

## **MODELO REDUCIDO POD-GALERKIN PARA FLUJOS VISCOSOS A BAJOS RE**

**Juan D'Adamo\***, Alejandro Gronskis, Ada Cammilleri, Guillermo Artana  
Laboratorio de Fluidodinámica  
Facultad de Ingeniería UBA Argentina  
**Jorge Silvestrini**  
Departamento de Engenharia Mecânica e Mecatrônica Faculdade de Engenharia  
PUCRS Brasil

**Palabras clave:** Modelo reducido, POD, Galerkin, Bajos Re, DNS.

### **Resumen.**

El propósito de este trabajo es analizar la robustez de un modelo reducido que intenta reproducir el flujo incompresible alrededor de un cilindro a bajos números de Reynolds ( $Re=100$  a  $300$ ).

En nuestro estudio partimos de un conjunto de datos provenientes de la aplicación de la técnica Direct Numeric Simulation (DNS). El modelo involucra, en una primera etapa, la utilización de una descomposición modal conocida como Proper Orthogonal Decomposition (POD). Con ella es posible identificar las estructuras coherentes del escurrimiento y contar con unas pocas funciones base que sintetizan la dinámica esencial al contener los modos conservados la mayor parte de la energía cinética fluctuante del flujo. En una segunda etapa, sobre esta base de funciones se realiza una proyección de Galerkin de las ecuaciones de Navier Stokes, obteniéndose un sistema dinámico de bajo orden.

La resolución numérica del sistema dinámico permite reconstruir con éxito el escurrimiento, el cual se reproduce en el tiempo sin las demandas computacionales propias de DNS. El modelo resulta válido para un entorno de número de Reynolds cercano al del escurrimiento dato y da lugar a la posterior aplicación del método a problemas de optimización y control, permitiendo iteraciones menos costosas que utilizando directamente DNS.

Presentamos resultados del comportamiento del sistema dinámico de bajo orden de nuestro estudio ante las variaciones en distintos parámetros del conjunto de datos extraídos de la simulación DNS: tamaño de la grilla del campo de velocidades con la que se trabaja, intervalo de tiempo entre los campos de velocidades, nivel de ruido de dichos campos y el número de campos considerado para extraer las funciones base.

---

\*Departamento de Ingeniería Mecánica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires Av. Paseo Colón 850 C1063ACV - Buenos Aires - Argentina. [jdadamo@fi.uba.ar](mailto:jdadamo@fi.uba.ar)

# 1 TÉCNICA POD-GALERKIN

## 1.1 Proper Orthogonal Decomposition

La descomposición ortogonal de la covarianza es un procedimiento clásico conocido como *descomposición de Karhunen-Loeve* o *análisis de componentes principales*. Lumley et al.<sup>1,2</sup> se refieren a ella como *Proper Orthogonal Decomposition* (POD).

La POD es un procedimiento lineal que no requiere que el proceso bajo estudio lo sea, y que, usada para analizar datos experimentales o computacionales en el contexto de Mecánica de Fluidos, nos permite extraer patrones dominantes, o *estructuras coherentes* de los escurrimientos<sup>2</sup>. Nos provee de una base de funciones con las que identificamos un subespacio de baja dimensión sobre el cual podemos construir un modelo que describe la dinámica esencial del escurrimiento mediante la proyección de las ecuaciones que definen el problema.

Consideramos un conjunto de datos representados como una función del espacio y del tiempo. En el espacio  $(L^2(\Omega))^3$  donde  $\Omega$  es un conjunto acotado de  $R^3$ , y con el producto interno definido por  $(a, b) = \int_{\Omega} a \cdot b \, dx$ , la POD determina una base de funciones

ortonormales que dependen del espacio, que permiten expresar los datos en forma óptima. Más precisamente, si  $\tilde{u}(x, t)$  es una función del espacio y del tiempo, y  $E(\cdot)$  indica el promedio

temporal en la forma  $E(\cdot) = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T (\cdot) \, dt$ , la POD determina funciones ortonormales

$\hat{t}_j(x)$ ,  $j=1, \dots, M$  tales que la proyección de  $\tilde{u}(x, t)$

sobre las primeras  $n$  funciones  $\tilde{u}(x, t) = \sum_{j=1}^n a_j(t) \hat{t}_j(x)$

minimiza el error  $E(\|\tilde{u} - \vec{w}\|_2^2), \forall \vec{w}$ .

Las funciones  $\hat{t}_j$  se calculan resolviendo la ecuación integral

$$\int K(x, y) \hat{t}_j(y) \, dy = \lambda_j \hat{t}_j(x)$$

donde el núcleo  $K(x, y)$  se define como  $K(x, y) = E(\tilde{u}(x, t) \tilde{u}(y, t))$ .

En la práctica los datos son discretizados en tiempo y espacio con lo cual la ecuación integral se reduce a un problema estándar de autovalores. Comencemos considerando que datos del problema como el que queremos analizar, pueden ser descriptos por un conjunto de  $M$  vectores  $\tilde{u}(x, t)$ , donde  $x$  representa coordenadas espaciales,  $t$  el tiempo y  $\tilde{u}$  la función velocidad. Supongamos que pueden obtenerse repetidamente medidas de dicha función  $\tilde{u}$ , para la misma grilla en el espacio y en sucesivos tiempos discretos  $t_j$ . Luego, se cuenta con un conjunto de

vectores de la forma  $\{\vec{u}(\mathbf{x}, t_j) : j=1, \dots, M\}$  donde  $\vec{u}(\mathbf{x}, t_j) = (\vec{u}(\mathbf{x}_1, t_j), \dots, \vec{u}(\mathbf{x}_N, t_j))$  para  $N$  puntos de la grilla  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ .

Escrito en forma matricial, sea

$$U = \begin{pmatrix} \vec{u}_1^{(1)} & \vec{u}_1^{(2)} & \dots & \vec{u}_1^{(M)} \\ \vec{u}_2^{(1)} & \vec{u}_2^{(2)} & \dots & \vec{u}_2^{(M)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{u}_N^{(1)} & \vec{u}_N^{(2)} & \dots & \vec{u}_N^{(M)} \end{pmatrix}$$

donde  $\vec{u}_i^{(j)} = \vec{u}(\mathbf{x}_i, t_j)$ .

La matriz representa por filas el valor que toma  $\vec{u}$  en las  $N$  coordenadas de la grilla y por columnas su valor en los  $M$  instantes. Siendo la velocidad una magnitud vectorial, puede descomponerse en tres componentes escalares según las coordenadas espaciales  $\vec{u} = (u, v, w)$ . Asimismo, por la naturaleza del fenómeno físico, el comportamiento de  $U$  resulta ergódico, es decir que son intercambiables los promedios temporales y el del conjunto de valores aleatorios que puede adoptar cada componente de  $U$ . Como consecuencia, el valor medio del escurrimiento y su función de autocorrelación son independientes del tiempo. A partir de ello, podemos descomponer a la señal que representa  $\vec{u}$  según la POD.

Como es usual en el estudio de turbulencia, descomponemos al campo de velocidades de un escurrimiento en un valor medio al que se superponen fluctuaciones, es decir  $\vec{u} = \vec{u}_m + \vec{u}'$ , siendo

$$\vec{u}_m(\mathbf{x}) = E(\vec{u}(\mathbf{x}, t)) = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{u}(\mathbf{x}, t) dt$$

Para  $M$  suficientemente grande es una buena aproximación considerar

$$\vec{u}_m(\mathbf{x}) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M u(\vec{\mathbf{x}}, t_i)$$

resultando  $E(\vec{u}'(\mathbf{x}, t)) = 0$ .

La parte fluctuante del campo vectorial puede ser vista como un proceso estocástico, un vector de  $N$  componentes que evoluciona en el tiempo en forma aleatoria. Notemos por simplicidad  $u$ , en lugar de  $u'$  :

$$u = \begin{pmatrix} \vec{u}_1^{i(1)} & \vec{u}_1^{i(2)} & \dots & \vec{u}_1^{i(M)} \\ \vec{u}_2^{i(1)} & \vec{u}_2^{i(2)} & \dots & \vec{u}_2^{i(M)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{u}_N^{i(1)} & \vec{u}_N^{i(2)} & \dots & \vec{u}_N^{i(M)} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Para el conjunto de columnas que conforman  $u$ , se construye una matriz de  $M \times M$

$$R_u = E[u^* u] \quad (2)$$

Donde  $u^*$  es la traspuesta conjugada de  $u$ .  $R_u$  coincide con la matriz de covarianza del proceso  $C_u$  pues  $u$  tiene media nula.

Se considera a continuación un conjunto de vectores  $\hat{t}_i$  ortonormal particular, es el que surge de los autovectores correspondientes a la matriz de covarianza  $C_u$ . Esta matriz es semidefinida positiva por construcción (2), luego tiene sus autovalores reales positivos.

$$C_u \hat{t}_i = \lambda_i \hat{t}_i \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \geq 0 \quad (3)$$

donde  $\langle \hat{t}_i, \hat{t}_j \rangle$  indica producto interno canónico en  $\mathbb{R}^N$ .

Si los autovalores no nulos se organizan en una matriz  $\Lambda$  diagonal en la forma  $diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  tal  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$  que

los autovectores pueden agruparse en una matriz unitaria  $\Phi$  de modo que:

$$C_u = \Phi \Lambda \Phi^T = \begin{pmatrix} \hat{t}_1 & & & 0 \\ & \hat{t}_2 & & 0 \\ & & \dots & \\ & & & \hat{t}_r \\ & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \hat{t}_i$$

Puede entonces escribirse  $u^{(k)}$  como:

$$u^{(k)} = \sum_{i=1}^M \langle \hat{t}_i, u^{(k)} \rangle \hat{t}_i \quad (4)$$

donde los coeficientes del desarrollo son:  
 $a_i^{(k)} = \langle u^{(k)}, \hat{t}^{(i)} \rangle$ .

Puede comprobarse que la descomposición corresponde a la que se obtiene calculando los valores singulares de la matriz  $u$ .

$$u^*u = \hat{t} \begin{pmatrix} \hat{t} & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & \hat{t} \end{pmatrix} \hat{t} \quad (5)$$

Utilizamos para nuestros datos los algoritmos que componen el paquete LAPACK de Matlab. Para llevar a cabo el método en la práctica, se evalúa la magnitud del número de observaciones  $M$  respecto a la cantidad de puntos de la grilla  $N$ . Como, en definitiva, buscamos la descomposición en valores singulares de  $u$ , el problema de autovalores no nulos de  $u^*u$  es el mismo que el de  $uu^*$ . El primer caso implica trabajar con una matriz de  $R^{M \times M}$ , el segundo con una matriz de  $R^{N \times N}$ .

A diferencia del primer caso, expuesto en (2), la segunda forma expresa a la matriz de correlación espacial de  $u$ . Si  $N \gg M$ , como ocurre por la naturaleza de nuestras experiencias, resulta más conveniente resolver el problema de  $u^*u$ , matriz de  $R^{M \times M}$ .

### 1.2 Propiedades de la descomposición

- Los coeficientes temporales  $a_i^{(k)}$  son no correlacionados.  
 A partir de la descomposición en valores singulares se tiene que la matriz de covarianza es diagonal, es decir:

$$C_a = [a_i^{(k)} a_j^{(k)}] = D$$

- La energía del vector columna  $u^{(k)} = \sum_{i=1}^M (a_i^{(k)})^2 = \sum_{i=1}^M \hat{t}^{(i)}$
- Puede demostrarse que el error cuadrático medio de un desarrollo con  $s$  coeficientes es:

$$e^2 = \sum_{i=e+1}^M (a_i^{(k)})^2 = \sum_{i=e+1}^M \hat{t}^{(i)}$$

- El error cuadrático medio por truncamiento con POD es el mínimo entre todas las bases posibles.

$$e^2 = \sum_{i=e+1}^M \hat{t}^{(i)} \quad e_1 = \sum_{i=e+1}^M (\hat{t}^{(i)}) * C_u$$

### 1.3 Proyección de Galerkin

Para tener una descripción completa de la evolución temporal de un escurrimiento, recurrimos a las ecuaciones de conservación de la masa o de *continuidad* y a la de la conservación de cantidad de movimiento ( $\vec{I}$   $\vec{u}$ ), la ecuación de Navier Stokes. En flujos con fuerzas volumétricas despreciables frente al resto de las magnitudes, estas ecuaciones pueden resumirse en:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \vec{u} \cdot \vec{u} = - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (7)$$

donde  $p$  es la presión,  $\rho$  es la densidad y  $\nu$  la viscosidad cinemática.

Una forma de estudiar los complejos escurrimientos turbulentos, es el desarrollo de modelos reducidos de la ecuación de Navier Stokes. Las soluciones de Navier Stokes pertenecen a un espacio de dimensión infinita mientras que las soluciones de sistemas reducidos se expresan en términos de una cantidad finita de funciones. Para conseguir un modelo reducido, una manera consiste en efectuar una proyección de Galerkin de la ecuación sobre una base finita de funciones ortogonales. El resultado es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. La base sobre la cual se realiza la proyección no es otra que la calculada anteriormente como los autovectores del problema de descomposición en valores singulares del flujo. La reducción es crucial en el sentido que permite en muchos casos un análisis de estabilidad y bifurcación. (Este análisis es prácticamente imposible por el tamaño del sistema por otros procedimientos)

Se dispone entonces de una base óptima respecto a la energía cinética de la parte fluctuante del escurrimiento  $\vec{U}$ . En busca de un modelo simplificado del escurrimiento, se trunca en  $s$  autovectores o *modos* la descomposición (4). Para  $\vec{u}' = (u', v', w')$  la descomposición se escribe según

$$\vec{u}'^{(k)} = \sum_{i=1}^s a_i^{(k)} \vec{f}_i \quad (i)$$

El escurrimiento total:

$$\vec{u}^{(k)} = \vec{u}_m + \sum_{i=1}^s a_i^{(k)} \vec{f}_i \quad (i)$$

Recordando que  $\vec{u}(\mathbf{x}, t_k) = (\vec{u}(\mathbf{x}_1, t_k), \dots, \vec{u}(\mathbf{x}_N, t_k))$  para  $N$  puntos de la grilla  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ .

$$\vec{u}^{(k)} = \vec{u}(\mathbf{x}, t_k) = \vec{u}_m(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^s a_i^{(k)} \vec{f}_i \quad (i)(\mathbf{x})$$

La aplicación de la técnica POD-Galerkin conduce a la obtención de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE) cuadráticas de expresión general:

$$\frac{da^j}{dt} = D_j + \sum_{j=1}^s L_{ij} a^j + \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s Q_{ijk} a^j a^k \quad (8)$$

donde  $D_i$ ,  $L_{ij}$  y  $Q_{ijk}$  son coeficientes de los términos independientes, lineales cuadráticos respectivamente

Para evitar el tratamiento del término debido al campo de presión  $p$ , de la ecuación (7) puede derivarse la ecuación de conservación de la vorticidad  $\vec{\omega}$ . En efecto, aplicando el operador rotor a (7) se obtiene:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \nabla \vec{\omega} \cdot \vec{u} = \nabla \vec{u} \cdot \vec{\omega} \quad (9)$$

y desaparece el término debido a  $p$  pues  $\nabla \times \nabla p = 0$ . Para simplificar la notación, definimos

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{f}$$

Luego, puede descomponerse a

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_m + \vec{\omega}'$$

Resulta:

$$\vec{\omega}(\mathbf{x}, t_k) = \vec{\omega}_m(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^s a_i^{(k)} \vec{\omega}'$$

La ecuación (9) y la (6) pueden escribirse en términos

de  $\vec{\omega}_m$ , de  $\vec{\omega}'$ , de  $\vec{u}_m$  y de  $\vec{u}'$ .

Combinadas, dan lugar a la llamada ecuación de Reynolds de la conservación de la vorticidad:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \nabla(\vec{\omega} \cdot \vec{u}) - (\nabla(\vec{u}') \vec{\omega}')_m + \nabla(\vec{u}') \vec{\omega}'_m + \nabla(\vec{u}_m) \vec{\omega}' + \nu \nabla^2 \vec{\omega}' \quad (10)$$

Las cantidades con el subíndice  $m$  indican promedios temporales mientras que las cantidades primadas significan valores fluctuantes. En particular, si trabajamos con flujos bidimensionales, sólo tiene dirección  $z$  y así varios términos de (10) se eliminan:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \nabla_z(\vec{\omega} \cdot \vec{u}') - (\nabla(\vec{u}') \vec{\omega}')_m + \nabla(\vec{u}') \vec{\omega}'_m + \nabla(\vec{u}_m) \vec{\omega}' + \nu \nabla^2 \vec{\omega}' \quad (11)$$

Las componentes  $(u, v, w)$  de velocidad y  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  de vorticidad

pueden ser vistas como elementos de  $L^2[\Omega]$ , donde  $\Omega$  representa el dominio espacial ocupado por el flujo. Se cumple que:

$$\int_{\Omega} |u(\mathbf{x}, t)|^2 d\Omega < \infty, \int_{\Omega} |v(\mathbf{x}, t)|^2 d\Omega < \infty, \int_{\Omega} |\dot{\mathbf{r}}_k(\mathbf{x}, t)|^2 d\Omega < \infty$$

En este esquema, podemos proyectar la ecuación (11) en el subespacio generado por las  $\hat{\mathbf{r}}^{(k)}(\mathbf{x}), k \in \{1, 2, \dots, s\}$ . Se consigue convertir dos ecuaciones diferenciales no lineales con derivadas parciales en  $s$  ecuaciones diferenciales de orden 1 cuadráticas:

$$M \mathbf{a}_k = L \mathbf{a}_k + \mathbf{a}_k^T (\mathbf{C})_k \mathbf{a}_k + I_{dp} \quad (12)$$

siendo  $\mathbf{a}_k = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ \vdots \\ a_s(t) \end{pmatrix}$

donde

$$\begin{aligned} M(i, j) &= \iint_{\Omega} \hat{\mathbf{r}}_i \hat{\mathbf{r}}_j d\Omega \\ L(i, j) &= \nu \iint_{\Omega} \nabla^2 \hat{\mathbf{r}}_i \hat{\mathbf{r}}_j d\Omega \end{aligned} \quad (13)$$

y cada

$$\begin{aligned} C(i, j)_k &= - \iint_{\Omega} (\nabla \hat{\mathbf{r}}_i \cdot \nabla \hat{\mathbf{r}}_j) \hat{\mathbf{r}}_k \\ I_{dp}(i) &= (\hat{\mathbf{r}}_i \cdot \nabla \hat{\mathbf{r}}_i) \cdot \text{diag}(\mathbf{C}_i) \end{aligned}$$

$k \in \{1, 2, \dots, s\}$

#### 1.4 Resolución del sistema

El truncamiento realizado en pos de la reducción del sistema elimina la presencia de modos que, pese a no poseer una elevada energía cinética respecto a los conservados, contribuyen a la estabilidad del modelo.

Desde un punto de vista físico, los modos descartados se hallan asociados a las estructuras más pequeñas del flujo, responsables de mecanismos de disipación de la energía del sistema. Al no tener en cuenta la influencia de los modos descartados, se obtienen modelos de soluciones incapaces de disipar la energía contenida en los modos conservados, por ello, inestables. Esta posibilidad de inestabilidad se hace más importante a medida que la fracción de energía descartada se hace más grande respecto a la conservada, que es cuando se estudian problemas con números de Reynolds elevados y crecientes donde la turbulencia es más acentuada.

Para estabilizar los modelos reducidos existen varias propuestas. Entre ellas destacamos:

- El agregado de una viscosidad turbulenta suplementaria que permite modificar los términos lineales (13) y así estabilizar el sistema dinámico como se describe en <sup>4</sup>. Significa modelar la acción de los modos descartados mediante una disipación artificial de los modos conservados en el sistema. En vez de disipar solamente por intermedio del término que contiene  $\nu \nabla^2 \hat{u}_0$  se afecta a  $\nu$  por un parámetro  $\alpha$  de modo que queda  $\nu(1 + \hat{t}) \nabla^2 \hat{u}_0$ . El parámetro se introduce en el sistema hasta lograr que el mismo no tenga soluciones ni divergentes ni triviales.
- El cálculo de los coeficientes de la ecuación (12) mediante su aproximación por cuadrados mínimos. Como en el método anterior, se modifican los coeficientes de la ecuación para representar la acción de los modos descartados. En este caso, esto se hace sin hipótesis a priori sobre cómo se modifican las matrices. Además, con este método se evita el cálculo de las expresiones completas de los coeficientes matriciales de la ecuación como integrales en  $\Omega$  de expresiones que contienen hasta derivadas de orden 3. Distintas formas de resolución fueron planteadas por <sup>5, 6 y 7</sup>.

A continuación describimos el método que seguimos.

En el cálculo de los coeficientes  $D_i$ ,  $L_{ij}$ ,  $Q_{ijk}$  intervienen los productos internos de los modos espaciales y de sus derivadas; por lo tanto, cuando la resolución espacial es insuficiente, su determinación puede efectuarse según el último enfoque, que evita el cálculo directo.

Consideramos la construcción de un sistema lineal con incógnitas  $D_i$ ,  $L_{ij}$ ,  $Q_{ijk}$  y su resolución en el sentido de cuadrados mínimos <sup>6, 7</sup>.

La ecuación (12) puede describirse de la forma  $\frac{da^j}{dt} = \sum_{k=1}^s x_k P_k(a^1, \dots, a^s)$  donde  $x_k$  representa a cada incógnita y  $P_k$  representa a un polinomio de grado menor o igual a 2.

Como con los datos con los cuales trabajamos hay buena resolución temporal, tenemos una buena aproximación de  $\frac{da_i}{dt}$ .

Definiendo

$$\begin{aligned}
 X &= (I_{dp} \dots L_{ij} \dots \dots C_{ijk} \dots)^T \\
 A &= \begin{pmatrix} 1 & \dots & a_j(t_1) & \dots & a_j(t_1)a_k(t_1) & \dots \\ 1 & \dots & a_j(t_2) & \dots & a_j(t_2)a_k(t_2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & a_j(t_M) & \dots & a_j(t_M)a_k(t_M) & \dots \end{pmatrix} \\
 B &= (a_j(t_1), \quad a_j(t_2), \quad \dots \quad a_j(t_M)) \quad )^T
 \end{aligned} \tag{14}$$

consideramos resolver el sistema  $AX=B$  en el sentido de cuadrados mínimos.  
Con este criterio observamos los resultados obtenidos.

## 2 APLICACIÓN

Se disponen datos sobre el flujo alrededor de un cilindro atacado por un flujo uniforme a  $Re=200$ . Los datos son campos de velocidades 2D que provienen de simulación numérica DNS, Direct Numeric Simulation <sup>8</sup>. Se trabaja sobre un dominio de  $L_x/D=19$  y  $L_y/D=12$  con una resolución de malla de  $685 \times 433$ . La resolución permite que todas las escalas correspondientes al número de Reynolds considerado sean resueltas. Así el paso en la grilla  $dx \leq \hat{l}$  donde  $\hat{l}$

es la escala disipativa de Kolmogorov,  $\hat{l} \sim \frac{D}{Re^{3/4}}$ . El

paso de tiempo de resolución fue de 0.012 s para asegurar la estabilidad del método de integración temporal Runge Kutta 3.

Experimentalmente para este problema, sabemos que el número de Strouhal

$St = \frac{fD}{U_\infty} \sim 0,2$ . Para obtener  $St$  a partir de las simulaciones DNS lo hacemos mediante el

cálculo del coeficiente de sustentación a lo largo del tiempo. La frecuencia dominante de esta función resulta  $St=0,1972$ .

Para obtener el modelo reducido, por razones de costo computacional, se trabajó con una malla de  $73 \times 66$  y con un paso temporal de 0,12s que permitió contar con 600 observaciones. Se ilustra en la Figura 1 una instantánea típica del escurrimiento. De la aplicación del método a este conjunto de medidas, podemos comparar la misma instantánea para el modelo reducido en la Figura 2. Obtenemos el escurrimiento promedio y la distribución de autovalores en función de los sucesivos modos (Figura 3). Es notable como en los primeros 2 modos se concentra la mayor parte de la energía cinética. En este caso, razonamos que con unas pocas variables puede describirse el sistema dinámico. Hemos seleccionado los 6 primeros modos para asegurar que el 99 % de la energía cinética fluctuante se incluya en el modelo.

Los autovectores de la descomposición de  $U$ , los modos espaciales, se asocian al tamaño de las estructuras presentes en el escurrimiento. De la teoría de turbulencia, se sabe que las estructuras de mayor tamaño son las más energéticas y así resulta en nuestra descomposición al mirar los sucesivos modos espaciales en la Figura 4.

De la resolución del sistema 14, se estiman los coeficientes matriciales de la ecuación diferencial (12). En este caso, conocemos a priori la frecuencia  $f$  dominante del flujo ya que  $St \sim 0,2$ . La dinámica exige entonces un muestreo de por lo menos  $dt \leq 2,5 \text{seg}$ . Para nuestro valor de  $dt=0,12 \text{seg}$ . cumplimos lo anterior y podemos asegurar una buena resolución temporal para evaluar las derivadas de los modos temporales.

Con el método de identificación polinomial mediante cuadrados mínimos se consigue la inclusión en el modelo de los modos descartados, como fue discutido en la sección anterior.

De esta forma aseguramos la estabilidad del sistema ODE (12).

Luego, obtenemos la solución de (12) tomando como condición inicial un valor de  $a_i$  en un instante cualquiera. Comparamos la evolución de  $a_i(t)$  con los puntos dato, es decir, con los  $a_i(t_k)$ . La Figura 5 muestra el comportamiento periódico asociado a las grandes estructuras del escurrimiento. La frecuencia que se extrae de la figura 5 conduce a un  $St=0,1968$ , valor muy cercano al de la simulación DNS.

A continuación, en la Figura 6 se muestran los diagramas de fase, que también describen el comportamiento cíclico del sistema cuando se relacionan los distintos modos. El sistema se comporta como un ciclo límite.

Para evaluar la calidad de reconstrucción del método, comparamos también el campo de vorticidad resultante en la Figura 7. Verificamos que se logra la forma de los grandes vórtices y, en una secuencia de imágenes, su dinámica de desprendimiento. Por último, graficamos en la Figura 8 los perfiles transversales de la energía cinética fluctuante promedio de la componente longitudinal de la velocidad,  $(u'u')$ <sub>m</sub>. Como en los anteriores casos, el modelo reducido consigue un buen acuerdo con la simulación DNS.

### 3 CONCLUSIONES

Se logró obtener un modelo del escurrimiento alrededor de un cilindro a  $Re=200$  mediante el método POD-Galerkin a partir de datos provenientes de simulación numérica directa (DNS). Los modos esenciales del flujo fueron extraídos y consecuentemente se trabaja con un sistema dinámico de bajo orden. Con sólo 6 modos se pudo reconstruir las características principales del escurrimiento.

Se obtuvo una solución periódica y estable del sistema utilizando el método de obtención de los coeficientes matriciales de la ecuación ordinaria mediante cuadrados mínimos.

La técnica proporciona una importante compresión de datos respecto al escurrimiento original. Futuros trabajos en optimización o bien en aplicaciones de control de flujos pueden beneficiarse de la obtención del modelo reducido.

### 4 REFERENCIAS

- [1] Lumley, J. "The structure of inhomogeneous turbulence", Atmospheric turbulence and radio wave propagation, 1967.
- [2] Holmes, P., Lumley, J., Berkooz, G. "Turbulence, coherent structures, dynamical systems and symmetry", Cambridge University Press, 1996.
- [3] Sirovich, L. "Turbulence and the dynamics of coherent structures", Quarterly of Applied Mathematics, vol. XLV, No.3, pp. 561-590, 1987.
- [4] Braud Caroline. Etude de la dynamique d'un écoulement à cisaillements croisés : interaction couche de mélange - sillage. Thèse de doctorat (12 décembre 2003), Université de Poitiers.
- [5] Braud Caroline. Identification de systèmes dynamiques, Diplôme d'Études approfondis, Université de Poitiers, 2000.
- [6] Perret, L., "Etude du couplage instationnaire, calculs-experiences en écoulements turbulents", Thèse de Doctorat, Université de Poitiers, 2002.
- [7] Couplet, M., Basdevant, C., Sagaut, P., "Modélisation de un écoulement turbulent par un système dynamique de dimension réduite", Canum 2003, Université de Montpellier II.
- [8] Lamballais, E., Silvestrini, J. Código computacional INCOMPACT3D

5 FIGURAS

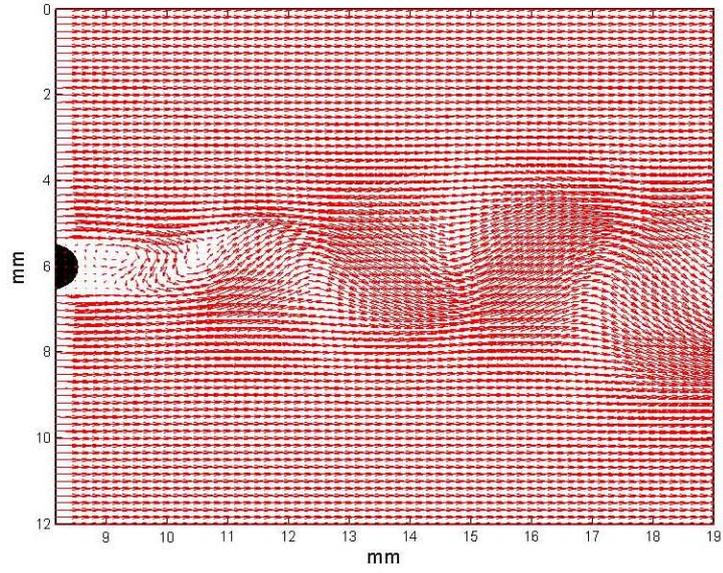


Figura 1: Campo de velocidades instantáneo.

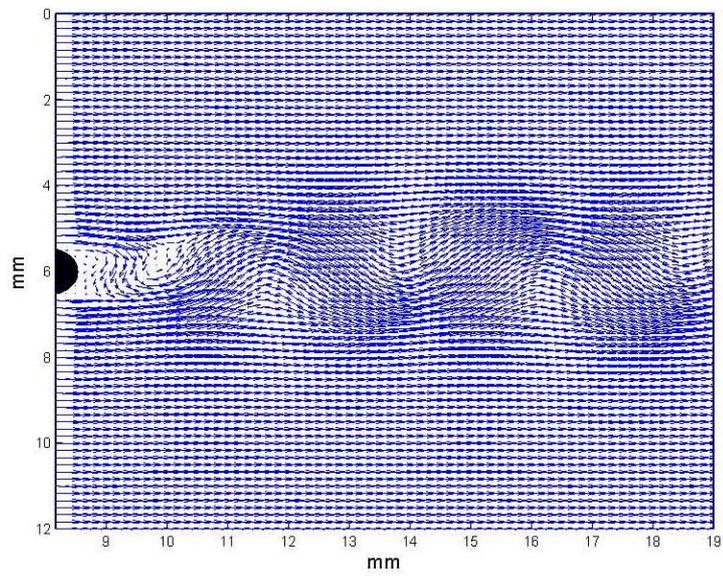


Figura 2: Campo de velocidades instantáneo del modelo reducido POD.

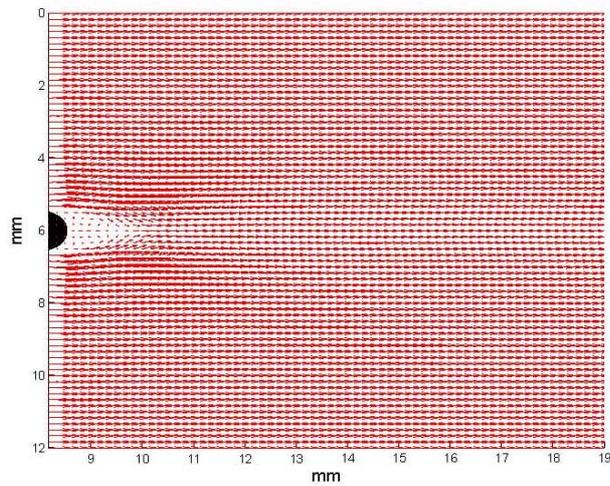
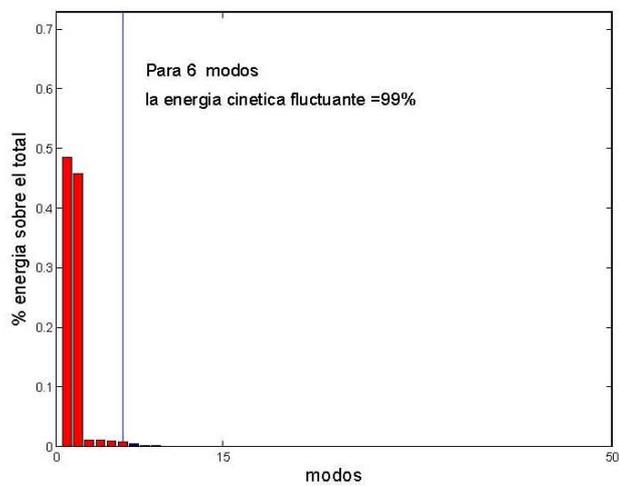


Figura 3: a) Distribución de autovalores.

b) Velocidad media.

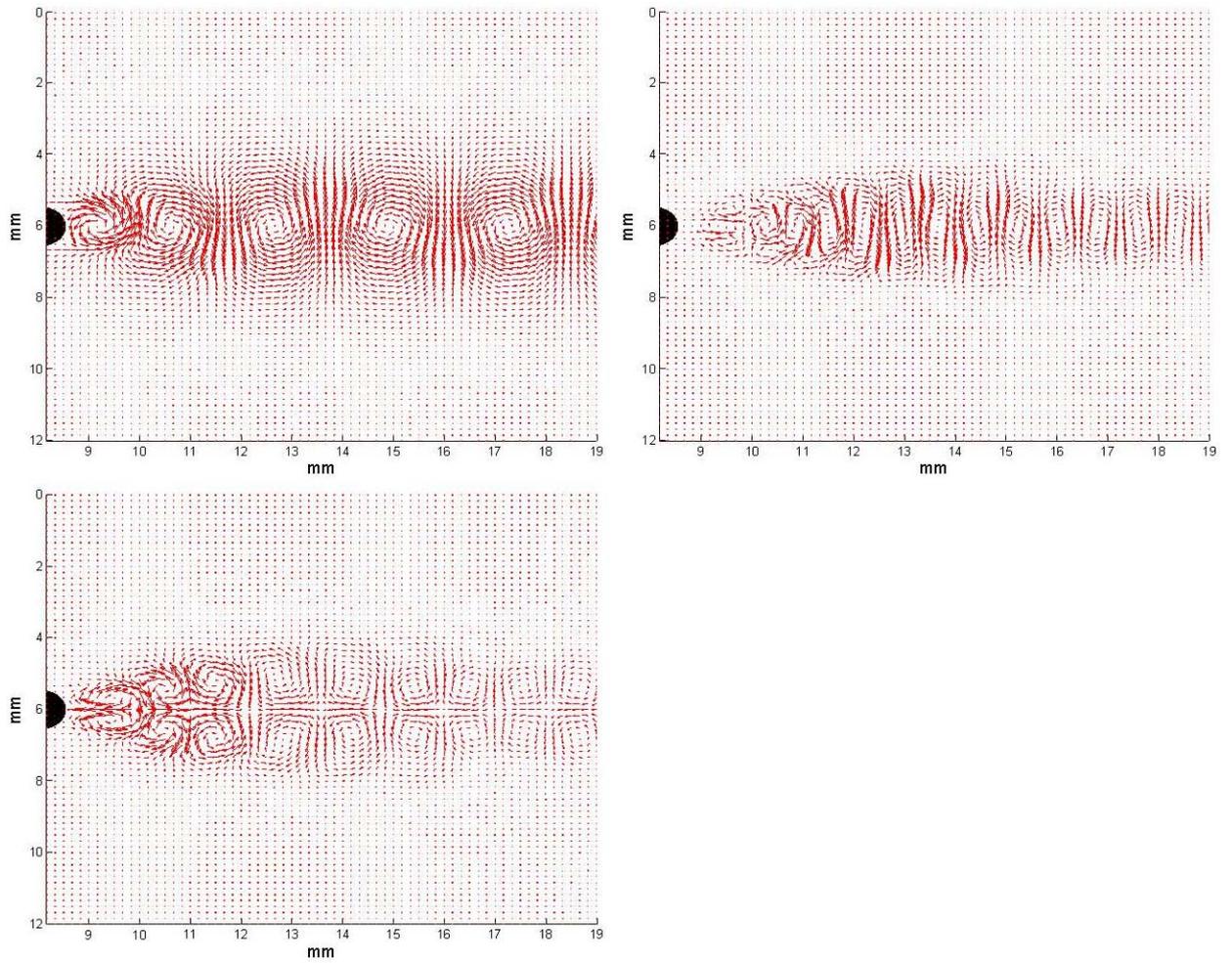


Figura 4: Modos Espaciales. Modos 1, 3 y 5.

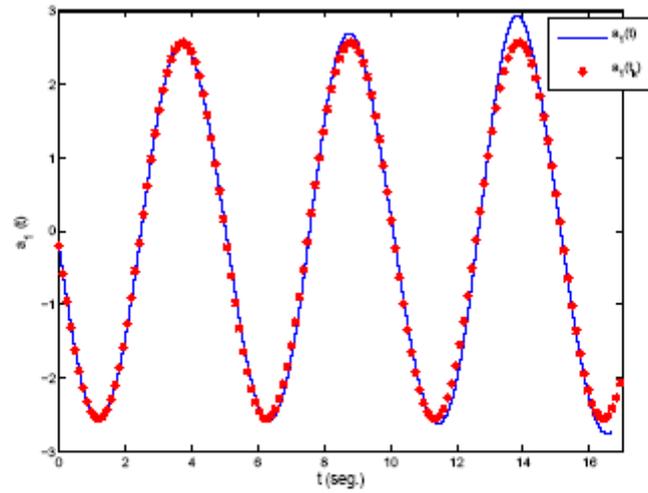


Figura 5: Solución para el primer modo temporal. Se muestran los coeficientes temporales de la descomposición en los instantes discretos  $t_k$  y los de la solución de la ODE.

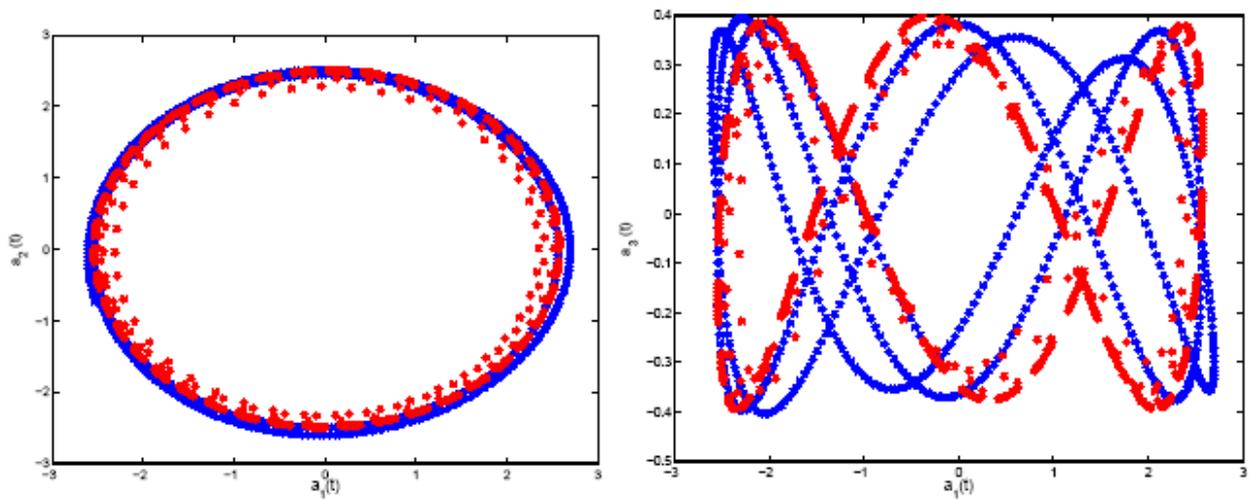


Figura 6: Diagramas de fase: se muestra el coeficiente temporal del primer modo en relación al coeficiente temporal del segundo(izq.) y del tercero(der.).

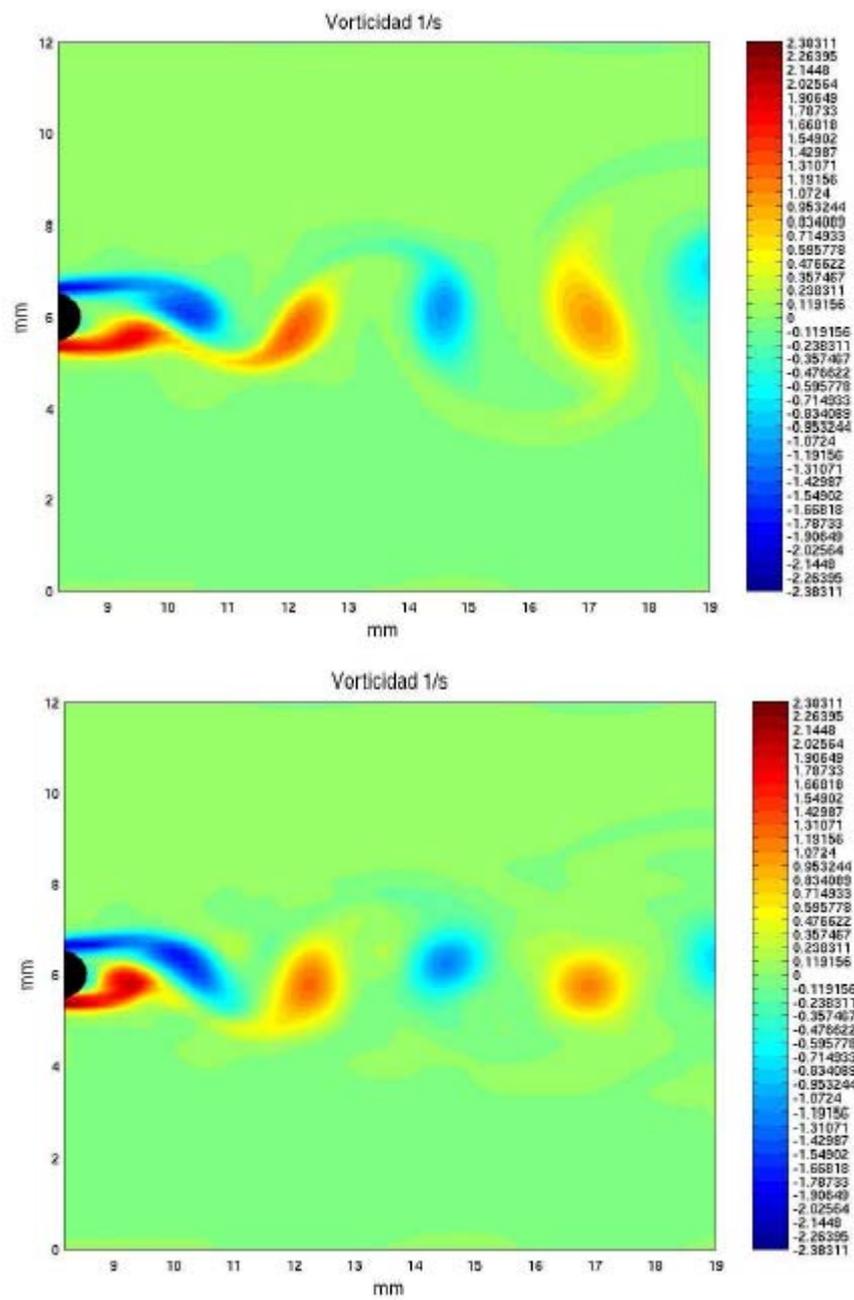


Figura 7: Campos de vorticidad instantáneos  $\omega_z$  original de los datos DNS (arriba) y reconstruido con POD-Galerkin (abajo).

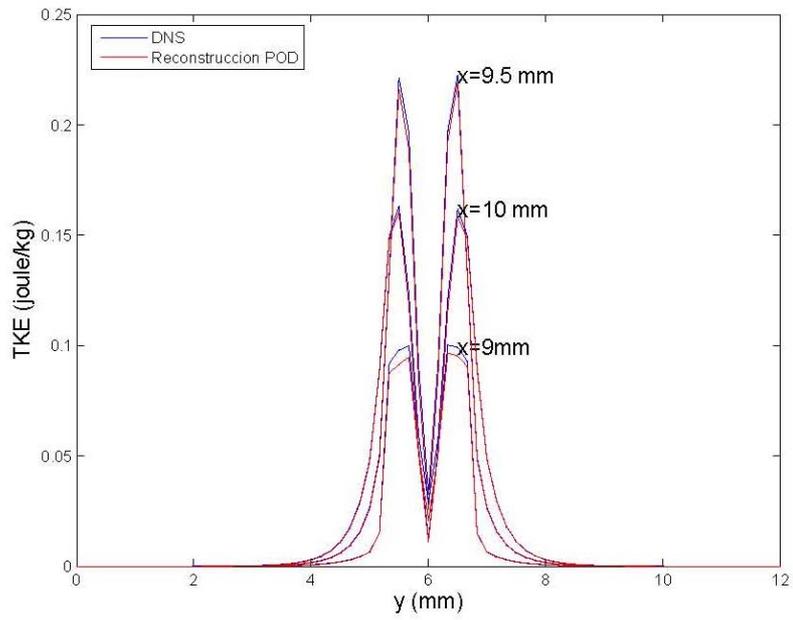


Figura 8: Perfiles transversales de la energía cinética fluctuante promedio para las posiciones  $x=9$ ,  $x=9.5$  y  $x=10$ .