

MEJORA EN EL COMPORTAMIENTO MEMBRANAL DE UN ELEMENTO DE LÁMINA TRIANGULAR USANDO UNA APROXIMACIÓN EN DEFORMACIONES IMPUESTAS

Fernando G. Flores

Departamento de Estructuras, Universidad Nacional de Córdoba,
Casilla de Correo 916, 5000 Córdoba, Argentina
e-mail: fflores@efn.uncor.edu

Key Words: Láminas delgadas, Elementos finitos, Grandes deformaciones

Resumen.

En este trabajo se presenta una modificación sobre un elemento triangular no conforme de lámina clásica. La principal característica del elemento previo^[1] es que tiene tres nudos y sólo tiene desplazamientos como grados de libertad. Para el cálculo de las curvaturas se recurre a definir una parcela de 4 elementos a partir del propio elemento y los tres adyacentes. Desde el punto de vista membranar el elemento original es de tres nudos (triángulo de deformación constante) por lo cual su comportamiento membranar es pobre y el objetivo de este trabajo es precisamente mejorar dicho comportamiento. A partir de la misma parcela definida para el cálculo de las curvaturas se define una interpolación lineal del tensor métrico dentro del elemento, lo que puede verse como una técnica de deformaciones impuestas. Tanto el elemento original, como el mejorado están orientados al análisis no lineal de láminas delgadas con grandes deformaciones, sin embargo aquí se hace énfasis en el comportamiento lineal para mostrar que el elemento satisface los requisitos del “patch test”, y realizar estudios de convergencia a los fines de evaluar la importante mejora en el comportamiento membranar que se obtiene. Finalmente se presentan resultados comparativos con un “benchmark” reciente a los fines de mostrar el comportamiento no lineal con grandes deformaciones.

1. INTRODUCCIÓN

La simulación del comportamiento de láminas delgadas en procesos industriales tales como la embutición de láminas metálicas requiere la utilización de elementos finitos sencillos, eficientes y robustos. La elección de elementos de láminas sin deformaciones transversales de corte resulta lo más adecuada, sin embargo se tropieza con la necesidad de utilizar aproximaciones de continuidad C^1 , lo que no resulta fácil de satisfacer en condiciones generales, por lo cual se ha recurrido muchas veces a aproximaciones no conformes. Por otro lado resulta muy atractivo desde el punto de vista de eficiencia computacional la utilización de elementos con sólo desplazamientos (traslaciones) como grados de libertad.

Existen en la literatura pocos elementos de láminas con sólo desplazamientos como grados de libertad, en general basados en aproximaciones no conformes, un estado del arte de los mismos puede verse en la Ref.[2]. Recientemente Çirak y Ortiz^[3] han desarrollado un elemento de lámina delgada conforme, pero que en algunos aspectos difiere de la formulaciones estandar de elementos finitos. La utilización de este tipo de elementos en simulaciones de conformado de láminas metálicas es creciente^[4, 5, 6, 7], especialmente en códigos con integración explícita de las ecuaciones de movimiento.

En la Ref. [1] se ha presentado un elemento de lámina delgada con sólo desplazamientos como grados de libertad, basado en una formulación Lagrangeana total. El elemento es un triángulo de tres nudos (lineal), que membranalmente corresponde al triángulo de deformación constante y flexionalmente es un elemento de curvatura constante la que se obtiene a partir de una integración sobre el contorno del elemento, utilizando información sobre los gradientes en los elementos adyacentes. El elemento es una extensión del elemento desarrollado por Oñate y Zárate^[2] basado en una formulación Lagrangeana actualizada. El elemento es flexionalmente no conforme, pero converge a la solución correcta y es robusto. El comportamiento flexional es muy bueno en mallas estructuradas pero se deteriora en mallas no estructuradas, por otro lado en problemas gobernados por la parte membranal (como suele ser el caso de problemas de embutición) requiere de importantes discretizaciones debido a que corresponde al triángulo de deformación constante.

En el presente trabajo se presenta un elemento basado en la formulación anterior pero con una forma diferente de evaluar los gradientes lo que permite mejorar el comportamiento membranal del elemento y obtener una mejor aproximación a las curvaturas.

2. FUNCIONES DE APROXIMACIÓN Y EVALUACIÓN DE LOS GRADIENTES

La idea básica es partir de una malla de triángulos de tres nudos sobre la superficie a modelar, pero a diferencia de un elemento finito estandar, para la evaluación de las deformaciones se hace uso, además de la configuración de cada elemento, de la geometría de los tres triángulos adyacentes al triángulo que se está considerando. Por lo tanto para cada triángulo se utiliza una parcela de 4 elementos que lo incluye como triángulo central (Figura 1), de tal forma que la geometría (cuadrática ahora) queda definida por la posición

de 6 nudos. Visto en el espacio isoparamétrico se mantienen los vértices del triángulo principal (triángulo lineal estándar), los cuales ocupan las posiciones

- nudo 1: $(\xi, \eta) = (0, 0)$
- nudo 2: $(\xi, \eta) = (1, 0)$
- nudo 3: $(\xi, \eta) = (0, 1)$

de esta forma el resto de los nudos que forman la parcela ocupan las posiciones

- nudo 4: $(\xi, \eta) = (1, 1)$
- nudo 5: $(\xi, \eta) = (-1, 1)$
- nudo 6: $(\xi, \eta) = (1, -1)$

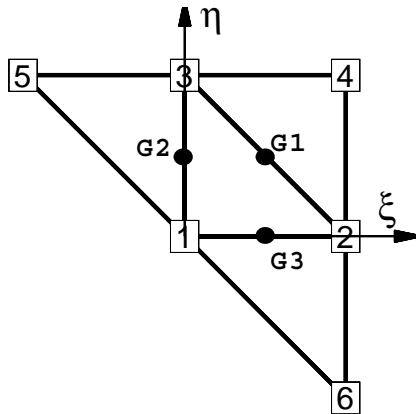


Figura 1: Parcela de elementos en coordenadas naturales

Las funciones de forma sobre este elemento cuadrático no-estándar son

$$\begin{aligned}
 N^1 &= \zeta + \xi\eta & N^4 &= \frac{\zeta}{2}(\zeta - 1) \\
 N^2 &= \xi + \eta\zeta & N^5 &= \frac{\xi}{2}(\xi - 1) \\
 N^3 &= \eta + \zeta\xi & N^6 &= \frac{\eta}{2}(\eta - 1)
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

La evaluación de las deformaciones membranales se realiza en tres puntos dentro del elemento principal. Estos puntos corresponden al punto medio de cada lado, indicados como puntos G1, G2 y G3 en la Figura 1. Esta elección tiene las siguientes características:

- Los gradientes en dichos puntos dependen exclusivamente de los nudos asociados a los dos triángulos adyacentes al lado. Esto puede verse calculando las derivadas de las funciones de forma y evaluándolas a la mitad de los lados.
- Cuando se evalúen las deformaciones en los triángulos vecinos, se utilizarán los mismos puntos, de esta forma los gradientes serán los mismos independientemente desde que triángulo se los evalúe. Bajo ciertas implementaciones, en una base de datos orientada a los lados y no a los elementos, se podría hacer una sola evaluación por lado.

Las derivadas (naturales) de las funciones de forma valuadas en la configuración original (supraíndice 0), permiten evaluar las matrices Jacobianas de la transformación isoparamétrica para la evaluación de las derivadas cartesianas de las funciones de forma.

$$\begin{bmatrix} N_1^I \\ N_2^I \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} N_\xi^I \\ N_\eta^I \end{bmatrix} \quad (2)$$

con

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \varphi_\xi^{(0)} \cdot \mathbf{t}_1 & \varphi_\eta^{(0)} \cdot \mathbf{t}_1 \\ \varphi_\xi^{(0)} \cdot \mathbf{t}_2 & \varphi_\eta^{(0)} \cdot \mathbf{t}_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

donde \mathbf{t}_1 y \mathbf{t}_2 son vectores unitarios ortogonales sobre el plano tangente original en las direcciones cartesianas locales convenientemente elegidas.

La definición de las derivadas cartesianas locales de la configuración actual permiten evaluar el tensor métrico

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \cdot \varphi_1 & \varphi_1 \cdot \varphi_2 \\ \varphi_2 \cdot \varphi_1 & \varphi_2 \cdot \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

y con él las medidas de deformación membranales que se considere conveniente. Por ejemplo, el tensor de deformaciones de Green-Lagrange

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \varphi_1 \cdot \varphi_1 - 1 & \varphi_1 \cdot \varphi_2 \\ \varphi_2 \cdot \varphi_1 & \varphi_2 \cdot \varphi_2 - 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} g_{11} - 1 & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} - 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (g_{ij} - \delta_{ij}) \quad (6)$$

Puesto en la forma matricial habitual del MEF

$$\begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \varphi_1 \cdot \varphi_1 - 1 \\ \varphi_2 \cdot \varphi_2 - 1 \\ 2\varphi_1 \cdot \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

cuya variación es sencillamente

$$\delta \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_1 \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_1 \\ \boldsymbol{\varphi}_2 \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_2 \\ \boldsymbol{\varphi}_1 \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_2 + \delta \boldsymbol{\varphi}_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

En los puntos del contorno donde no existe el elemento adyacente, el gradiente se define sencillamente como el gradiente del elemento principal. A partir de la definición de los gradientes en los tres puntos sobre los lados del triángulo, es posible interpretar al elemento como uno en **deformaciones impuestas** si se interpola linealmente al tensor métrico en función de los valores calculados en los lados.

$$\mathbf{g}(\xi, \eta) = (1 - 2\xi) \mathbf{g}^1 + (1 - 2\xi) \mathbf{g}^2 + (1 - 2\eta) \mathbf{g}^3 \quad (9)$$

3. CÁLCULO DE LAS CURVATURAS

La curvatura se impone constante en el elemento y se evalúa en base a realizar un promedio sobre el elemento (A^M es el área original del elemento)

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{-1}{A^M} \int_{A^M} \mathbf{t}_3 \cdot \boldsymbol{\varphi}_{i\beta\alpha} dA^M \quad (10)$$

que integrado por partes conduce a una integral sobre el contorno:

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{-1}{A^M} \oint_{\Gamma^M} \mathbf{t}_3 \cdot \boldsymbol{\varphi}_{i\alpha} n_\beta d\Gamma^M \quad (11)$$

y escrito para las tres componente distintas del tensor de curvatura

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} = \frac{-1}{A^M} \oint_{\Gamma^M} \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \\ n_2 & n_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_3 \cdot \boldsymbol{\varphi}_{i1} \\ \mathbf{t}_3 \cdot \boldsymbol{\varphi}_{i2} \end{bmatrix} d\Gamma^M \quad (12)$$

cuya evaluación numérica resulta de una suma sobre los puntos de integración sobre el contorno del elemento (los mismos puntos utilizados para la evaluación de los gradientes en la aproximación membranar)

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} = \frac{-1}{A^M} \sum_{G=1}^3 l_G \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \\ n_2 & n_1 \end{bmatrix}^G \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_1^G \cdot \mathbf{t}_3 \\ \boldsymbol{\varphi}_2^G \cdot \mathbf{t}_3 \end{bmatrix} \quad (13)$$

La definición de \mathbf{t}_3 en esta expresión no es particularmente importante, es decir no requiere que haya una consistencia precisa entre \mathbf{t}_3 y la interpolación isoparamétrica de 6

nudos. Por ello se recurre a la interpolación lineal con 3 nudos. El plano tangente en este caso resulta (con a_i y b_i las proyecciones cartesianas de los lados)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}^M &= \frac{1}{2A^M} \sum_{i=1}^3 \begin{bmatrix} -b_i \\ a_i \end{bmatrix} \varphi^i = \begin{bmatrix} \bar{N}_1^1 & \bar{N}_1^2 & \bar{N}_1^3 \\ \bar{N}_2^1 & \bar{N}_2^2 & \bar{N}_2^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \\ \varphi^3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{t}_3 &= \frac{\varphi_1^M \times \varphi_2^M}{|\varphi_1^M \times \varphi_2^M|} = \lambda \varphi_1^M \times \varphi_2^M \end{aligned}$$

De estas expresiones es posible determinar el área de integración $2A^M$ (en la configuración inicial) la relación de espesor λ y la normal \mathbf{t}_3 . De la configuración inicial lineal se obtienen también las normales al dominio $(n_1, n_2)^i$ en cada lado y la longitud del mismo l_i . Además se han introducido las funciones de forma lineales estándar del triángulo lineal \bar{N}^I las cuales se distinguen con una barra superior.

De esta forma (asociando los puntos de integración G con los lados I por lo cual ya no distinguiremos entre I y G)

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} = \frac{-1}{A^M} \sum_{I=1}^3 l_I \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \\ n_2 & n_1 \end{bmatrix}^G \begin{bmatrix} \varphi_1^I \cdot \mathbf{t}_3 \\ \varphi_2^I \cdot \mathbf{t}_3 \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$= 2 \sum_{I=1}^3 \begin{bmatrix} \bar{N}_1^I & 0 \\ 0 & \bar{N}_2^I \\ \bar{N}_2^I & \bar{N}_1^I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1^I \cdot \mathbf{t}_3 \\ \varphi_2^I \cdot \mathbf{t}_3 \end{bmatrix} \tag{15}$$

En esta propuesta, a su vez, sobre cada lado I el gradiente puede escribirse a partir de la aproximación cuadrática

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}^I = \begin{bmatrix} N_1^1 & N_1^2 & N_1^3 & N_1^{I+3} \\ N_2^1 & N_2^2 & N_2^3 & N_2^{I+3} \end{bmatrix}^I \begin{bmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \\ \varphi^3 \\ \varphi^{I+3} \end{bmatrix} \tag{16}$$

tal como se explicara antes. Notar que en cada lado los gradientes dependen de las posiciones de los tres nudos que conforman el triángulo principal y un nudo extra ($I + 3$), asociado precisamente al lado (I) donde se lo evalúa.

Una forma alternativa de escribir las curvaturas, que resulta útil al momento de describir sus variaciones, es definir:

$$\mathbf{h}_{ij} = \sum_{I=1}^3 (\bar{N}_i^I \varphi_j^I + \bar{N}_j^I \varphi_i^I) \tag{17}$$

y con ello

$$\kappa_{ij} = \mathbf{h}_{ij} \cdot \mathbf{t}_3 \tag{18}$$

3.1. Variación de las curvaturas

En base a la expresión 18 la variación de las curvaturas resulta

$$\delta\kappa_{ij} = \delta\mathbf{h}_{ij} \cdot \mathbf{t}_3 + \mathbf{h}_{ij} \cdot \delta\mathbf{t}_3 \quad (19)$$

Las variaciones de los \mathbf{h}_{ij} son:

$$\delta\mathbf{h}_{ij} = \sum_{I=1}^3 (\bar{N}_i^I \delta\boldsymbol{\varphi}_j^I + \bar{N}_j^I \delta\boldsymbol{\varphi}_i^I) \quad (20)$$

donde

$$\begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\varphi}_1 \\ \delta\boldsymbol{\varphi}_2 \end{bmatrix}^I = \begin{bmatrix} N_1^I & N_1^I & N_1^I & N_1^{I+3} \\ N_2^I & N_2^I & N_2^I & N_2^{I+3} \end{bmatrix}^I \begin{bmatrix} \delta\mathbf{u}^1 \\ \delta\mathbf{u}^2 \\ \delta\mathbf{u}^3 \\ \delta\mathbf{u}^{I+3} \end{bmatrix} \quad (21)$$

En tanto que las variaciones de \mathbf{t}_3 se pueden evaluar tal como se ha hecho en el elemento original^[1] (elemento BST).

$$\delta t_{31} = -\mathbf{t}_3 \cdot \delta\boldsymbol{\varphi}_1^M \quad (22)$$

$$\delta t_{32} = -\mathbf{t}_3 \cdot \delta\boldsymbol{\varphi}_2^M \quad (23)$$

que conduce a

$$\delta\mathbf{t}_3 = \delta t_{31} \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1 + \delta t_{32} \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_2 \quad (24)$$

donde los $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{i,\alpha}$ son los vectores de la base contravariante sobre el elemento principal

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1 = \lambda \boldsymbol{\varphi}_2^M \times \mathbf{t}_3 \quad (25)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_2 = -\lambda \boldsymbol{\varphi}_1^M \times \mathbf{t}_3 \quad (26)$$

Con lo cual se tiene

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{t}_3 &= (-\mathbf{t}_3 \cdot \delta\boldsymbol{\varphi}_1^M) \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1 + (-\mathbf{t}_3 \cdot \delta\boldsymbol{\varphi}_2^M) \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_2 \\ &= -\sum_{J=1}^3 [\bar{N}_1^J \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1 + \bar{N}_2^J \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_2] (\mathbf{t}_3 \cdot \delta\mathbf{u}^J) \end{aligned} \quad (27)$$

Reemplazando la última expresión en 19 resulta

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta\chi_{11} \\ \delta\chi_{22} \\ 2\delta\chi_{12} \end{bmatrix} &= 2 \sum_{I=1}^3 \begin{bmatrix} \bar{N}_1^I & 0 \\ 0 & \bar{N}_2^I \\ \bar{N}_2^I & \bar{N}_1^I \end{bmatrix} \left\{ \sum_{J=1}^3 \begin{bmatrix} N_1^{J(I)} (\mathbf{t}_3 \cdot \delta\mathbf{u}^J) \\ N_2^{J(I)} (\mathbf{t}_3 \cdot \delta\mathbf{u}^J) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1^{I+3(I)} (\mathbf{t}_3 \cdot \delta\mathbf{u}^{I+3}) \\ N_2^{I+3(I)} (\mathbf{t}_3 \cdot \delta\mathbf{u}^{I+3}) \end{bmatrix} \right\} \\ &\quad - 2 \sum_{I=1}^3 \begin{bmatrix} (\bar{N}_1^I \rho_{11}^1 + \bar{N}_2^I \rho_{11}^2) \\ (\bar{N}_1^I \rho_{22}^1 + \bar{N}_2^I \rho_{22}^2) \\ (\bar{N}_1^I \rho_{12}^1 + \bar{N}_2^I \rho_{12}^2) \end{bmatrix} (\mathbf{t}_3 \cdot \delta\mathbf{u}^I) \end{aligned} \quad (28)$$

donde se han incluido las proyecciones de los vectores \mathbf{h}_{ij} sobre la base contravariante $\tilde{\varphi}'_\alpha$

$$\rho_{ij}^\alpha = \mathbf{h}_{ij} \cdot \tilde{\varphi}'_\alpha \quad (29)$$

Estas proyecciones junto con 18 permiten escribir

$$\mathbf{h}_{ij} = \sum_{\alpha=1}^2 \rho_{ij}^\alpha \varphi'_\alpha + \kappa_{ij} \mathbf{t}_3 \quad (30)$$

3.2. Condiciones de contorno

Una consideración especial debe hacerse en los contornos, donde no existe el elemento adyacente. El tipo de condición de borde esencial asociado a la normal es crucial en este caso. Cuando existe un borde empotrado o una condición de simetría, el plano tangente a la lámina en todo momento debe incluir a la normal al plano de empotramiento o plano de simetría. Denominaremos a esta dirección (invariante en el proceso) por $\varphi_n^{(0)}$.

En general el plano tangente en el contorno puede escribirse en función de dos vectores unitarios ortogonales expresados en un sistema local:

$$[\varphi_n^{(0)}, \tilde{\varphi}'_s] \quad (31)$$

a su vez la dirección $\tilde{\varphi}'_s$ es la intersección del plano tangente en el contorno con el plano del triángulo principal (M). El gradiente en el triángulo principal es

$$[\varphi_1^M, \varphi_2^M] \quad (32)$$

en tanto que el gradiente tangente al contorno sobre el lado I se puede escribir en función de las posiciones de los nudos extremos del lado (J y K) y la longitud original del lado L_0

$$\varphi'_s = \frac{1}{L_0} (\varphi^K - \varphi^J) \quad (33)$$

que junto con la definición de la normal local al contorno ν permite escribir el gradiente en el contorno como

$$[\varphi_1^G, \varphi_2^G] = [\varphi_n, \varphi'_s] \begin{bmatrix} \nu_1 & \nu_2 \\ -\nu_2 & \nu_1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

donde el gradiente asociado a la dirección normal, a los fines de mantener la métrica se define como

$$\varphi_n = \frac{\varphi_n^{(0)}}{\lambda |\varphi'_s|} \quad (35)$$

De esta forma la contribución del lado I a los vectores \mathbf{h}_{ij} resulta

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11}^T \\ \mathbf{h}_{22}^T \\ 2\mathbf{h}_{12}^T \end{bmatrix}^I = 2 \begin{bmatrix} \bar{N}_1^I & 0 \\ 0 & \bar{N}_2^I \\ \bar{N}_2^I & \bar{N}_1^I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 & -\nu_2 \\ \nu_2 & \nu_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_n^T \\ \varphi'_s \end{bmatrix} \quad (36)$$

Para el cálculo de la variación de las curvaturas, basta notar que en la variación de los vectores \mathbf{h}_{ij} la contribución del lado I es

$$\delta \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11}^T \\ \mathbf{h}_{22}^T \\ 2\mathbf{h}_{12}^T \end{bmatrix}^I = 2 \begin{bmatrix} \bar{N}_1^I & 0 \\ 0 & \bar{N}_2^I \\ \bar{N}_2^I & \bar{N}_1^I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 & -\nu_2 \\ \nu_2 & \nu_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{1}{L_0} [\delta \mathbf{u}^K - \delta \mathbf{u}^J]^T \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$= \frac{2}{L_0} \begin{bmatrix} -\bar{N}_1^I \nu_2 \\ \bar{N}_2^I \nu_1 \\ \bar{N}_1^I \nu_1 - \bar{N}_2^I \nu_2 \end{bmatrix} [\delta \mathbf{u}^K - \delta \mathbf{u}^J]^T \quad (38)$$

donde se ha despreciado la variación de la longitud del vector φ_n

Para el caso de bordes simplemente apoyados o libres, el gradiente en el punto de integración se supone igual al gradiente en el triángulo principal, tal como se hiciera en la aproximación membranaral

$$[\varphi_1^I, \varphi_2^I] = [\varphi_1^M, \varphi_2^M] \quad (39)$$

con lo cual los vectores \mathbf{h}_{ij} y sus variaciones pueden calcularse fácilmente. Por otro lado es posible hacer uso de la condición natural de borde imponiendo la condición de que la curvatura normal al contorno sea nula. Esto conduce en bordes articulados (en el cual la curvatura a lo largo del contorno es nula) a anular los momentos flectores. En bordes libres la curvatura a lo largo del contorno no es necesariamente nula y cuando la relación de Poisson es distinta de cero conduce a valores no nulos del momento normal.

4. MATRIZ DE RIGIDEZ

Se Consideran en forma separada las componentes debidas a los esfuerzos membranarales y los flexionales. A su vez, como es usual se separan las componentes “material” y “geométrica”. La parte material no ofrece dificultades y resulta de la integral

$$\int_A \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dA \quad (40)$$

donde las matrices \mathbf{B} son las que resultan al evaluar las variaciones de las deformaciones y \mathbf{C} es la matriz de elasticidad. En el caso de considerar no linealidad material, se recurre a integrar en forma numérica en el espesor, de lo cual resulta la matriz constitutiva elasto-plástica tangente o algorítmica \mathbf{C}_{ep} .

4.1. Matriz de rigidez geométrica (parte membranaral)

La parte geométrica resulta de evaluar

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_m^G \Delta \mathbf{u} = \int_A \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\delta \varepsilon^T \mathbf{N}) \Delta \mathbf{u} dA \quad (41)$$

Que se obtiene de sumar las contribuciones en los tres lados

$$\begin{aligned}
 \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_m^G \Delta \mathbf{u} &= \int_A \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T) \mathbf{N} \Delta \mathbf{u} dA \\
 &= \frac{A^M}{3} \sum_{K=1}^3 \sum_{I=1}^4 \sum_{J=1}^4 \left[N_{r_1}^{I(K)} N_{r_1}^{J(K)} N_{11}^{(K)} + N_{r_2}^{I(K)} N_{r_2}^{J(K)} N_{22}^{(K)} \right. \\
 &\quad \left. + \left(N_{r_1}^{I(K)} N_{r_2}^{J(K)} + N_{r_2}^{I(K)} N_{r_1}^{J(K)} \right) N_{12}^{(K)} \right] \delta \mathbf{u}^{J(K)} \cdot \Delta \mathbf{u}^{I(K)} \\
 &= \frac{A^M}{3} \sum_{K=1}^3 \sum_{I=1}^4 \sum_{J=1}^4 \left\{ \delta \mathbf{u}^I \begin{bmatrix} N_{r_1}^J & N_{r_2}^J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{r_1}^J \\ N_{r_2}^J \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}^J \right\}^{(K)}
 \end{aligned} \tag{42}$$

4.2. Matriz de rigidez geométrica (Parte flexional)

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_b^G \Delta \mathbf{u} = \int_A \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\delta \boldsymbol{\chi}^T) \mathbf{M} \right) \Delta \mathbf{u} dA \tag{43}$$

La parte flexional es más compleja. Recordando las ecuaciones (17) and (18) la contribución a la rigidez geométrica debida a flexión puede escribirse

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_b^G \Delta \mathbf{u} = A^M M_{ij} \Delta [\delta (\mathbf{t}_3 \cdot \mathbf{h}_{ij})] \tag{44}$$

donde

$$\Delta [\delta (\mathbf{t}_3 \cdot \mathbf{h}_{ij})] = \Delta (\mathbf{t}_3) \cdot \delta \mathbf{h}_{ij} + \delta (\mathbf{t}_3) \cdot \Delta \mathbf{h}_{ij} + \Delta (\delta \mathbf{t}_3) \cdot \mathbf{h}_{ij} \tag{45}$$

Los dos primeros términos dan lugar a correspondientes componentes simétricas, el segundo $(\delta \mathbf{t}_3 \cdot \Delta \mathbf{h}_{ij})$ puede escribirse

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ - \sum_{J=1}^3 [\bar{N}_{r_1}^J \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{r_1} + \bar{N}_{r_2}^J \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{r_2}] (\mathbf{t}_3 \cdot \delta \mathbf{u}^J) \right\} \cdot \left\{ \sum_{I=1}^3 \sum_{K=1}^4 (\bar{N}_{r_i}^I N_{r_j}^K + \bar{N}_{r_j}^I N_{r_i}^K) \Delta \mathbf{u}^{K(I)} \right\} \\
 &= - \sum_{J=1}^3 \sum_{I=1}^3 \sum_{K=1}^4 (\delta \mathbf{u}^J)^T [\bar{N}_{r_1}^J (\mathbf{t}_3 \otimes \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{r_1}) + \bar{N}_{r_2}^J (\mathbf{t}_3 \otimes \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{r_2})] (\bar{N}_{r_i}^I N_{r_j}^K + \bar{N}_{r_j}^I N_{r_i}^K) \Delta \mathbf{u}^{K(I)}
 \end{aligned} \tag{46}$$

Con lo cual puede definirse una primera componente de la matriz de rigidez geométrica debida a la flexión

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_{b1}^G \Delta \mathbf{u} &= A^M \left(- \sum_{J=1}^3 (\delta \mathbf{u}^J)^T [\bar{N}_{11}^J \quad \bar{N}_{12}^J] \begin{bmatrix} \mathbf{t}_3 \otimes \tilde{\varphi}_{11} \\ \mathbf{t}_3 \otimes \tilde{\varphi}_{12} \end{bmatrix} \right) \\ &\quad \sum_{I=1}^3 [\bar{N}_{11}^I \quad \bar{N}_{12}^I] \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12} & M_{22} \end{bmatrix} \sum_{K=1}^4 \begin{bmatrix} N_{11}^{K(I)} \\ N_{12}^{K(I)} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}^{K(I)} \end{aligned} \quad (47)$$

El último término en 45 resulta de observar que (suma en α y β)

$$\begin{aligned} \Delta (\delta \mathbf{t}_3) &= [\Delta (\delta \mathbf{t}_3)]_1 \tilde{\varphi}_{11} + [\Delta (\delta \mathbf{t}_3)]_2 \tilde{\varphi}_{12} + [\Delta (\delta \mathbf{t}_3)]_3 \mathbf{t}_3 \\ &= - (\tilde{\varphi}_{1\alpha} \cdot \tilde{\varphi}_{1\beta}) [\delta \varphi_{1\alpha}^T (\mathbf{t}_3 \otimes \mathbf{t}_3) \Delta \varphi_{1\beta}] \mathbf{t}_3 + \\ &\quad + [\delta \varphi_{1\alpha}^T (\mathbf{t}_3 \otimes \tilde{\varphi}_{1\alpha}) \Delta \varphi_{1\beta}] \tilde{\varphi}_{1\beta} + [\delta \varphi_{1\alpha}^T (\tilde{\varphi}_{1\beta} \otimes \mathbf{t}_3) \Delta \varphi_{1\beta}] \tilde{\varphi}_{1\alpha} \end{aligned} \quad (48)$$

luego

$$\begin{aligned} \Delta (\delta \mathbf{t}_3) \cdot \mathbf{h}_{ij} &= - (\tilde{\varphi}_{1\alpha} \cdot \tilde{\varphi}_{1\beta}) [\delta \varphi_{1\alpha}^T (\mathbf{t}_3 \otimes \mathbf{t}_3) \Delta \varphi_{1\beta}] (\mathbf{t}_3 \cdot \mathbf{h}_{ij}) + \\ &\quad + [\delta \varphi_{1\alpha}^T (\mathbf{t}_3 \otimes \tilde{\varphi}_{1\alpha}) \Delta \varphi_{1\beta}] (\tilde{\varphi}_{1\beta} \cdot \mathbf{h}_{ij}) \\ &\quad + [\delta \varphi_{1\alpha}^T (\tilde{\varphi}_{1\beta} \otimes \mathbf{t}_3) \Delta \varphi_{1\beta}] (\tilde{\varphi}_{1\alpha} \cdot \mathbf{h}_{ij}) \\ &= \delta \varphi_{1\alpha}^T \left\{ \rho_{ij}^\beta (\mathbf{t}_3 \otimes \tilde{\varphi}_{1\alpha}) + \rho_{ij}^\alpha (\tilde{\varphi}_{1\beta} \otimes \mathbf{t}_3) - g^{\alpha\beta} \kappa_{ij} (\mathbf{t}_3 \otimes \mathbf{t}_3) \right\} \Delta \varphi_{1\beta} \end{aligned} \quad (49)$$

$$\Delta (\delta \mathbf{t}_3) \cdot \mathbf{h}_{ij} = \sum_{J=1}^3 \sum_{K=1}^3 \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \bar{N}_{1\alpha}^J \bar{N}_{1\beta}^K [\delta \mathbf{u}^J]^T \mathbf{P}_{ij}^{\alpha\beta} \Delta \mathbf{u}^K \quad (50)$$

con

$$\mathbf{P}_{ij}^{\alpha\beta} = \left[-g^{\alpha\beta} \kappa_{ij} (\mathbf{t}_3 \otimes \mathbf{t}_3) + \rho_{ij}^\beta (\mathbf{t}_3 \otimes \tilde{\varphi}_{1\alpha}) + \rho_{ij}^\alpha (\tilde{\varphi}_{1\beta} \otimes \mathbf{t}_3) \right] \quad (51)$$

donde además se ha usado la definición del tensor métrico contravariante

$$g^{\alpha\beta} = \tilde{\varphi}_{1\alpha} \cdot \tilde{\varphi}_{1\beta} \quad (52)$$

Denominando a la suma

$$\mathbf{Q}^{\alpha\beta} = A^M \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \mathbf{P}_{ij}^{\alpha\beta} M_{ij} \quad (53)$$

El término

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_{b2}^G \Delta \mathbf{u} = A^M M_{ij} (\Delta (\delta \mathbf{t}_3) \cdot \mathbf{h}_{ij}) \quad (54)$$

resulta

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_{b2}^G \Delta \mathbf{u} = \sum_{J=1}^3 \sum_{K=1}^3 \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \bar{N}_{1\alpha}^J \bar{N}_{1\beta}^K [\delta \mathbf{u}^J]^T \mathbf{Q}^{\alpha\beta} \Delta \mathbf{u}^K \quad (55)$$

La expresión (55) tiene sólo componentes en los nudos del elemento principal.

5. EJEMPLOS NUMÉRICOS LINEALES

En esta sección se presentan un resumen de los resultados obtenidos con el objetivo de evaluar el comportamiento del elemento desarrollado. En las comparaciones de denomina BST al elemento original^[1], con CBST se denomina al elemento desarrollado en el cual se realiza la integración de las fuerzas membranales usando 3 puntos de integración y con CBST1 cuando se utiliza un solo punto de integración, equivalente a promediar los tensores métricos evaluados en los tres lados.

5.1. Patch test membranal

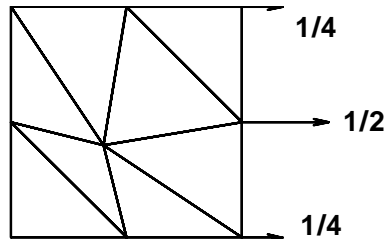


Figura 2: Patch test membranal

Uno de los objetivos principales de esta propuesta es lograr una aproximación membranal (no conforme) con un comportamiento numérico similar al triángulo de tensión lineal, que satisfaga el “patch test”. Para evaluar esto se ha utilizado un dominio cuadrado de lado unitario sometido a fuerzas nodales asociadas a un estado de tensión constante (en ambas direcciones y de corte). El patch de elementos se indica en la Figura 2 donde se indican las fuerzas necesarias para obtener un estado de tracción uniforme en la dirección x_1 . Notar que las fuerzas nodales son las mismas que las asociadas al triángulo lineal y no las del triángulo cuadrático. Para la malla distorsionada indicada se obtienen los resultados correctos en todos los puntos, usando 1 o 3 puntos de integración.

5.2. Patch test flexional (torsión)

Para el comportamiento flexional, la formulación no permite momentos exteriores (no hay grados de libertad rotacionales), por lo cual no es posible analizar una parcela aislada bajo cargas que produzcan un estado de flexión constante. Puede si imponerse un estado de torsión constante a través de una carga puntual en una esquina de una placa rectangular con dos lados (consecutivos) simplemente apoyados y los otros dos lados libres. La Figura 3 muestra tres parcelas que conducen a los resultados correctos tanto en desplazamientos como en esfuerzos. Las parcelas indicadas son todas estructuradas, cuando en

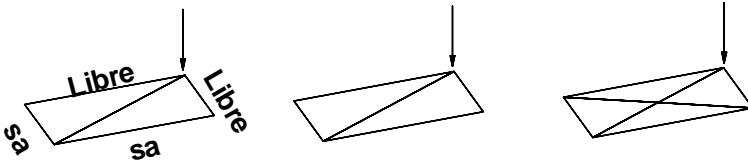


Figura 3: Patch test para un momento torsor constante

la tercera de ellas se mueve el nudo central fuera del centro, no se obtienen los resultados correctos con el CBST en cambio el elemento BST si da resultados correctos. Por otro lado debe también mencionarse que si en el BST no se imponen las curvaturas nulas en los bordes libres, no se obtienen los resultados correctos aún con mallas estructuradas.

5.3. Problema membranar de Cook

El presente ejemplo se utiliza para mostrar el comportamiento membranar del elemento desarrollado y compararlo con el triángulo lineal (tensión constante) y el triángulo cuadrático (tensión lineal). Corresponde a un problema con una importante cantidad de energía de corte, donde se intenta evaluar la habilidad del elemento para distorsionarse. En la Figura 4.a se muestra la geometría analizada y la carga actuante. En la figura 4.b se muestra el desplazamiento vertical del vértice superior en función del número de nudos de la malla. En esta figura se han incluido los resultados obtenidos con elementos finitos isoparamétricos estandar, correspondientes al triángulo de tensión constante (TTC que es la formulación membranar del BST que se intenta mejorar), al cuadrilátero bilineal (CUAD4) y al triángulo de tensión lineal (TTL)

De los resultados presentados puede verse como el presente elemento usando 3 puntos de integración (CBST), para la malla más sencilla (con sólo dos elementos) es apenas superior al triángulo de tensión constante, pero a medida que se aumenta la discretización da resultados similares al triángulo de tensión lineal, el cual tiene un comportamiento significativamente superior al primero. Por otro lado si se utiliza un sólo punto de integración (CBST1) la convergencia en el desplazamiento medido es significativamente mejor que el resto de los elementos.

5.3.1. Techo cilíndrico

La geometría de una cubierta cilíndrica bajo peso propio se muestra en la figura 5.a. Está apoyada sobre diafragmas rígidos en sus extremos. Se modela sólo un cuarto de la geometría debido a las condiciones de simetría. Se consideran mallas estructuradas con las dos posibles orientaciones (la figura muestra la orientación A) y mallas no estructuradas. Las tablas 1, 2 y 3 incluye los desplazamientos verticales normalizados en el coronamiento

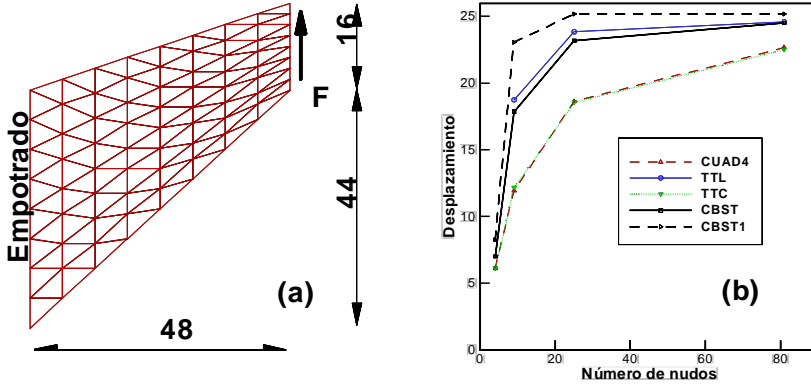


Figura 4: Problema membranar de Cook (a) Geometría (b) Resultados

(punto A) y a la mitad del borde libre (punto B) para las dos posibles orientaciones de mallas estructuradas y para la malla no estructurada respectivamente. Los valores utilizados para normalización $u_A = 0,5407$ y $u_B = -3,610$ fueron tomados de la referencia [8].

NGDL	Punto-A			Punto-B		
	CBST	CBST1	BST	CBST	CBST1	BST
16	0.65724	0.91855	0.74161	0.40950	0.70100	1.35230
56	0.53790	1.03331	0.74006	0.54859	1.00759	0.75590
208	0.89588	1.04374	0.88491	0.91612	1.02155	0.88269
800	0.99658	1.01391	0.96521	0.99263	1.00607	0.96393
3136	1.00142	1.00385	0.99105	0.99881	1.00102	0.98992

Cuadro 1: Cubierta cilíndrica bajo peso propio. Desplazamientos normalizados malla A

El presente problema está fuertemente gobernado por el comportamiento membranar. En la figura 5.b se muestra como ejemplo el desplazamiento normalizado del punto B sobre las mallas estructuradas. Puede verse la excelente convergencia del elemento CBST. La versión CBST1 muestra un comportamiento un poco más flexible y converge desde arriba.

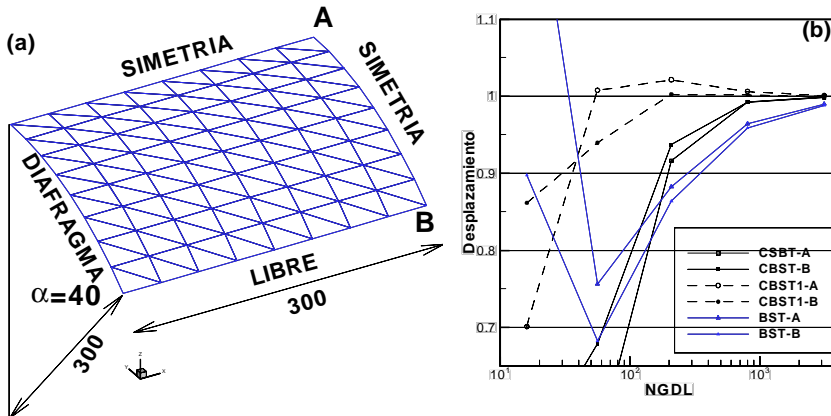


Figura 5: Cubierta cilíndrica bajo peso propio. $E=3 E^6$, $\nu = 0,0$, Espesor = 3.0, peso lámina = 0.625 por unidad de área

NGDL	Punto-A			Punto-B		
	CBST	CBST1	BST	CBST	CBST1	BST
16	0.26029	0.83917	0.40416	0.52601	0.86133	0.89778
56	0.81274	1.10368	0.61642	0.67898	0.93931	0.68238
208	0.97651	1.04256	0.85010	0.93704	1.00255	0.86366
800	1.00085	1.01195	0.95626	0.99194	1.00211	0.95864
3136	1.00129	1.00337	0.98879	0.99828	1.00017	0.98848

Cuadro 2: Cubierta cilíndrica bajo peso propio. Desplazamientos normalizados malla B

5.4. Semiesfera incompleta bajo cargas puntuales

El problema principal de los elementos con geometría inicial curvas es el denominado “bloqueo membranar”. El elemento CBST interpola la geometría en forma cuadrática por lo cual puede sufrir de este problema. Para evaluar en que medida ocurre esto se recurre a un problema de flexión inextensional. Se trata de una semi-esfera de radio $r = 10$ y espesor $h = 0,04$ con un agujero de 18° en el polo sometida a carga puntuales entrantes y salientes a 90° una de la otra. Todos los bordes están libres y se discretiza un cuarto de la geometría. Las propiedades del material son $E = 6,825 \times 10^7$ y $\nu = 0,3$. La figura 6.a muestra la geometría discretizada y una vista deformada.

En la figura 6.b se ha graficado el desplazamiento del punto de aplicación de la carga versus el número de nudos usados en la discretización. Dado que la malla tiene una orientación los desplazamientos en los puntos cargados no es idéntico, por lo cual en la

NGDL	Punto-A			Punto-B		
	CBST	CBST1	BST	CBST	CBST1	BST
61	0.96745	-0.0175	0.87949	0.74801	1.9560	0.81291
201	0.89096	-0.6679	0.89983	0.90983	1.0432	0.90116
851	0.97546	0.8581	0.97598	0.97662	1.0027	0.97194
3311	0.98729	0.9682	0.98968	0.98476	1.0083	0.98598
13536	0.99582	0.9992	1.00057	0.99316	0.9973	0.99596

Cuadro 3: Cubierta cilíndrica bajo peso propio. Desplazamientos normalizados malla no estructurada

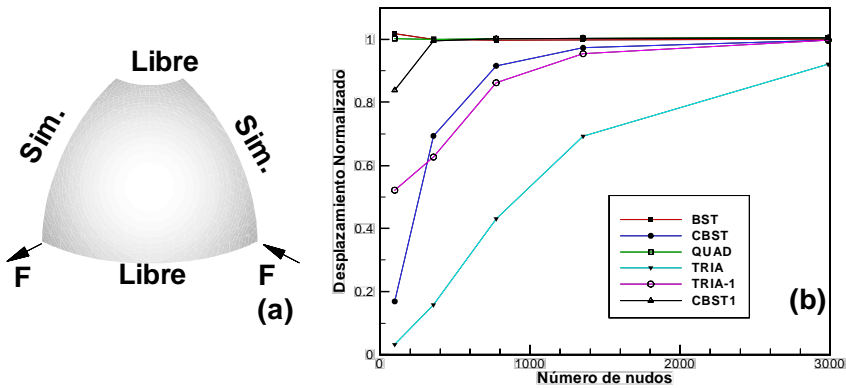


Figura 6: Semiesfera incompleta bajo cargas puntuales, (a) geometría, (b) desplazamientos normalizados

figura se ha tomado el promedio (en valores absolutos naturalmente). Se han incluido para comparación los resultados obtenidos con otros elementos: el BST que al ser facetado no bloquea membranalmente; un elemento cuadrilátero (QUAD) deformable por corte que tampoco bloquea membranalmente; un elemento triangular cuadrático (TRIA)^[9] que si bloquea y una versión en deformaciones impuestas (TRIA-1)^[9] que alivia un poco el bloqueo pero no lo elimina.

De los resultados presentados puede verse que el elemento CBST presenta bloqueo membranal en problemas con flexión inextensible de geometría inicial curva. El bloqueo membranal es sin embargo mucho más suave que en un triángulo cuadrático estandar, e incluso más leve que en la versión con deformaciones impuestas con la que se lo ha comparado. Por otro lado si se integra con un sólo punto de integración (CSBT1) el problema de bloqueo membranal desaparece.

6. EJEMPLO NUMÉRICO NO-LINEAL

Se ha utilizado como ejemplo para mostrar el comportamiento en grandes deformaciones un “benchmark” propuesto en el último encuentro NUMISHEET^[10]. Corresponde a la embutición profunda de una lámina circular de acero dulce con un punzón esférico de 50 mm de radio (R_P). El radio original de la lámina (R_L) es 100mm ($\frac{R_L}{R_P} = \beta = 2$). La profundidad de embutición (PE) es 85mm ($\frac{PE}{R_P} = 1,7$) y la fuerza sobre el pisador es 80KN. La caracterización del material está dada por 3 ensayos a tracción en distintas direcciones respecto a la dirección de rolado (DR). Resulta importante notar que para la modelización es imprescindible tratar el material como transversalmente anisótropo, característica que mejora las características de embutición, y que si en este caso no se considera conduce a una pronta estricción del material, en este caso se ha utilizado como función de fluencia la propuesta por Hill^[11] y se han considerado alternativamente funciones potenciales asociadas y no asociadas. La formulación utilizada para grandes deformaciones puede verse en la Ref [1], la simulación se realiza dentro de un programa con integración explícita de las ecuaciones de movimiento^[12]. Se ha utilizado un sólo punto de integración para la parte membranar, a su vez para problemas elastoplásticos resulta necesario integrar la ecuación constitutiva en el espesor de la lámina, lo que se realiza aquí dividiendo el espesor en cuatro capas.

Se ha modelado un cuarto de la geometría. Las herramientas se modelan como superficies rígidas, la superficie del punzón ha sido discretizado con 1438 puntos y 2730 facetas triangulares; para la matriz se han utilizado 744 puntos y 690 cuadriláteros; y para el pisador 155 puntos y 120 cuadriláteros. La lámina ha sido modelada con 6370 elementos triangulares de 3 nudos, 3284 nudos (9724 GdeL)

Los resultados presentados se asocian a tres meridianos distintos: **A**: en la dirección transversal al rolado, **B**: a 45° de la dirección de rolado y **C**: en la dirección de rolado. Los resultados numéricos se han comparado con un conjunto de resultados experimentales presentados por la empresa Krupp (quien propuso el “benchmark”). Debe hacerse notar que entre los datos enviados a NUMISHEET existió una gran dispersión entre los resultados experimentales por lo cual resulta difícil sacar conclusiones de una única comparación, sin embargo los valores experimentales de Krupp utilizados para comparación parecen ser los más confiables y permiten tener una idea de si el modelo numérico es razonable.

Los datos experimentales para comparación están asociados a la distribución de las tres deformaciones (logarítmicas) principales a lo largo de los tres meridianos de interés. Se han elegido para presentar aquí una deformación para cada meridiano. En la Figura 7.a se muestran las deformaciones en la dirección del meridiano, a lo largo del meridiano “A” (dirección transversal al rolado), en la Figura 7.b se muestra la deformación circunferencial a lo largo del meridiano “B” en tanto que en la Figura 7.c se han graficado las deformaciones en la dirección del espesor de la lamina a lo largo del meridiano “C” (dirección de rolado).

Las mediciones experimentales presentan un comportamiento oscilante difícil de acep-

tar, por lo cual debe inferirse que puntualmente los valores son poco confiables, pero si puede considerarse la tendencia promedio. En base a esto y a las mencionadas diferencias entre los distintos resultados experimentales puede decirse que los modelos numéricos predicen razonablemente bien el comportamiento del ensayo.

En la parte central de la lámina los resultados experimentales muestran deformaciones mas bajas que las simulaciones numéricas (especialmente para el modelo de plasticidad asociada). Podría decirse que experimentalmente la lámina embute más fácilmente que en la simulación. En la parte externa de la lámina las diferencias son menores, sin embargo se nota una fuerte diferencia en la deformación en el espesor. Experimentalmente las deformaciones en el espesor muestran un adelgazamiento bastante uniforme, lo que difiere de las simulaciones numéricas aquí presentadas y también de las simulaciones numéricas y otros resultados experimentales presentadas en NUMISHEET.

La figura 7.d muestra la fuerza sobre el punzón en función del desplazamiento del mismo. En la zona de mayor avance las fuerzas en la simulación son menores que las experimentales, esto puede deberse a una incorrecta definición del rozamiento con las herramientas.

Finalmente resulta difícil inferir de los resultados aquí presentados cuales son las deficiencias de los modelos y que resulta necesario mejorar para predecir mejor el comportamiento, esto teniendo en cuenta además de la relación constitutiva, al resto de los errores numéricos que aparecen en la modelización asociados a la teoría de láminas, a las limitaciones de los elementos finitos utilizados, a la formulación del contacto, etc.

7. CONCLUSIONES

El elemento presentado es no conforme membranalmente sin embargo el elemento pasa el “patch test” membranal y las pruebas numéricas no indican problemas. Desde el punto de vista flexional el elemento es más “rígido” que el elemento original, pero presenta una continuidad más suave de las variables derivadas. La velocidad de convergencia en problemas dominados por la membrana es similar al triángulo de tensión lineal cuando se utilizan tres puntos de integración (CBST) y es superior si se utiliza un sólo punto de integración (CBST1). Por otro lado El elemento CBST presenta bloqueo membranal en problemas de flexión inextensional con geometría inicial curva, lo que puede evitarse integrando con un punto de integración, que es lo natural cuando se consideran problemas elasto-plásticos.

8. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por CONICET y la Agencia Córdoba Ciencia S.E.

REFERENCIAS

- [1] **Flores F.G. y Oñate E.** *A basic thin shell triangle with only translational DOFs for large strain plasticity*, Int. J. Num. Meths in Engng, vol. 51, 2001, págs. 57-83.
- [2] **Oñate E. Zárata F.** *Rotation free triangular plate and shell elements*, Int. J. Num. Meths in Engng, vol. 47, 2000, págs. 557-603.
- [3] **Cirak F. Ortiz M.** *Subdivision surfaces: A new paradigm for thin-shell finite element analysis*, Int. J. Num. Meths in Engng, vol. 47, 2000, págs. 2039-2072.
- [4] **Yang D.Y., Jung D.W., Song L.S., Yoo D.J. y Lee J.H.**, *Comparative investigation into implicit, explicit and iterative implic/explicit schemes for simulation of sheet metal forming processes*, NUMISHEET'93, A. Makinouchi, E. Nakamachi, E. Oñate and R.H. Wagoner (Eds.), RIKEN, pp. 35–42, Tokyo, 1993.
- [5] **Brunet M. y Sabourin F.**, *Prediction of necking and wrinkles with a simplified shell element in sheet forming*, Int. Conf. of Metal Forming Simulation in Industry, Vol. II, pp. 27–48, B. Kröplin (Ed.), 1994.
- [6] **Rio G., Tathi B. y Laurent H.**, *A new efficient finite element model of shell with only three degrees of freedom per node. Applications to industrial deep drawing test*, en Recent Developments in Sheet Metal Forming Technology, Ed. M.J.M. Barata Marques, 18th IDDRG Biennial Congress, Lisbon, 1994.
- [7] **Rojek J., Oñate E. y Postek E.**, *Application of explicit fe codes to simulation of sheet and bulk metal forming processes* Journal of the Materials Processing Thecnology, Vol. 41, 1998, págs. 620-627.
- [8] **Huang H.C.**, *Static and Dynamic Analysis of Plates and Shells*, page 40, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [9] **Flores F.G., Oñate E. y Zárata F.**, *New assumed strain triangles for non-linear shell analysis*, Computational Mechanics, Vol. 17, págs. 107-114, 1995.
- [10] **NUMISHEET'99**, *Fourth International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Forming Processes* 13 al 19 de setiembre de 1999, Besancon, Francia
- [11] **Hill, R.** *A Theory of the Yielding and Plastic Flow of Anisotropic Metals*, Proc. Royal Society London, vol. A193, 1948, pag. 281
- [12] **STAMPACK**, *A General Finite Element System for Sheet Stamping and Forming Problems*, Quantech ATZ, Barcelona, España, ver. 5.6, 2001.

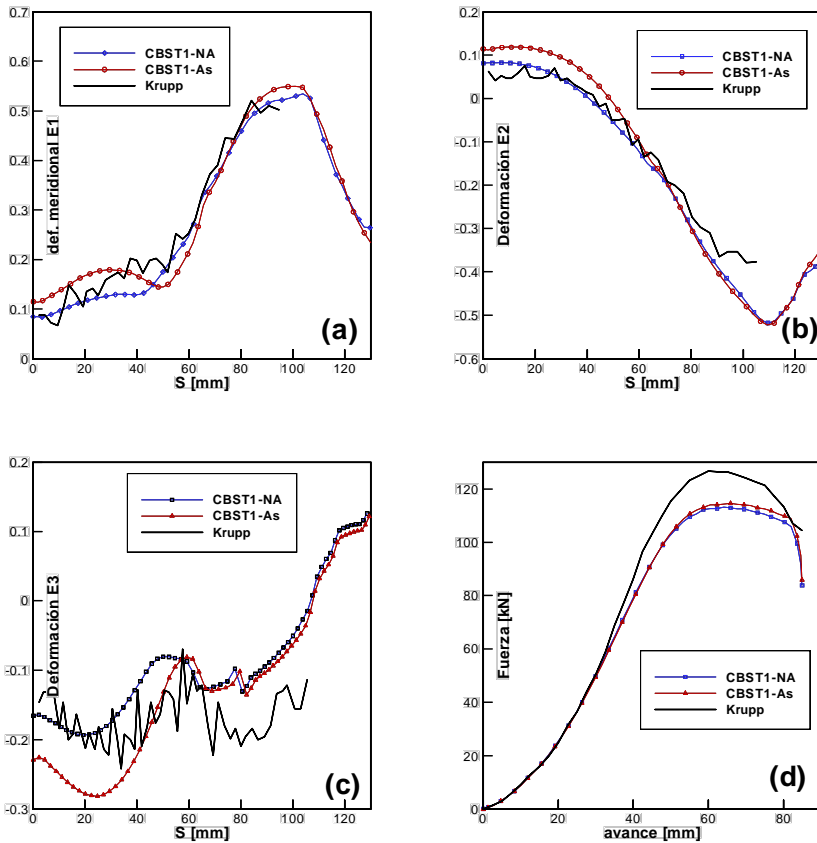


Figura 7: Resultados del benchmark de NUMISHEET. (a) Deformación meridional ϵ_1 en la dirección transversal al rolado (meridiano “A”); (b) Deformación circunferencial ϵ_2 en la dirección a 45° del rolado (meridiano “C”); (c) Deformación en el espesor ϵ_3 en la dirección del rolado (meridiano “C”); (d) Fuerza sobre el punzón vs. avance del mismo;