

INESTABILIDAD DE ARCOS CON SECCIÓN DE PAREDES DELGADAS DEFORMABLES POR CORTE. PARADIGMAS DE CÁLCULO

Marcelo T. Piovan^{*}, Víctor H. Cortínez^{*} y Martín Saravia^{*}

^{*} Grupo Análisis de Sistemas Mecánicos
Universidad Tecnológica Nacional- FRBB,
11 de Abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina
e-mail: mpiovan@frbb.utn.edu.ar, web page: <http://www.frbb.utn.edu.ar>

Key words: Vigas curvas de paredes delgadas. Rotaciones finitas semitangenciales. Inestabilidad.

Abstract. *En este artículo se desarrolla una teoría para analizar el problema de inestabilidad en arcos isótropos con secciones de paredes delgadas. Se discute el estado del arte para enfocar el problema sobre la base de una teoría de arcos de paredes delgadas deformables por corte. El esquema básico de la teoría introduce términos no-lineales adicionales (comúnmente despreciados) en la formulación de trabajos virtuales de vigas curvas desarrollada previamente por los autores para vigas curvas. Estos términos como se verá son fundamentales para reproducir adecuadamente el estado previo al pandeo y calcular con precisión las cargas críticas. Las componentes no-lineales de la teoría corresponden a las rotaciones finitas semitangenciales introducidas por Argyris. Se presenta un elemento finito acorde con la teoría para evaluar distintas situaciones y se efectúa un análisis comparativo con resultados de extensos modelos computacionales de elementos finitos bidimensionales y tridimensionales como forma de validar el criterio de modelación de arcos empleado en este artículo.*

1 INTRODUCCION

El estudio de la inestabilidad elástica de vigas curvas con sección de paredes delgadas, ha estimulado la atención de la comunidad tecnológica durante por lo menos los últimos veinte años. Desde la revisión al problema de inestabilidad elástica efectuada por Yoo y Pfeiffer^[1] en los incipientes ochenta, se han presentado no menos de cuarenta artículos referidos a este particular. En tales artículos, fueron introducidas nuevas teorías de inestabilidad de arcos donde se han puesto de manifiesto las formas de pandeo típicas de un arco solicitado en su plano, las cuales pueden ser por desplazamiento lateral o por torsión fuera del plano. Sin embargo se han generado grandes discrepancias entre las distintas teorías en cuanto a la forma de pandeo de los arcos sometidos a momentos en los extremos o cargas radiales distribuidas es decir bajo compresión uniforme. Distintos juicios y criterios se han adoptado para simplificar la complejidad en la deducción de las ecuaciones de equilibrio.

A partir de la discusión de Yoo y Pfeiffer, Yang y Kuo^[2,3,4] presentaron una teoría de estabilidad de vigas curvas bisimétricas con secciones abiertas de paredes delgadas, considerando efectos de curvatura y desarrollando paralelamente un elemento finito de viga recta de clase $C^{(1)}$ para el análisis de vigas curvas como un entramado plano. Sin embargo estos autores solo contemplaron las deformaciones de segundo orden originadas por un campo de desplazamientos lineal. Kang y Yoo^[5] extendieron las ideas de los anteriores autores, añadiendo unos términos no lineales en el campo de desplazamientos, el cual fue deducido para verificar las hipótesis de indeformabilidad en el plano seccional. Chang y colaboradores^[6] presentaron soluciones numéricas al problema de inestabilidad de arcos empleando elementos finitos de viga recta deformable por corte. Gendy y Saleeb^[7] desarrollaron un modelo de viga curva deformable por corte considerando una formulación cinemática no lineal basada en la expansión cuadrática del tensor de rotaciones de Rodríguez. Recientemente, Kim y colaboradores^[8] desarrollaron un modelo de viga curva no deformable por corte con secciones abiertas monosimétricas, considerando un campo de desplazamientos no lineales basado en las rotaciones finitas semitangenciales introducidas por Argyris^[9]. Por otro lado Hu y colaboradores^[10] desarrollaron una teoría de inestabilidad para vigas curvas deformables por corte involucrando desplazamientos no lineales cuyas rotaciones se basan en el vector de Rodríguez. Sin embargo, estos últimos autores restringieron el modelo estrictamente para secciones abiertas de perfil H.

La mayoría de estos modelos y teorías ha tenido determinado éxito para evaluar las cargas los momentos críticos aplicados en los en los extremos o bien para hallar las cargas críticas bajo carga radial uniforme. Sin embargo, los autores consideran que estados más complejos de carga y por lo pronto más reales, no se pueden tratar con estos modelos puesto que no contemplan el efecto que producen los desplazamientos no lineales sobre las cargas externas no actuantes en el centro de referencia. El aporte de estos términos en el funcional energético o en la expresión del principio de trabajos virtuales, es fundamental para la correcta determinación de las cargas críticas por vuelco lateral en las vigas curvas.

En el presente trabajo se introducen los mencionados términos no lineales a una teoría de vigas curvas deformables por corte para secciones arbitrarias previamente desarrollada por los autores. El presente modelo contempla un campo de desplazamientos no lineal sustentado con

rotaciones finitas semitangenciales. Se desarrolla la teoría de inestabilidad contemplando aquellos efectos y se introduce un elemento finito isoparamétrico de viga curva para analizar exclusivamente problemas donde la carga no se aplica en el centro de referencia. En tal análisis se pone especial énfasis en mostrar que la reducción al centro de referencia de cargas actuantes fuera de la línea de centros conduce a errores al ser contrastada con la formulación que se emplea en este trabajo, a la luz de comparaciones con extensos modelos de elementos finitos bidimensionales y tridimensionales, los cuales sirven de validación al modelo planteado.

2 DESARROLLO TEORICO

Se considera una viga curvada en el plano, con sección genérica de paredes delgadas como la expuesta en Figura 1. En ella se pueden apreciar los dos sistemas de referencia cartesianos y dextrógiros, que se emplean. El sistema de referencia $\{C: \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$, es el principal y sobre el mismo se mide la mecánica global de la viga. El sistema de referencia secundario $\{A: \hat{x}, \hat{s}, \hat{n}\}$ es solidario a la línea media del perfil seccional y, en el mismo se evalúan las características propias de la sección transversal. Las coordenadas (s, n) son tangente y normal a la línea media, respectivamente, tal como se puede apreciar en la Figura 2. En la Figura 2.a se muestra el perfil de una sección genérica de paredes delgadas, donde se disponen las entidades geométricas que permiten definir la cinemática de la sección y por ende de la viga. En tanto que en la Figura 2.b se muestra la manera en que se idealiza la sección, como si se tratara de una sucesión de segmentos indefinidamente pequeños, cada uno de los cuales responde al comportamiento de una placa plana. Los puntos P , C , O_P y O son el polo de la sección, el centroide geométrico de la sección, el centro de referencia y el origen de la coordenada s . Con el objeto de simplificar la descripción analítica del modelo los tres primeros puntos se consideran coincidentes.

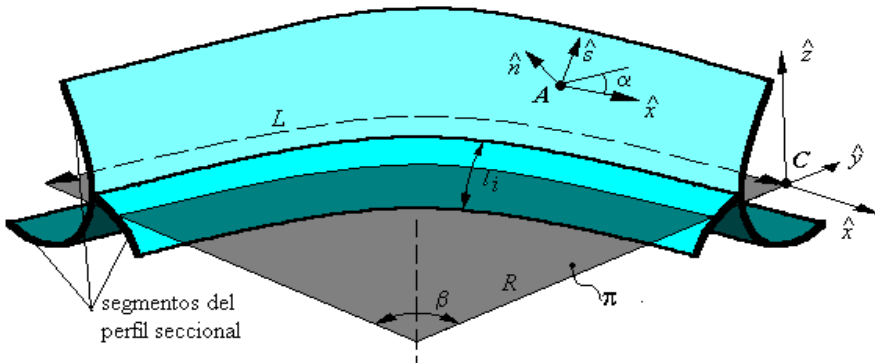


Figura 1. Viga curva genérica de paredes delgadas con sus sistemas de referencia básicos

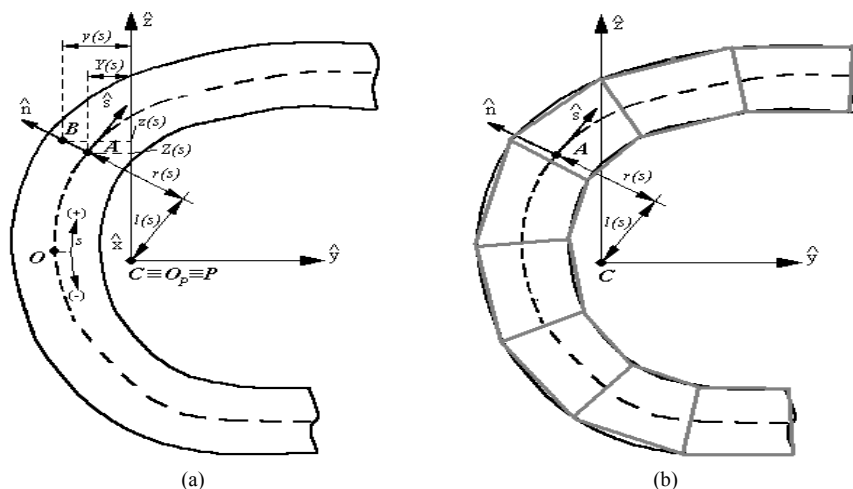


Figura 2. Descripción del perfil y entidades geométricas de una sección genérica

Algunas teorías ^[12] de vigas curvas materiales isotrópos suelen definirse en función de dos polos, para poder simplificar las expresiones constitutivas en virtud de la anulación de determinadas integrales en el área. Sin embargo en el caso de secciones arbitrarias la ubicación de los centros de referencia, como el centroide, centro de corte, centro de referencia de la función de alabeo, etc., impone la necesidad de calcular varias integrales en el área, tornando en consecuencia fatigosa la obtención de los mismos y poco ventajoso el planteo simplificativo de dos polos de referencia, tal como fue discutido por Burgoyne y Brown ^[13].

2.1 Hipótesis del modelo y definiciones

La presente teoría de arcos isotrópos deformables por corte se desarrolla a partir de los esquemas de una teoría previa de los autores. Para ello se establecen a priori las siguientes hipótesis:

H.1- La sección es indeformable en su plano, esto es que la proyección de cualquier segmento recto de la sección sobre un plano perpendicular al eje de la viga, luego de la deformación no manifiesta ninguna distorsión.

H.2- La sección se considera compuesta por una sucesión de placas de pequeño ancho tal como se ve en la Figura 2.b. cuyo espesor puede variar a lo largo de la coordenada perimetral “s” pero se mantiene constante a lo largo del eje de la viga.

H.3- Se emplea un solo sistema de referencia ubicado en el centroide geométrico de la sección. Los ejes de referencia no son necesariamente paralelos a las direcciones principales.

H.4- Las siguientes deformaciones se admiten como más las representativas

-Deformaciones de primer orden debidas a desplazamientos lineales: $\epsilon_{xx}^L, \epsilon_{xy}^L, \epsilon_{xz}^L$

-Deformaciones de segundo orden debidas a desplazamientos lineales: $\eta_{xx}^L, \eta_{xy}^L, \eta_{xz}^L$

-Deformaciones de primer orden debidas a desplazamientos no lineales: $\varepsilon_{xx}^{NL}, \varepsilon_{xy}^{NL}, \varepsilon_{xz}^{NL}$

H.5- Se desprecian componentes de deformación de orden superior debidas a los desplazamientos de segundo orden, es decir η_{ij}^{NL} .

H.6- Se considera que las componentes más representativas del tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff son $\{\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}\}$.

H.7- Se contempla la existencia de un estado arbitrario de tensiones iniciales, cuyas componentes más representativas son $\{\sigma_{xx}^0, \sigma_{xy}^0, \sigma_{xz}^0\}$.

H.8- La función de alabeo consta de dos componentes: el alabeo primario o en el contorno $\omega_p(s)$ y el alabeo secundario $\omega_s(s, n)$ o en el espesor, el cual se supone con variación lineal en el espesor.

H.9- En las expresiones del principio de trabajos virtuales se incorporan las componentes del trabajo virtual de los desplazamientos no lineales sobre las cargas externas iniciales.

Bajo estas hipótesis el campo de desplazamiento puede definirse con las siguientes expresiones[] :

$$\begin{aligned}
 u_x^L(x) &= u_{xc}(x) - y \left(\theta_z(x) - \frac{u_{xc}(x)}{R} \right) - z \theta_y(x) - \omega \left(\theta_x(x) - \frac{\theta_y(x)}{R} \right) \\
 u_y^L(x) &= u_{yc}(x) - z \phi_x(x), \quad u_z^L(x) = u_{zc}(x) + y \phi_x(x) \\
 u_x^{NL}(x) &= -\frac{I}{2} \left[z \phi_x(x) \left(\theta_z(x) - \frac{u_{xc}(x)}{R} \right) + y \phi_x(x) \theta_y(x) \right] \\
 u_y^{NL}(x) &= -\frac{y}{2} \left[(\phi_x(x))^2 + \left(\theta_z(x) - \frac{u_{xc}(x)}{R} \right)^2 \right] - \frac{z}{2} \left(\theta_z(x) - \frac{u_{xc}(x)}{R} \right) \theta_y(x) \\
 u_z^{NL}(x) &= -\frac{z}{2} \left[(\phi_x(x))^2 + (\theta_y(x))^2 \right] - \frac{y}{2} \left(\theta_z(x) - \frac{u_{xc}(x)}{R} \right) \theta_y(x)
 \end{aligned} \tag{1}$$

En (1) los superíndices “L” y “NL” identifican a las componentes lineales y no lineales del campo de desplazamiento. $u_{xc}(x)$ es el desplazamiento axial, $\theta_z(x)$ y $\theta_y(x)$ son parámetros de rotación flexionales (los cuales, en el caso de una viga recta coinciden con las rotaciones flexionales), $u_{yc}(x)$ y $u_{zc}(x)$ son los desplazamientos transversales de la sección, $\phi_x(x)$ es la rotación torsional de la sección y $\theta_x(x)$ es una variable de intensidad de alabeo. ω es la función de alabeo que viene expresada como:

$$\omega(s, n) = \omega_p(s) + \omega_s(s, n) \tag{2}$$

con

$$\omega_p(s) = \int_s [r(s) - \psi(s)] ds - D_C \tag{3}$$

$$\omega_s(s, n) = -n l(s)$$

siendo

$$\psi(s) = \left[\frac{\int_s r(s) ds}{\oint ds} \right], \quad D_C = \frac{\oint [r(s) - \psi(s)] ds}{\oint ds} \tag{4}$$

La función $\psi(s)=0$ en el caso de una sección abierta, y las cantidades $r(s)$ y $l(s)$, fundamentales para describir la función de alabeo, se definen como:

$$r(s) = Z(s) \frac{dY}{ds} - Y(s) \frac{dZ}{ds}, \quad l(s) = Y(s) \frac{dY}{ds} + Z(s) \frac{dZ}{ds} \tag{5}$$

En esta última expresión, las coordenadas $[Y(s), Z(s)]$ identifican a las coordenadas del punto A sobre la línea media de la pared (Figura 2) y cualquier otro punto B , queda referido respecto de las coordenadas del punto A según la siguiente expresión:

$$y(s) = Y(s) - n \frac{dZ}{ds}, \quad z(s) = Z(s) + n \frac{dY}{ds} \tag{6}$$

2.2 Estado de deformaciones

El estado de deformaciones e_{ij} , de un cuerpo curvo como el de la Figura 1, considerando el campo de desplazamientos (1) viene dado por:

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij}^L + \varepsilon_{ij}^{NL} + \eta_{ij}^L + \eta_{ij}^{NL} \tag{7}$$

$$\varepsilon_{ij}^L = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j^L}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i^L}{\partial x_j} \right), \quad \varepsilon_{ij}^{NL} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j^{NL}}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i^{NL}}{\partial x_j} \right), \quad \eta_{ij}^L = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_h^L}{\partial x_i} \frac{\partial u_h^L}{\partial x_j} \right) \tag{8}$$

$$\eta_{ij}^{NL} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_h^L}{\partial x_i} \frac{\partial u_h^{NL}}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_h^{NL}}{\partial x_i} \frac{\partial u_h^L}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_h^{NL}}{\partial x_i} \frac{\partial u_h^{NL}}{\partial x_j} \right)$$

Siendo ε_{ij}^L las componentes de primer orden debidas a desplazamientos lineales, ε_{ij}^{NL} las componentes de primer orden debidas a desplazamientos no lineales, η_{ij}^L las componentes de segundo orden debidas a desplazamientos lineales y η_{ij}^{NL} las componentes de segundo orden debidas a desplazamientos no lineales. Estas últimas por hipótesis **H.5** se consideran despreciables frente a las restantes, que de acuerdo a la hipótesis **H.4** vienen descriptas como:

$$\varepsilon_{xx}^L = (\varepsilon_{D1} - y \varepsilon_{D3} - z \varepsilon_{D2} - \omega \varepsilon_{D4}) \mathcal{F} \quad (9)$$

$$\gamma_{xy}^L = 2\varepsilon_{xy}^L \cong \left[\varepsilon_{D5} - \left(z + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \varepsilon_{D8} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \varepsilon_{D7} \right] \mathcal{F} \quad (10)$$

$$\gamma_{xz}^L = 2\varepsilon_{xz}^L \cong \left[\varepsilon_{D6} + \left(y - \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) \varepsilon_{D8} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \varepsilon_{D7} \right] \mathcal{F} \quad (11)$$

$$\varepsilon_{xx}^{NL} = \left\{ -y \left[\frac{\partial(\varepsilon_{B1} \varepsilon_{B2})}{\partial x} + \frac{\varepsilon_{B2}^2 + \varepsilon_{B3}^2}{R} \right] + z \left[\frac{\partial(\varepsilon_{B2} \varepsilon_{B3})}{\partial x} - \varepsilon_{B1} \varepsilon_{B3} \right] \right\} \frac{\mathcal{F}}{2} \quad (12)$$

$$\gamma_{xy}^{NL} = 2\varepsilon_{xy}^{NL} = - \left\{ \varepsilon_{B1} \varepsilon_{B2} + y \left[\frac{\partial \varepsilon_{B2}^2}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{B3}^2}{\partial x} \right] + z \left[\frac{\partial(\varepsilon_{B1} \varepsilon_{B3})}{\partial x} + \frac{\varepsilon_{B3} \varepsilon_{B2}}{R} \right] \right\} \frac{\mathcal{F}}{2} \quad (13)$$

$$\gamma_{xz}^{NL} = 2\varepsilon_{xz}^{NL} = \frac{\varepsilon_{B3} \varepsilon_{B2}}{2} - \left\{ y \frac{\partial(\varepsilon_{B1} \varepsilon_{B3})}{\partial x} + z \left[\frac{\partial \varepsilon_{B2}^2}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{B3}^2}{\partial x} \right] \right\} \frac{\mathcal{F}}{2} \quad (14)$$

$$\eta_{xx}^L = \left\{ \chi_3 (\varepsilon_{D1} - y \varepsilon_{D3} - z \varepsilon_{D2} - \omega \varepsilon_{D4})^2 + \left(\varepsilon_{B6} + y \frac{\partial \varepsilon_{B2}}{\partial x} \right)^2 \right\} \frac{\mathcal{F}^2}{2} + \quad (15)$$

$$+ \left[\varepsilon_{B5} - z \varepsilon_{D8} + \chi_4 \left(\frac{y}{R} \varepsilon_{B3} + \frac{\omega}{R} \varepsilon_{B4} \right) \right]^2 \frac{\mathcal{F}^2}{2}$$

$$\eta_{xy}^L = \left\{ \left(-\varepsilon_{B3} - \varepsilon_{B4} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) (\varepsilon_{D1} - y \varepsilon_{D3} - z \varepsilon_{D2} - \omega \varepsilon_{D4}) + \varepsilon_{B2} \left(\varepsilon_{B6} + y \frac{\partial \varepsilon_{B2}}{\partial x} \right) \right\} \frac{\mathcal{F}}{2} \quad (16)$$

$$\eta_{xz}^L = \left\{ \left(-\varepsilon_{B1} - \varepsilon_{B4} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) (\varepsilon_{D1} - y \varepsilon_{D3} - z \varepsilon_{D2} - \omega \varepsilon_{D4}) \right\} \frac{\mathcal{F}}{2} - \varepsilon_{B2} \left(\varepsilon_{B5} - z \varepsilon_{D8} + \frac{y}{R} \varepsilon_{B3} + \frac{\omega}{R} \varepsilon_{B4} \right) \frac{\mathcal{F}}{2} \quad (17)$$

donde las ε_{D1} , ε_{D2} , ε_{B1} , etc. se definen como sigue para simplificar y condensar notación:

$$\varepsilon_{D1} = \left(\frac{\partial u_{xc}}{\partial x} + \frac{u_{yc}}{R} \right), \quad \varepsilon_{D2} = \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\phi_x}{R} \right), \quad \varepsilon_{D3} = \left(\frac{\partial \theta_z}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial u_{xc}}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{D4} = \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)$$

$$\varepsilon_{D5} = \left(\frac{\partial u_{yc}}{\partial x} - \theta_z \right), \quad \varepsilon_{D6} = \left(\frac{\partial u_{zc}}{\partial x} - \theta_y \right), \quad \varepsilon_{D7} = \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \theta_x \right), \quad \varepsilon_{D8} = \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \frac{\theta_y}{R} \right) \quad (18)$$

$$\varepsilon_{B1} = \theta_y, \quad \varepsilon_{B2} = \phi_x, \quad \varepsilon_{B3} = \left(\theta_z - \frac{u_{xc}}{R} \right), \quad \varepsilon_{B4} = \left(\theta_x - \frac{\theta_y}{R} \right), \quad \varepsilon_{B5} = \left(\frac{\partial u_{yc}}{\partial x} - \frac{u_{xc}}{R} \right), \quad \varepsilon_{B6} = \frac{\partial u_{zc}}{\partial x}$$

La función \mathcal{F} que cuantifica el efecto de curvatura se define y aproxima como sigue:

$$\mathcal{F} = \frac{R}{R+y} \rightarrow \mathcal{F} \cong I - \chi_1 \frac{Y(s)}{R} + \chi_2 \frac{Y(s)^2}{R^2} \quad (19)$$

siendo χ_1 y χ_2 coeficientes cuyos valores permiten considerar diferentes hipótesis de gran curvatura (de aproximación lineal: $\chi_1=1$ y $\chi_2=0$ o cuadrática $\chi_1=\chi_2=1$) o bien la hipótesis de curvatura baja ($\chi_1=\chi_2=0$).

2.3 Expresión del principio de trabajos virtuales

La expresión del principio de trabajos virtuales, considerando estados de tensiones iniciales arbitrarios, se puede escribir de acuerdo con la expresión (20), sujeta a la condición de estado inicial (21). En aquella $\mathcal{J}_{(1)}$ es el trabajo virtual de las deformaciones lineales sobre las tensiones incrementales. $\mathcal{J}_{(2)}$ identifica al trabajo virtual de las tensiones iniciales debido a las deformaciones no lineales (12-14) y deformaciones de segundo orden (15-17), $\mathcal{J}_{(3)}$ es el trabajo virtual de los desplazamientos lineales sobre las fuerzas volumétricas externas. En tanto que $\mathcal{J}_{(4)}$ es la componente que se añade y que corresponde al

$$\underbrace{\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}^L dV}_{\mathcal{J}_{(1)}} + \underbrace{\int_V \sigma_{ij}^0 (\delta \eta_{ij}^L + \delta \varepsilon_{ij}^{NL}) dV}_{\mathcal{J}_{(2)}} + \underbrace{\left(- \int_V \bar{X}_i \delta u_i^L dV - \int_{S_2} \bar{T}_i \delta u_i^L dA \right)}_{\mathcal{J}_{(3)}} + \underbrace{\left(- \int_{S_2} \bar{T}_i^0 \delta u_i^{NL} dA - \int_V \bar{X}_i^0 \delta u_i^{NL} dV \right)}_{\mathcal{J}_{(4)}} = 0 \quad (20)$$

Esta expresión del trabajo virtual de una viga curva se encuentra sujeta a la condición de estado inicial determinada por la siguiente expresión:

$$\underbrace{\int_V \sigma_{ij}^0 \delta \varepsilon_{ij} dV}_{\mathcal{J}_{(1)}^{(0)}} + \underbrace{\left(- \int_V \bar{X}_i^0 \delta u_i dV - \int_{S_2} \bar{T}_i^0 \delta u_i dA \right)}_{\mathcal{J}_{(2)}^{(0)}} = 0 \quad (21)$$

En consecuencia para poder calcular los estados críticos, es necesario establecer las condiciones iniciales o de prepandeo con un cálculo previo que involucre (21). Las forma de los términos $\mathcal{J}_{(1)}^{(0)}$ y $\mathcal{J}_{(2)}^{(0)}$ correspondientes a las condiciones iniciales, son semejantes a las expresiones (22) y (24), respectivamente.

Las componentes del principio de trabajos virtuales (20) vienen dadas por:

$$\mathcal{J}_{(1)} = \int [Q_X \delta \varepsilon_{D1} - M_Y \delta \varepsilon_{D3} - M_Z \delta \varepsilon_{D2} - B \delta \varepsilon_{D4}] dx + \int [Q_Y \delta \varepsilon_{D5} + Q_Z \delta \varepsilon_{D6} + T_{SV} \delta \varepsilon_{D8} + T_W \delta \varepsilon_{D7}] dx \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_{(2)} = & \frac{\delta}{2} \int \left\{ \mathcal{J}_1^{(0)} \left[\varepsilon_{B5}^2 + \varepsilon_{B6}^2 + \chi_3 \varepsilon_{D1}^2 \right] + \mathcal{J}_2^{(0)} \left[\varepsilon_{D8}^2 + \chi_3 \varepsilon_{D2}^2 \right] \right\} dx + \\
 & + \frac{\delta}{2} \int \left\{ \mathcal{J}_3^{(0)} \left[\left(\frac{\partial \varepsilon_{B2}}{\partial x} \right)^2 + \chi_3 \varepsilon_{D3}^2 + \chi_4 \frac{\varepsilon_{B3}^2}{R^2} \right] + \mathcal{J}_4^{(0)} \left[\chi_3 \varepsilon_{D4}^2 + \chi_4 \frac{\varepsilon_{B4}^2}{R^2} \right] \right\} dx + \\
 & + \delta \int \left\{ \mathcal{J}_5^{(0)} \left[\chi_3 \varepsilon_{D2} \varepsilon_{D3} - \chi_4 \frac{\varepsilon_{B3} \varepsilon_{D8}}{R} \right] + \mathcal{J}_6^{(0)} \left[\chi_3 \varepsilon_{D3} \varepsilon_{D4} - \chi_4 \frac{\varepsilon_{B3} \varepsilon_{B4}}{R^2} \right] \right\} dx + \\
 & + \delta \int \left\{ \mathcal{J}_7^{(0)} \left[\chi_3 \varepsilon_{D4} \varepsilon_{D2} - \chi_4 \frac{\varepsilon_{B4} \varepsilon_{D8}}{R} \right] - \mathcal{J}_8^{(0)} \left[\chi_3 \varepsilon_{D1} \varepsilon_{D4} - \chi_4 \frac{\varepsilon_{B5} \varepsilon_{B4}}{R} \right] \right\} dx + \\
 & + \delta \int \left\{ \mathcal{J}_9^{(0)} \left[\varepsilon_{B6} \frac{\partial \varepsilon_{B2}}{\partial x} - \chi_3 \varepsilon_{D3} \varepsilon_{D1} + \chi_4 \frac{\varepsilon_{B3} \varepsilon_{B5}}{R} \right] - \mathcal{J}_{10}^{(0)} \left[\chi_3 \varepsilon_{D1} \varepsilon_{D2} + \varepsilon_{B5} \varepsilon_{D8} \right] \right\} dx + \tag{23}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\delta}{2} \int \left\{ \mathbf{M}_Z^{(0)} \left[-\frac{\partial(\varepsilon_{B2} \varepsilon_{B1})}{\partial x} - \frac{\varepsilon_{B2}^2 + \varepsilon_{B3}^2}{R} \right] + \mathbf{M}_Y^{(0)} \left[\frac{\partial(\varepsilon_{B2} \varepsilon_{B3})}{\partial x} - \frac{\varepsilon_{B1} \varepsilon_{B3}}{R} \right] \right\} dx + \\
 & + \delta \int \left\{ \mathbf{Q}_Y^{(0)} \left[\varepsilon_{B6} \varepsilon_{B2} - \varepsilon_{D1} \varepsilon_{B3} - \frac{\varepsilon_{B2} \varepsilon_{B1}}{2} \right] + \mathbf{Q}_Z^{(0)} \left[\frac{\varepsilon_{B2} \varepsilon_{B3}}{2} - \varepsilon_{D1} \varepsilon_{B1} - \varepsilon_{B2} \varepsilon_{B5} \right] \right\} dx + \\
 & + \delta \int \left\{ \mathbf{M}_X^{(0)} \left[\frac{\varepsilon_{B1} \varepsilon_{D3}}{2} - \frac{\varepsilon_{D2} \varepsilon_{B3}}{2} \right] + \mathbf{Q}_{ZW}^{(0)} \left[\varepsilon_{D4} \varepsilon_{B1} - \frac{\varepsilon_{B2} \varepsilon_{B4}}{R} \right] + \mathbf{Q}_{YW}^{(0)} \left[\varepsilon_{D4} \varepsilon_{B3} \right] \right\} dx + \\
 & + \delta \int \left\{ \mathbf{T}_{WY}^{(0)} \left[\varepsilon_{B4} \varepsilon_{D3} \right] + \mathbf{T}_{WZ}^{(0)} \left[\varepsilon_{B4} \varepsilon_{D2} \right] + \mathbf{T}_{WW}^{(0)} \left[\varepsilon_{B4} \varepsilon_{D4} \right] - \mathbf{T}_W^{(0)} \left[\varepsilon_{B4} \varepsilon_{D1} \right] \right\} dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_{(3)} = & \int \left[\mathcal{J}_1(x,t) \delta u_{xc} + \mathcal{J}_3(x,t) \delta \theta_z + \mathcal{J}_5(x,t) \delta \theta_y + \mathcal{J}_7(x,t) \delta \theta_x \right] dx - \\
 & - \int \left[\mathcal{J}_2(x,t) \delta u_{yc} + \mathcal{J}_4(x,t) \delta u_{zc} + \mathcal{J}_6(x,t) \delta \phi_x \right] dx = - \int \{ \delta \mathbf{U} \}^T [\mathcal{P}] dx \tag{24}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_{(4)} = & - \int \left[\bar{\mathcal{J}}_1^{(0)} \delta u_{xc} + \bar{\mathcal{J}}_3^{(0)} \delta \theta_z + \bar{\mathcal{J}}_5^{(0)} \delta \theta_y + \bar{\mathcal{J}}_6^{(0)} \delta \phi_x \right] dx - \\
 & - \left[\bar{\mathcal{J}}_1^{(0)} \delta u_{xc} + \bar{\mathcal{J}}_3^{(0)} \delta \theta_z + \bar{\mathcal{J}}_5^{(0)} \delta \theta_y + \bar{\mathcal{J}}_6^{(0)} \delta \phi_x \right]_{x=0}^{x=L} \tag{25}
 \end{aligned}$$

$$= - \{ \delta \mathbf{U} \}^T [\mathbf{C}_T] \{ \mathbf{U} \} - \int \{ \delta \mathbf{U} \}^T [\mathbf{C}_X] \{ \mathbf{U} \} dx$$

En las expresiones (22) a (25) se han efectuado las siguientes definiciones:

$$\{ \mathbf{U} \} = \{ u_{xc}, u_{yc}, \theta_z, u_{zc}, \theta_y, \phi_x, \theta_x \}^T, \quad \{ \dot{\mathbf{U}} \} = \{ \ddot{u}_{xc}, \ddot{u}_{yc}, \ddot{\theta}_z, \ddot{u}_{zc}, \ddot{\theta}_y, \ddot{\phi}_x, \ddot{\theta}_x \}^T \tag{26}$$

$$[\mathcal{P}] = [\mathcal{J}_1(x,t) \quad \mathcal{J}_2(x,t) \quad \mathcal{J}_3(x,t) \quad \mathcal{J}_4(x,t) \quad \mathcal{J}_5(x,t) \quad \mathcal{J}_6(x,t) \quad \mathcal{J}_7(x,t)]^T \tag{27}$$

$$\{ \mathbf{Q}_X, \mathbf{M}_Y, \mathbf{M}_Z, \mathbf{B} \} = \int_A \sigma_{xx} \{ l, z, y, \omega \} dA, \quad \{ \mathbf{Q}_Y, \mathbf{Q}_Z \} = \int_A \{ \sigma_{xy}, \sigma_{xz} \} dA \tag{28}$$

$$\{T_{SV}, T_W\} = \int_A \left\{ \left[\sigma_{xz} \left(y - \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) - \sigma_{xy} \left(z + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \right] \left[\sigma_{xy} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \sigma_{xz} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right] \right\} dA \quad (29)$$

$$M_X = \int_A \left[\sigma_{xz} y - \sigma_{xy} z \right] dA = T_{SV} + T_W \quad (30)$$

$$\mathcal{J}_1^{(0)} = Q_X^{(0)} - \chi_1 \frac{M_Z^{(0)}}{R} + \chi_2 \frac{N_{YY}^{(0)}}{R^2}, \quad \mathcal{J}_2^{(0)} = N_{ZZ}^{(0)} - \chi_1 \frac{N_{YZZ}^{(0)}}{R} + \chi_2 \frac{N_{YZZZ}^{(0)}}{R^2} \quad (31)$$

$$\mathcal{J}_3^{(0)} = N_{YY}^{(0)} - \chi_1 \frac{N_{Y^3}^{(0)}}{R} + \chi_2 \frac{N_{Y^4}^{(0)}}{R^2}, \quad \mathcal{J}_4^{(0)} = N_{WW}^{(0)} - \chi_1 \frac{N_{YWZ}^{(0)}}{R} + \chi_2 \frac{N_{Y^2WZ}^{(0)}}{R^2} \quad (32)$$

$$\mathcal{J}_5^{(0)} = N_{YZ}^{(0)} - \chi_1 \frac{N_{Y^2Z}^{(0)}}{R} + \chi_2 \frac{N_{Y^3Z}^{(0)}}{R^2}, \quad \mathcal{J}_6^{(0)} = N_{YW}^{(0)} - \chi_1 \frac{N_{Y^2W}^{(0)}}{R} + \chi_2 \frac{N_{Y^3W}^{(0)}}{R^2} \quad (33)$$

$$\mathcal{J}_7^{(0)} = N_{ZW}^{(0)} - \chi_1 \frac{N_{YZW}^{(0)}}{R} + \chi_2 \frac{N_{Y^2ZW}^{(0)}}{R^2}, \quad \mathcal{J}_8^{(0)} = B^{(0)} - \chi_1 \frac{N_{YW}^{(0)}}{R} + \chi_2 \frac{N_{Y^2W}^{(0)}}{R^2} \quad (34)$$

$$\mathcal{J}_9^{(0)} = M_Z^{(0)} - \chi_1 \frac{N_{YY}^{(0)}}{R} + \chi_2 \frac{N_{Y^3}^{(0)}}{R^2}, \quad \mathcal{J}_{10}^{(0)} = M_Y^{(0)} - \chi_1 \frac{N_{YZ}^{(0)}}{R} + \chi_2 \frac{N_{Y^2Z}^{(0)}}{R^2} \quad (35)$$

$$\{Q_X^{(0)}, M_Y^{(0)}, M_Z^{(0)}, B^{(0)}\} = \int_A \sigma_{xx} \{l, z, y, \omega\} dA, \quad Q_Y^{(0)} = \int_A \sigma_{xy}^0 \omega dA, \quad Q_{ZW}^{(0)} = \int_A \sigma_{xz}^0 \omega dA \quad (36)$$

$$\{N_{YY}^{(0)}, N_{ZZ}^{(0)}, N_{WW}^{(0)}, N_{ZW}^{(0)}, N_{YW}^{(0)}, N_{YZ}^{(0)}\} = \int_A \sigma_{xx}^0 \{y^2, z^2, \omega^2, z\omega, y\omega, yz\} dA \quad (37)$$

$$\{T_W^{(0)}, T_{WZ}^{(0)}, T_{WY}^{(0)}, T_{WW}^{(0)}\} = \int_A \left(\sigma_{xy}^0 \frac{\partial \omega}{\partial y} + \sigma_{xz}^0 \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) \{l, z, y, \omega\} dA \quad (38)$$

$$M_X^{(0)} = \int_A \left[\sigma_{xz}^0 y - \sigma_{xy}^0 z \right] dA = T_W^{(0)} + T_{SV}^{(0)} \quad (39)$$

$$\{N_{Y^4}^{(0)}, N_{Y^3Z}^{(0)}, N_{Y^3W}^{(0)}\} = \int_A \sigma_{xx}^0 \{y^4, y^3 z, y^3 \omega\} dA \quad (40)$$

$$\{N_{Y^2ZZ}^{(0)}, N_{Y^2WZ}^{(0)}, N_{Y^2ZW}^{(0)}\} = \int_A \sigma_{xx}^0 \{y^2 z^2, y^2 \omega^2, y^2 z \omega\} dA$$

$$\{N_{Y^3}^{(0)}, N_{Y^2Z}^{(0)}, N_{Y^2W}^{(0)}\} = \int_A \sigma_{xx}^0 \{y^3, y^2, y^2 \omega\} dA, \quad (41)$$

$$\{N_{YZW}^{(0)}, N_{YZZ}^{(0)}, N_{YWZ}^{(0)}\} = \int_A \sigma_{xx}^0 \{y z \omega, z^2 y, \omega^2 y\} dA$$

$$\mathcal{Q}_1(x,t) = \int_A \bar{X}_x \frac{1}{\mathcal{F}} dA, \quad \mathcal{Q}_2(x,t) = \int_A \bar{X}_y \frac{1}{\mathcal{F}} dA, \quad \mathcal{Q}_3(x,t) = - \int_A \bar{X}_x \frac{y}{\mathcal{F}} dA \quad (42)$$

$$\mathcal{Q}_4(x,t) = \int_A \bar{X}_z \frac{1}{\mathcal{F}} dA, \quad \mathcal{Q}_5(x,t) = - \int_A \bar{X}_x \frac{z}{\mathcal{F}} dA, \quad \mathcal{Q}_7(x,t) = - \int_A \bar{X}_x \frac{\omega}{\mathcal{F}} dA \quad (43)$$

$$\mathcal{Q}_6(x,t) = \int_A (\bar{X}_z y - \bar{X}_y z) \frac{1}{\mathcal{F}} dA \quad (44)$$

$$\bar{\mathcal{X}}_1^{(0)} = -\frac{\mathcal{N}_1^{(0)}}{R^2} u_{xc} + \frac{\mathcal{N}_1^{(0)}}{R} \theta_z + \frac{\mathcal{N}_3^{(0)} + \mathcal{N}_4^{(0)}}{2R} \theta_y - \frac{\mathcal{N}_6^{(0)}}{2R} \phi_x \quad (45)$$

$$\bar{\mathcal{X}}_3^{(0)} = \frac{\mathcal{N}_1^{(0)}}{R} u_{xc} - \mathcal{N}_1^{(0)} \theta_z - \frac{\mathcal{N}_3^{(0)} + \mathcal{N}_4^{(0)}}{2} \theta_y + \frac{\mathcal{N}_6^{(0)}}{2} \phi_x \quad (46)$$

$$\bar{\mathcal{X}}_5^{(0)} = -\frac{\mathcal{N}_3^{(0)} + \mathcal{N}_4^{(0)}}{2R} u_{xc} - \frac{\mathcal{N}_3^{(0)} + \mathcal{N}_4^{(0)}}{2} \theta_z - \mathcal{N}_2^{(0)} \theta_y - \frac{\mathcal{N}_5^{(0)}}{2} \phi_x \quad (47)$$

$$\bar{\mathcal{X}}_6^{(0)} = -\frac{\mathcal{N}_6^{(0)}}{2R} u_{xc} + \frac{\mathcal{N}_6^{(0)}}{2} \theta_z - \frac{\mathcal{N}_5^{(0)}}{2} \theta_y - (\mathcal{N}_1^{(0)} + \mathcal{N}_2^{(0)}) \phi_x \quad (48)$$

$$\bar{\mathcal{H}}_1^{(0)} = -\frac{\mathcal{H}_1^{(0)}}{R^2} u_{xc} + \frac{\mathcal{H}_1^{(0)}}{R} \theta_z + \frac{\mathcal{H}_3^{(0)} + \mathcal{H}_4^{(0)}}{2R} \theta_y - \frac{\mathcal{H}_6^{(0)}}{2R} \phi_x \quad (49)$$

$$\bar{\mathcal{H}}_3^{(0)} = \frac{\mathcal{H}_1^{(0)}}{R} u_{xc} - \mathcal{H}_1^{(0)} \theta_z - \frac{\mathcal{H}_3^{(0)} + \mathcal{H}_4^{(0)}}{2} \theta_y + \frac{\mathcal{H}_6^{(0)}}{2} \phi_x \quad (50)$$

$$\bar{\mathcal{H}}_5^{(0)} = \frac{\mathcal{H}_3^{(0)} + \mathcal{H}_4^{(0)}}{2R} u_{xc} - \frac{\mathcal{H}_3^{(0)} + \mathcal{H}_4^{(0)}}{2} \theta_z - \mathcal{H}_2^{(0)} \theta_y - \frac{\mathcal{H}_5^{(0)}}{2} \phi_x \quad (51)$$

$$\bar{\mathcal{H}}_6^{(0)} = -\frac{\mathcal{H}_6^{(0)}}{2R} u_{xc} + \frac{\mathcal{H}_6^{(0)}}{2} \theta_z - \frac{\mathcal{H}_5^{(0)}}{2} \theta_y - (\mathcal{H}_1^{(0)} + \mathcal{H}_2^{(0)}) \phi_x \quad (52)$$

siendo

$$\left\{ \mathcal{N}_1^{(0)}, \mathcal{N}_2^{(0)}, \mathcal{N}_3^{(0)} \right\} = \int_A \left\{ y \bar{X}_y^{(0)}, z \bar{X}_z^{(0)}, y \bar{X}_z^{(0)} \right\} dA \quad (53)$$

$$\left\{ \mathcal{N}_4^{(0)}, \mathcal{N}_5^{(0)}, \mathcal{N}_6^{(0)} \right\} = \int_A \left\{ z \bar{X}_y^{(0)}, y \bar{X}_x^{(0)}, z \bar{X}_x^{(0)} \right\} dA \quad (54)$$

$$\left\{ \mathcal{H}_1^{(0)}, \mathcal{H}_2^{(0)}, \mathcal{H}_3^{(0)} \right\} = \int_A \left\{ y \bar{T}_y^{(0)}, z \bar{T}_z^{(0)}, y \bar{T}_z^{(0)} \right\} dA \quad (55)$$

$$\left\{ \mathcal{H}_4^{(0)}, \mathcal{H}_5^{(0)}, \mathcal{H}_6^{(0)} \right\} = \int_A \left\{ z \bar{T}_y^{(0)}, y \bar{T}_x^{(0)}, z \bar{T}_x^{(0)} \right\} dA \quad (56)$$

$$[C_x] = \begin{bmatrix} \frac{\mathcal{N}_1^{(0)}}{R^2} & 0 & \frac{\mathcal{N}_1^{(0)}}{R} & 0 & \frac{\mathcal{N}_3^{(0)} + \mathcal{N}_4^{(0)}}{2R} & \frac{\mathcal{N}_6^{(0)}}{2R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & -\mathcal{N}_1^{(0)} & 0 & -\frac{\mathcal{N}_3^{(0)} + \mathcal{N}_4^{(0)}}{2} & \frac{\mathcal{N}_6^{(0)}}{2} & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{sim} & & -\mathcal{N}_2^{(0)} & -\frac{\mathcal{N}_5^{(0)}}{2} & 0 \\ & & & & & -(\mathcal{N}_1^{(0)} + \mathcal{N}_2^{(0)}) & 0 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$[C_T] = \begin{bmatrix} \frac{\mathcal{H}_1^{(0)}}{R^2} & 0 & \frac{\mathcal{H}_1^{(0)}}{R} & 0 & \frac{\mathcal{H}_3^{(0)} + \mathcal{H}_4^{(0)}}{2R} & \frac{\mathcal{H}_6^{(0)}}{2R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & -\mathcal{H}_1^{(0)} & 0 & -\frac{\mathcal{H}_3^{(0)} + \mathcal{H}_4^{(0)}}{2} & \frac{\mathcal{H}_6^{(0)}}{2} & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{sim} & & -\mathcal{H}_2^{(0)} & -\frac{\mathcal{H}_5^{(0)}}{2} & 0 \\ & & & & & -(\mathcal{H}_1^{(0)} + \mathcal{H}_2^{(0)}) & 0 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (58)$$

En las expresiones (28)-(30) se definen las resultantes de tensión en el área que identifican a los esfuerzos representativos de una viga, estos son Esfuerzo Normal, Q_x ; Momentos Flectores, M_Y y M_Z ; Bimomento, B ; Esfuerzos de Corte, Q_Y y Q_Z ; Momento de Torsión Pura, T_{SV} ; Momento Flexotorsor, T_W y momento torsor total M_x .

En las expresiones (31)-(41) se definen resultantes generalizadas de tensiones iniciales en el área, las cuales en algunos casos son homólogas a los esfuerzos iniciales, en otros casos como por ejemplo (40)-(41) son resultantes generalizadas no equiparables con esfuerzos de viga conocidos. Estos esfuerzos iniciales son fundamentales para el cálculo de cargas críticas de pandeo y de frecuencias bajo estados de precarga, los cuales se obtienen mediante un análisis estático previo que resulta de (21). En las expresiones (42)-(44) se definen las formas correspondientes a las cargas externas y las en expresiones (45)-(58) se definen las formas que intervienen en el trabajo virtual (25) de los desplazamientos no lineales sobre las cargas externas iniciales.

Para ser más específicos en el término del trabajo virtual $\mathcal{J}_{(t)}$, en caso de que exista solamente una fuerza inicial puntual $\bar{F}^{(0)} = \{\bar{F}_x^{(0)}, \bar{F}_y^{(0)}, \bar{F}_z^{(0)}\}$, aplicada en el punto $B(x_B, y_B, z_B)$ de la sección, y que no yace sobre el eje de la viga como se muestra en la Figura 2.a. Para obtener el aporte energético de esta fuerza originado por los desplazamientos

no lineales (1) se emplean en la expresión (25) y en (55)-(56) factores Delta de Kronecker en el punto **B**. De tal manera que la expresión (25) se convierte en

$$\mathcal{T}_{(4)} = - \left[\overline{\mathcal{T}}_1^{(0)} \delta u_{xc} + \overline{\mathcal{T}}_3^{(0)} \delta \theta_z + \overline{\mathcal{T}}_5^{(0)} \delta \theta_y + \overline{\mathcal{T}}_6^{(0)} \delta \phi_x \right]_{x=x_B} \quad (59)$$

siendo ahora

$$\overline{\mathcal{T}}_1^{(0)} = - \frac{y_B \overline{F}_y^{(0)}}{R^2} u_{xc} + \frac{y_B \overline{F}_y^{(0)}}{R} \theta_z + \frac{z_B \overline{F}_y^{(0)} + y_B \overline{F}_z^{(0)}}{2R} \theta_y - \frac{z_B \overline{F}_x^{(0)}}{2R} \phi_x \quad (60)$$

$$\overline{\mathcal{T}}_3^{(0)} = \frac{y_B \overline{F}_y^{(0)}}{R} u_{xc} - y_B \overline{F}_y^{(0)} \theta_z - \frac{z_B \overline{F}_y^{(0)} + y_B \overline{F}_z^{(0)}}{2} \theta_y + \frac{z_B \overline{F}_x^{(0)}}{2} \phi_x \quad (61)$$

$$\overline{\mathcal{T}}_5^{(0)} = \frac{z_B \overline{F}_y^{(0)} + y_B \overline{F}_z^{(0)}}{2R} u_{xc} - \frac{z_B \overline{F}_y^{(0)} + y_B \overline{F}_z^{(0)}}{2} \theta_z - z_B \overline{F}_z^{(0)} \theta_y - \frac{y_B \overline{F}_x^{(0)}}{2} \phi_x \quad (62)$$

$$\overline{\mathcal{T}}_6^{(0)} = - \frac{z_B \overline{F}_x^{(0)}}{2R} u_{xc} + \frac{z_B \overline{F}_x^{(0)}}{2} \theta_z - \frac{y_B \overline{F}_x^{(0)}}{2} \theta_y - (y_B \overline{F}_y^{(0)} + z_B \overline{F}_z^{(0)}) \phi_x \quad (63)$$

La expresión general de las ecuaciones constitutivas de los esfuerzos en función de las deformaciones generalizadas queda con la siguiente forma:

$$\{\mathcal{Q}^E\} = [J_E] \{\Delta\} \quad (64)$$

Donde $\{\mathcal{Q}^E\}$ es el vector de esfuerzos generalizados de viga, $\{\Delta\}$ es el vector de deformaciones generalizadas y $[J_E]$ es la matriz constitutiva de los esfuerzos. Los cuales se describen a continuación:

$$\{\mathcal{Q}^E\} = \{Q_X \quad M_Y \quad M_Z \quad B \quad Q_Y \quad Q_Z \quad T_W \quad T_{SV}\}^T \quad (65)$$

$$\{\Delta\} = \{\varepsilon_{D1}, -\varepsilon_{D2}, -\varepsilon_{D3}, -\varepsilon_{D4}, \varepsilon_{D5}, \varepsilon_{D6}, \varepsilon_{D7}, \varepsilon_{D8}\}^T \quad (66)$$

$$[J_E] = \begin{bmatrix} J_{11}^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & J_{22}^{11} & J_{23}^{11} & J_{24}^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & J_{33}^{11} & J_{34}^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & J_{44}^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & J_{55}^{66} & J_{56}^{66} & J_{57}^{66} & 0 \\ & & & & & J_{66}^{66} & J_{67}^{66} & 0 \\ & & & & & & J_{77}^{66} & J_{78}^{66} \\ & & & & & & & J_{88}^{66} \end{bmatrix} \quad (67)$$

Los elementos de la matriz constitutiva (67) de los esfuerzos se obtienen con la expresión:

$$J_{ij}^{kh} = E \int_A (\bar{g}_i^{(b)} \bar{g}_j^{(b)}) \mathcal{F} dsdn + G \int_A (\bar{g}_i^{(d)} \bar{g}_j^{(d)}) \mathcal{F} dsdn \quad (68)$$

para $\{i, j\} = \{1, \dots, 8\}$ y $\{h, k\} = \{1, 6\}$ y con los vectores:

$$\bar{g}^{(b)} = \left\{ 1, Z(s) + n \frac{dY}{ds}, Y(s) - n \frac{dZ}{ds}, \omega_p(s) - nl(s), 0, 0, 0, 0 \right\} \quad (69)$$

$$\bar{g}^{(d)} = \left\{ 0, 0, 0, 0, \frac{dY}{ds}, \frac{dZ}{ds}, r(s) - \psi(s) + n, \psi(s) - 2n \right\} \quad (70)$$

En (68), E y G son los módulos de elasticidad longitudinal y transversal respectivamente. La teoría hasta aquí expuesta se puede reducir a un modelo sin flexibilidad por corte cuando se imponen las siguiente condiciones:

$$\theta_z = \frac{\partial u_{yc}}{\partial x}, \quad \theta_y = \frac{\partial u_{zc}}{\partial x}, \quad \theta_x = \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \quad (71)$$

En tanto que las condiciones (71) no sean empleadas, el modelo contemplará la flexibilidad por corte en forma completa.

3 FORMULACION DE ELEMENTOS FINITOS

En la Figura 3 se puede observar un elemento finito isoparamétrico denominado ISOP5N, de cinco nodos con los desplazamientos genéricos, definidos en la primera de (26). La forma de interpolación de un desplazamiento generalizado $U_i(x)$ vendrá dada por la siguiente expresión genérica [14]:

$$U_i(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{N_N} f_j(\bar{x}) U_i^{(j)} \quad \text{con } i = 1, \dots, 7 \quad \text{con } \bar{x} \in [0, 1] \quad (72)$$

N_N es el número de nodos del elemento, \bar{x} es la coordenada intrínseca del elemento y $f_j(\bar{x})$ son las funciones de forma del elemento definidas según las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} f_1(\bar{x}) &= 1 - \frac{25}{3}\bar{x} + \frac{70}{3}\bar{x}^2 - \frac{80}{3}\bar{x}^3 + \frac{32}{3}\bar{x}^4, & f_2(\bar{x}) &= 16\bar{x} - \frac{208}{3}\bar{x}^2 + 96\bar{x}^3 - \frac{128}{3}\bar{x}^4 \\ f_3(\bar{x}) &= -12\bar{x} + 76\bar{x}^2 - 128\bar{x}^3 + 64\bar{x}^4, & f_4(\bar{x}) &= \frac{16}{3}\bar{x} - \frac{112}{3}\bar{x}^2 + \frac{224}{3}\bar{x}^3 - \frac{128}{3}\bar{x}^4 \\ f_5(\bar{x}) &= -\bar{x} + \frac{22}{3}\bar{x}^2 - 16\bar{x}^3 + \frac{32}{3}\bar{x}^4 \end{aligned} \quad (73)$$

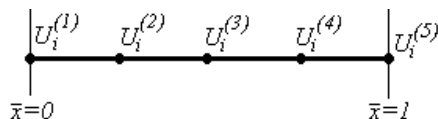


Figura 3. Descripción geométrica del elemento

El vector de desplazamientos nodales de (72) viene descrito de la siguiente manera:

$$\{\mathbf{U}\} = \{\{\mathbf{U}^{(1)}\}, \{\mathbf{U}^{(2)}\}, \{\mathbf{U}^{(3)}\}, \{\mathbf{U}^{(4)}\}, \{\mathbf{U}^{(5)}\}\} \quad (74)$$

con

$$\{\mathbf{U}_{(j)}^{(i)}\} = \{U_1^{(i)}, U_2^{(i)}, U_3^{(i)}, U_4^{(i)}, U_5^{(i)}, U_6^{(i)}, U_7^{(i)}\}^T = \{u_{xj}, u_{yj}, \theta_{zj}, u_{zj}, \theta_{yj}, \phi_{xj}, \theta_{xj}\}^T \quad (75)$$

Reemplazando (73) en (72), luego en las expresiones del trabajo virtual (21) a (25) y operando en la manera habitual, se obtiene las clásicas ecuación del método de elementos finitos para el problema de inestabilidad:

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{W}^{(0)}\} = \{\mathbf{P}^{(0)}\} \quad (76)$$

$$([\mathbf{K}] + \lambda[\mathbf{K}_G])\{\mathbf{W}\} = \{\mathbf{0}\} \text{ con } [\mathbf{K}_G] = [\mathbf{K}_{G1}] + [\mathbf{K}_{G2}] \quad (77)$$

En (77), $[\mathbf{K}]$ y $[\mathbf{K}_G]$ son la matriz de rigidez global y la matriz de rigidez geométrica global, respectivamente, en tanto que, $\{\mathbf{W}\}$, es el vector global de desplazamientos nodales. La (76) no es otra cosa que la (21) descripta según el método de elementos finitos, y de la cual se obtiene, seleccionando juiciosamente una carga de inicial $\{\mathbf{P}^{(0)}\}$, el estado tensional inicial para ser empleado en el cálculo de la matriz de rigidez geométrica que se halla en (77).

La matriz de rigidez geométrica está compuesta por dos partes. La matriz $[\mathbf{K}_{G1}]$ es la parte correspondiente al estado de deformaciones iniciales. En tanto que la matriz $[\mathbf{K}_{G2}]$ es la parte que corresponde a la presencia de cargas externas no actuantes sobre al eje de referencia de la viga, es decir provenientes de las expresiones (25) o bien de la (59).

4 ESTUDIOS PARAMÉTRICOS

4.1 Comparación de Paradigmas de modelación en el pandeo de arcos monosimétricos

En la Figura 4 se puede apreciar la geometría y estado de carga de un arco de sección U, construido con un material cuyas propiedades elásticas son $E = 2.94$ GPa y $G = 1.13$ GPa, siendo E y G los módulos de elasticidad longitudinal y transversal respectivamente.

En la Tabla 1 se comparan las cargas críticas Q_x , obtenidas siguiendo diferentes esquemas y métodos dentro de cinco paradigmas definidos de modelación. El primer paradigma corresponde a un modelo de vigas curvas no deformables por corte desarrollado por Kim y colaboradores^[8] pero basado en las propiedades semitangenciales de las rotaciones finitas, el segundo corresponde a un modelo de entramados de vigas rectas no deformables por corte^[8] pero considerando matrices de corrección de carga. El tercero corresponde a un entramado de vigas rectas deformables por corte desarrollado sobre un modelo reciente de Kim y colaboradores^[15] sustentado en las rotaciones finitas semitangenciales, considerando matrices de corrección por carga. El cuarto corresponde al modelo de viga curva deformable por corte de este artículo y el quinto corresponde a soluciones de elementos finitos empleando

elementos tipo placa de tres (COSMOS/M, ejecutado por los autores) y de nueve (ABAQUS, extractado de Kim y colaboradores^[8]) nodos. Esto último se ha hecho con el objeto de corroborar los esquemas de validación sobre dos plataformas computacionales independientes. Se puede apreciar que las soluciones basadas en modelos no deformables por corte se encuentran con una diferencia porcentual de 10 % y 22 % para los arcos y las vigas rectas. En tanto que la formulación de la viga curva deformable por corte arroja mejores resultados que la formulación de entramados de vigas rectas deformables por corte.

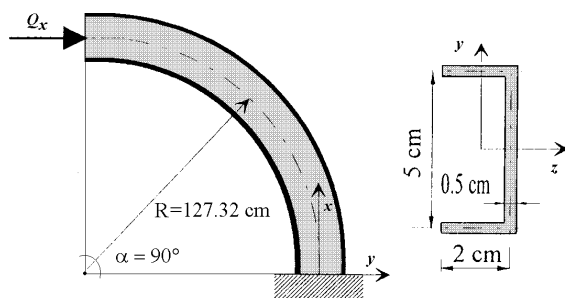


Figura 4. Esquema de carga de una viga monosimétrica de perfil U.

<i>Paradigmas de Cálculo</i>	Q_x [N]
Entramados de vigas rectas no deformables por corte ^[8]	6.902
Viga curva no deformable por corte ^[8]	6.125
Entramado de vigas rectas deformables por corte ^[15]	5.813
Viga Curva deformable por corte presente artículo (12 elementos).	5.698
COSMOS/M 4651 elementos Shell3T	5.648
ABAQUS ^[8] 255 elementos S9R5	5.639

Tabla 1. Descripción de los paradigmas de cálculo.

En las Figuras 5.a y 5.b se muestran dos típicas secciones bisimétricas de paredes delgadas, con sus dimensiones, y los puntos donde se aplican las cargas de pandeo según el esquema de arco biempotrado de la Figura 5.c. La ubicación de los puntos A_1 y A_2 para cada sección se pueden observar en las Figuras 5.a y 5.b. Nótese que la disposición de la carga en estos puntos es mucho más realista que la hipótesis convencional de ubicar la carga en el centro de referencia de la viga curva. Las vigas están construidas con acero, cuyas propiedades elásticas son $E = 210$ GPa y $G = 80.7$ GPa. Las cargas críticas se obtienen con

modelos de 12 elementos finitos ISOP5N.

En la Figura 6 se muestra la variación de la carga crítica para la sección cerrada con respecto al ángulo de abertura del arco que tiene $R = 1\text{ m}$. En tal Figura se comparan las cargas críticas como [I] aplicada en el centro de referencia (donde la matriz correctora $[K_{G2}]$ es nula), [II] aplicada en A_2 y [III] aplicada en A_2 calculada con elementos SHELL3T de COSMOS/M. [IV] aplicada en A_1 y [V] aplicada en A_1 calculada con elementos SHELL3T de COSMOS/M. Nótese la diferencia existente entre despreciar y utilizar la matriz de rigidez geométrica correctora por carga y lo bien que coteja esta última opción con las soluciones computacionales de placas, que este caso manifiestan un error máximo de 1.2%. La diferencia porcentual existente al calcular la carga crítica empleando la matriz correctora y la carga crítica calculada en forma convencional, ronda como máximo el 11% para la carga aplicada en A_1 y un 9 % para la carga aplicada en A_2 .

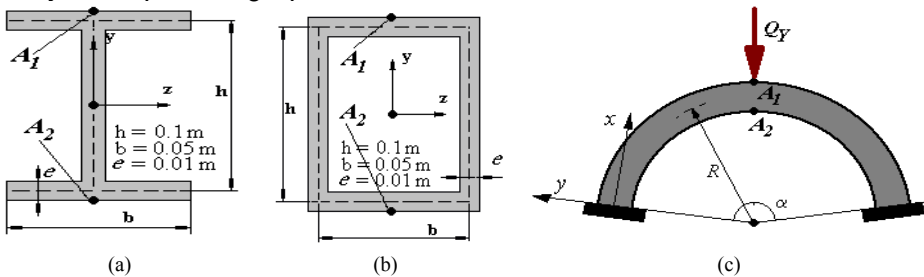


Figura 5. Descripción de las secciones y carga de pandeo.

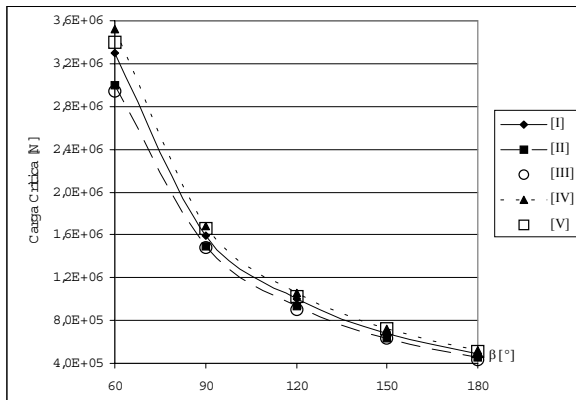


Figura 6. Variación de la carga crítica de la sección rectangular respecto al ángulo de abertura [I],[II],[III],[IV] MEF, ISOP5N, Cargas Aplicadas en C, A_2, A_1 . [III], [V] Cosmos/M. Cargas Aplicadas en A_2, A_1 .

En la Figura 7 se muestra la variación de la carga crítica correspondiente a la sección abierta. Los indicadores de cada secuencia son idénticos a los mencionados arriba. En este

caso se puede apreciar por simple comparación con la Figura 6, la notable influencia que tiene el empleo de la matriz de rigidez geométrica correctora en el cálculo de las cargas críticas, frente a la opción convencional que anula $[K_{G2}]$. En estas circunstancias las diferencias porcentuales máximas en el cálculo de las cargas críticas ubicadas en los puntos A_1 y A_2 frente a la carga crítica aplicada en el centro de referencia, son de 42% y 45%, respectivamente. En la Figura 7, se puede apreciar una excelente correlación entre las soluciones de 12 elementos finitos de viga curva y los modelos de entre 800 a 2500 elementos SHELL3T de COSMOS/M.

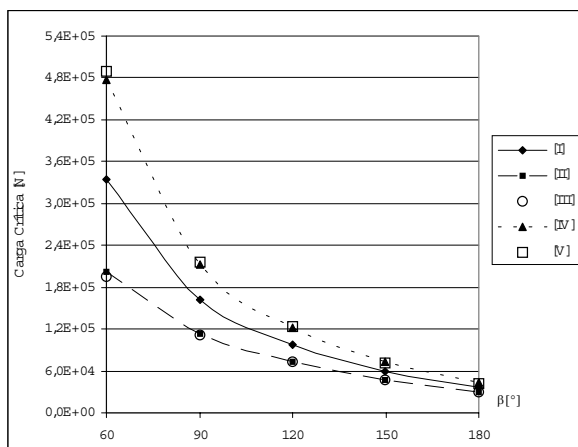


Figura 7. Variación de la carga crítica de la sección abierta respecto al ángulo de abertura

[I],[III],[IV] MEF, ISOP5N, Cargas Aplicadas en C , A_2 , A_1 . [III], [V] Cosmos/M. Cargas Aplicadas en A_2 , A_1 .

Los modos asociados a las cargas expuestas en las Figuras 6 y 7 corresponden a formas de pandeo lateral, lo cual significa que cada carga crítica es comparable en cuanto a su forma de inestabilidad. Sin embargo debido a la disposición y sentido de las cargas, para determinados rangos paramétricos, es posible que se presenten permutaciones entre las formas de pandeo lateral y pandeo netamente torsional, siendo estas últimas las correspondientes al primer modo de pandeo (en valores absolutos).

Este tipo de patrones de pandeo se manifiesta mayormente en ángulos de abertura más bien pequeños, entre 15° y 60° y en secciones abiertas. En efecto, si en el arco de perfil I, $R = 1$ m y $\beta = 60^\circ$, la carga aplicada en A_2 se ubica en sentido opuesto al de la Figura 5.c, el tipo de forma de pandeo que se verifica es de tipo torsional.

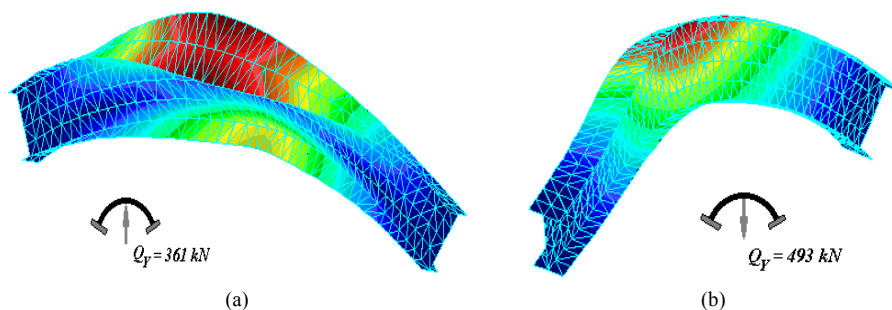


Figura 8. Formas de pandeo para un arco de perfil I, $R=1$ $b=60$, con carga aplicada en A_2
 (a) Modo Torsional con $Q_y=361$ kN (b) Modo Lateral con $Q_y=493$ kN

El valor de la carga de pandeo de tipo torsional mencionada fue de 352 kN con 12 elementos finitos unidimensionales y de 361 kN con un modelo de elementos SHELL3T de COSMOS/M. En la Figura 8 se pueden apreciar los modos asociados a las cargas críticas aplicadas en el punto A_2 para el arco mencionado, obtenidas con un modelo de 738 elementos SHELL3T de COSMOS/M.

5 CONCLUSIONES

En este artículo se ha presentado una extensión a un modelo de vigas curvas isótropas deformables por corte, con secciones paredes delgadas, para mejorar y esclarecer la forma de cálculo de las cargas críticas de pandeo cuando éstas se aplican en puntos no coincidentes con el centro de referencia. Se ha introducido en el funcional, una serie de términos no-lineales, comúnmente despreciados en el cálculo de las cargas críticas, y como se ha mostrado en este artículo, poseen influencia insoslayable para la correcta obtención de las cargas críticas, las cuales han sido convalidadas con extensos modelos de elementos finitos placa, evidenciando una excelente correlación. Las diferencias entre la forma convencional de cálculo de las cargas críticas y la presentada en este artículo, son notables para las configuraciones de arcos con baja curvatura y pequeño radio, en especial para las secciones abiertas. Se ha presentado a su vez un análisis comparativo de los paradigmas de modelación un cuanto a la obtención de la carga crítica de una sección monosimétrica, poniendo de relieve la eficiencia del método propuesto en este artículo frente a otros.

6 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo recibido por la Secretaria de Ciencia y Tecnología de la Universidad Tecnológica Nacional y del CONICET..

7 REFERENCES

- [1] C.H. Yoo y P.A. Pfeiffer "*Elastic Stability of Curved Members*". Journal of Structural Engineering Division (ASCE) Vol.120(12) December (1983)

- [2] Y. Yang y S. Kuo. "*Static Stability of Curved Thin Walled Beams*". Journal of Engineering Mechanics (ASCE) Vol.112(8) August (1986).
- [3] Y. Yang y S. Kuo. "*Effects of Curvature on Stability of Curved Beams*". Journal of Structural Engineering (ASCE) Vol.113(6) June (1987).
- [4] S. Kuo y Y. Yang. "*New theory on buckling of curved beams*". Journal of Engineering Mechanics (ASCE) 117(8), 1698-1717 (1991).
- [5] Y. Kang y C. Yoo "*Thin Walled Curved Beams. I: Formulation of Nonlinear Equations*". Journal of Engineering Mechanics (ASCE) Vol.120(10) October (1994).
- [6] S. Chang, S. Kim y M. Kim. "*Stability of Shear deformable Thin Walled Space Frames and circular Arches*". Journal of Engineering Mechanics (ASCE) Vol.122(9) September (1996).
- [7] A.S. Gendy y F. Saleeb. "*Shear Flexible Models for Spatial Buckling of Thin Walled Curved Beams*". International Journal of Numerical Methods in Engineering Vol.31 pp.729-757 (1991).
- [8] M.Y. Kim, B.C. Min y M.W. Suh "*Spatial Stability of nonsymmetric Thin Walled Curved Beams I: Analytical approach*". Journal Engineering Mechanics (ASCE) Vol.126(5) pp.497-505 (2000).
- [9] J.H. Argyris. "*An excursion into large rotations*". Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering Vol.32 pp.85-155 (1982).
- [10] N. Hu, B. Hu, B. Yan, H. Fukunaga y H. Sekine "*Two Kind of C^0 Type Elements for Buckling Analysis of Thin Walled Curved Beams*". Computer Methods in Applied Mechanics y Engineering- Vol.171(1-4) pp. 87-108 (1999).
- [11] M.T. Piovan y V.H. Cortínez "*Mecánica de Vigas curvas anisótropas con secciones de paredes delgadas*". Aceptada para su publicación en Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y diseño en Ingeniería. (2002).
- [12] V.H. Cortínez, M. T. Piovan, R.E. Rossi, "*Out of plane Vibrations of thin-walled curved beams considering shear flexibility*", Structural Engineering and Mechanics 8(3), (1999).
- [13] C.J. Burgoyne y E.H. Brown. "*Non-Uniform Elastic Torsion and Flexure of Members with Asymmetric Cross-Section*". International Journal Mechanical Sciences 36(1) pp.39-48 (1994).
- [14] E. Oñate. *El Cálculo de estructuras con Elementos Finitos*. Cimne. Barcelona (1992).
- [15] M-Y, Kim, S.P. Chang y H.G. Park. "*Spatial postbuckling of nonsymmetric thin walled frames. II: geometrically nonlinear FE procedures*". Journal Engineering Mechanics (ASCE) Vol.127(8) pp.779-790 (2001).