radiation boundary conditions”, *Jour. Comp. Physics*, vol. 41, 115-135 (1981).
- [30] Jaswon M.A., *A Review of the Theory*, en *Topics in Boundary Elements Research*, Brebbia C.A. (edt.), vol. 1. Springer Verlag, 1984.
- [31] Karageorghis A., “The method of fundamental solutions for the solution of steady-state free boundary problems”, *Jour. Comp. Physics*, vol. 98, pág. 119-128 (1992).
- [32] Katz J., Plotkin A., *Low-Speed Aerodynamics, from Wing Theory to Panel Methods*, McGraw-Hill, Inc., 1991.
- [33] Korving C., “A numerical method for the wave resistance of a moving pressure distribution on the free surface”, *7th Int. Conf. on Num. Meth. in Fluid Dynam.*, pág. 224-259, Stanford (1980).
- [34] Korving C., Hermans A.J., “The wave resistance for flow problems with a free surface”, pág. 285-291, copia de comunicación.
- [35] Landweber L., *Motion of Immersed and Flotanting Bodies*, en *Handbook of Fluid Dynamics*, Streeter V.L. (edt.), McGraw-Hill, 1961.
- [36] Lamb H., *Hydrodynamcis*, Dover Inc., New York, 1945.
- [37] Larsons L., “A method for resistance and flow prediction in ship design”, *Annual Meeting of the Society of Naval Architects and Marine Engineers*, San Francisco, California, pág. 16-1/16-37, October 31/November 3 (1990).

- [38] Larsons L., Broberg L., Kim K.J., Zhang D.H., “New viscous and inviscid CFD techniques for ship flow”, *5th International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics*, Hiroshima, pág. 1-25, Sept. (1989).
- [39] Liggett J.A., “Free surface flow - exposing the hidden nonlinearity”, *Comm. in Appl. Num. Meth.*, vol. 4, pág. 509-516 (1988).
- [40] Liggett J.A., “Exact-formulae for areas, volumes and moments of polygons and polyhedra”, *Comm. in Appl. Num. Meth.*, vol. 4, pág. 815-820 (1988).
- [41] Liu H., Ikehata M., “Computation of free surface waves around an arbitrary body by a Navier-Stokes solver using the pseudocompressibility technique”, *Int. Jour. for Num. Meth. in Engin.*, vol. 19, pág. 395-413 (1994).
- [42] Lugt H.J., “Numerical modelling of vortex flows in ship hydrodynamics: a review”, pág. 297-316, copia de comunicación.
- [43] Maître T., *Modelisation de l'écoulement autour d'une hélice marine par la méthode du potentiel*, Tesis Doctoral, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1988.
- [44] Mandelli A., *Elementos de Arquitectura Naval*, Edit. Alsina, Buenos Aires, 1986.
- [45] Medina D.E., Liggett J.A., “Three-dimensional boundary element computation of potential flow in fractured rock”, *Int. Jour. for Num. Meth. in Engin.*, vol. 26, pág. 2319-2330 (1988).
- [46] Mikhlin S.G., *Mathematical Physics, An Advanced Course*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, London, 1970.
- [47] Miloh T. (edt.), *Mathematical Approaches in Hydrodynamics*, SIAM, 1991.
- [48] Morino L., Kuo C.C., “Subsonic potential aerodynamics for complex configurations: a general theory”, *AIAA Journal*, pág. 191-197, vol. 12 (1974).
- [49] Morino L. (edt.), *Computational Methods in Potential Aerodynamics*, Springer-Verlag, 1985.
- [50] Mracek C.P., Kim M.J., Mook D.T., “Three-dimensional potential flows by a vorticity-panel method”, *Computer Fluids*, vol. 21, nro 1, pág. 31-42 (1992).
- [51] Newman J.N., *The Theory of Ship Motions*, en *Advances in Applied Mechanics*, vol. 18, pág. 221-283, 1978.

- [52] Nichols B.D., Hirt C.W., "Nonlinear hydrodynamics forces on floating bodies", pág. 382-394, copia de comunicación.
- [53] Ogilvie T.F., *Singular-Perturbations Problems in Ships Hydrodynamics*, en *Advances in Applied Mechanics*, vol. 17, pág. 91-188, 1977.
- [54] Ohring S., "Three dimensional ship wave generation using an efficient finite difference scheme with double model linearization", *Jour. Comp. Physics*, vol. 41, pág. 89-114 (1981).
- [55] Ohring S., Telste J., "Numerical solutions of transiente three-dimensional ship-wave problems", pág. 88-103, copia de comunicación.
- [56] Oomen A., "Free-surface potential flow computation using a finite element method", pág. 27-52, copia de comunicación.
- [57] Pellone C., *Calcul de l'écoulement autour des structures minces par la méthode des singularités*, Tesis Doctoral, Institut Natioanl Polytechnique de Grenoble, 1985.
- [58] Pot G., Jami A., "Some numerical results in 3-D transient linear naval hydrodynamics", *Journal of Ship Research*, vol. 35, nro 4, pág. 295-303, Diciembre (1991).
- [59] Power H., Wrobel L.C., *Boundary Integral Methods in Fluid Mechanics*, Computational Mechanics Publications, 1995.
- [60] *PMARC (Panel Method Ames Research Center)*, NASA Ames Research Center, Users Guide, 1989.
- [61] Raven H.C., *A Solution Method for the Nonlinear Ship Wave Resistance Problem*, Thesis Doctoral, Maritime Research Institute Netherlands (MARIN), 1996.
- [62] Richarson T., Katz J.C., Ashby D.L., "Unsteady panel method for flows with multiple bodies moving along various paths", *AIAA Journal*, pág. 62-68, vol. 32 (1994).
- [63] Romate J.E., "Absorbing boundary conditions for free surface waves", *Jour. Comp. Physics* vol. 99, pág. 135-145 (1992).
- [64] Segerlind L., *Applied Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons Inc., 1983.
- [65] Smirnov H., *A Course of High Mathematics* (t. 4: *Integral Equations and Partial Differential Equations*), Pergamon Press, London, 1964.

- [66] Schmitt H., Schneider G.R., *Calculation of the Potential Flow with Consideration of the Boundary Layer*, en *Topics in Boundary Elements Research*, Brebbia C.A. (edt.), vol. 5. Springer Verlag, 1989.
- [67] Stoker J.J., *Water Waves*, Interscience Publishers, Inc., New York, 1957.
- [68] Stratton J.A., *Electromagnetic Theory*, Mc. Graw-Hill Book Co., 1941.
- [69] Streeter V.L. (edt.), *Handbook of Fluid Dynamics*, McGraw-Hill, 1961.
- [70] Tahara Y., Stern F., Rosen B., “An interactive approach for calculating ship boundary layers and wakes for nonzero Froude number”, *Journal of Comp. Physics*, vol. 98, pág. 33-53 (1992).
- [71] Tuck E.O., “The effect of non-linearity at the free surface on flow past a submerged cylinder”, *J. Fluid Mech.*, vol. 22, parte 2, pág. 401-414 (1965).
- [72] van Dyke M., *Perturbation Methods on Fluid Mechanics*, The Parabolic Press, Stanford, 1975.
- [73] Vladimirov V.S., *Equations of Mathematical Physics*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1971.
- [74] von Kerczek C., Salvasen N., “Nonlinear free-surfaces effects-the dependence on Froude number”, pág. 292-300, copia de comunicación.
- [75] Wehausen J.V., *The Wave Resistance of Ships*, en *Advances in Applied Mechanics*, vol. 13, pág. 93-245, 1973.
- [76] West G.L., *Marine Engineering*, in *Handbook of Fluid Dynamics*, Baumeister T., Marks L.S. (edt.), pág. 11-45 a 11-68, McGraw-Hill, 1967.
- [77] Wu T.M., “Hydrodynamics loadings acting on submerged bodies advancing in waves: an assessment of accuracy”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 13, pág. 21-33 (1994).
- [78] Yen S.M., Lee K.D., Akai T.J., “Finite-element and finite difference solutions of nonlinear free surface wave problems”, pág. 305-318, copia de comunicación.
- [79] Yen S.M., Hall D.R., “Implementation of open boundary conditions for nonlinear free-surface wave problems”, pág. 163-176, copia de comunicación.
- [80] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., *The Finite Element Method*, 4ta edición, Mc Graw Hill Co., 1989.