

## IMPACTO DE ELEMENTOS RIGIDOS CON ELEMENTOS FLEXIBLES.

Gabriel Barrientos<sup>\*</sup>, Luis Baeza<sup>†</sup>, Rubens Sampaio<sup>&</sup>

<sup>\*</sup> Departamento de Ingeniería Mecánica  
Universidad de Concepción, Casilla 160-C, Concepción, Chile  
e-mail: [gbarrien@udec.cl](mailto:gbarrien@udec.cl)

<sup>†</sup> Industrial Support Co. Ltda.  
Suecia 84. Of.43. Providencia. Santiago. Chile  
e-mail: [lbaeza@highservice.cl](mailto:lbaeza@highservice.cl)

<sup>&</sup> Pontificia Universidade Católica – Rio de Janeiro  
Marquês de Sao Vicente 225. Gávea. CEP 22453. Rio de Janeiro. Brasil.  
e-mail: [rsampaio@mec.puc-rio.br](mailto:rsampaio@mec.puc-rio.br)

**Key words:** impacto, estructuras flexibles, mecánica no-lineal, coeficiente restitución.

**Abstract.** *Los contactos por impacto representan problemas de gran interés en distintas áreas de la ingeniería tales como: la industria automotriz, industria aeronáutica, industria nuclear y la industria minera entre otras. En este trabajo se discute el problema de impacto entre una viga en voladizo y una bola de acero desde una perspectiva teórica, usando la teoría de contacto de Hertz y un modelo de vigas no-lineal. Se comparan los resultados con la teoría presentada por Goldsmith en orden a obtener un mejor entendimiento de los resultados.*

## 1 INTRODUCCION

La palabra impacto puede ser utilizada en muchos contextos pero en general representa un fenómeno de muy corta duración. Desde el punto de vista de la ingeniería, el impacto puede ser definido como una "transferencia rápida de energía" o "aplicación rápida de fuerza", donde la palabra "rápida" se refiere a la relación entre el tiempo de impacto y los periodos naturales de vibrar de los cuerpos que impactan. Los contactos por impactos son extremadamente importantes en muchas áreas de la ingeniería, tales como la industria automotriz, industria aeronáutica, industria nuclear, industria militar y la industria minera entre otras.

Debido a su importancia, el fenómeno de impacto ha sido estudiado extensamente a lo largo de los años, y a pesar de ello, no hay una teoría única que englobe todos los tipos de impacto. Los métodos existentes para el tratamiento de los impactos pueden ser divididos en dos: el primer método es llamado *análisis local* y consiste en la integración en el tiempo de las transientes generadas por las fuerzas de impacto, donde se destacan los estudios de Goldsmith<sup>1</sup> y Thornton<sup>2</sup>. Un segundo método es llamado *análisis global*, que consiste en determinar el salto de velocidad y los cambios de configuración generados por el impacto, lo que produce nuevas condiciones iniciales para el proceso de integración en el tiempo<sup>3,4,5,6</sup>. El método de análisis global supone que el tiempo de impacto es infinitamente pequeño. Para poder establecer las nuevas condiciones iniciales del sistema, este método define un coeficiente de restitución. Este coeficiente ha sido definido por distintos autores entre los que destacan Newton, Poisson y Stronge<sup>7</sup>. El estudio de análisis global se utiliza generalmente para elementos rígidos (Pfeiffer and Glocker<sup>8</sup>, Sampaio and Cataldo<sup>9</sup> y Baeza<sup>10</sup>) donde el supuesto de instantáneo del impacto es válido y donde generalmente el objetivo es describir la cinemática del sistema sin considerar lo que ocurre durante el impacto.

Uno de los objetivos del presente trabajo es establecer qué sucede en el instante de impacto, objetivo que no busca el análisis global; se realiza la integración en el tiempo de las transientes generadas por las fuerzas de impacto. Por medio de este análisis local se pueden establecer las fuerzas, deformaciones, esfuerzos y tiempo de contacto entre los cuerpos en el instante del impacto.

Para realizar el estudio de los impactos en estructuras flexibles se comenzará con el estudio de la teoría de contacto de Hertz enfocada desde el punto de vista del análisis local mostrado por Goldsmith<sup>1</sup>, la cual unida a la ecuación del movimiento de la viga puede establecer la forma, la magnitud y el tiempo de duración de las fuerzas de contacto. El problema que presenta este estudio es que cualquier cambio en las condiciones de contorno de la viga implica un gran manejo de herramientas matemáticas para poder establecer la respuesta en el tiempo de la viga, con lo cual este método queda limitado sólo a vigas donde se conoce previamente la forma de los modos de vibrar.

Con el objetivo de poder establecer un método mas general para la solución de problemas de impacto se ocupa el modelo no lineal de vigas presentado por Simo<sup>11</sup>, el cual está basado en el método de los elementos finitos y que fue programado por Barrientos<sup>12</sup> en ambiente Matlab, por medio de lo cual se logra generalizar el problema de impacto que podrá ser utilizado para distintos casos. A través de este programa se podrán extraer todas la variables

de interés para el estudio mecánico. No se consideran los efectos de disipación de energía ya sea a través de ruido, calor o resistencia del aire, como tampoco serán considerados efectos de fricción en la superficie de impacto.

## 2 IMPACTO

El Impacto entre dos cuerpos comienza cuando la distancia relativa entre ellos tiende a cero, con lo cual aparece una fuerza que se opone a la penetración entre los cuerpos (fuerza de contacto). El choque termina cuando la fuerza de contacto se hace nula. En el instante que los cuerpos están en contacto (impacto), se pueden distinguir dos fases: la fase de compresión y la fase de expansión. La fase de compresión comienza cuando la distancia relativa entre los cuerpos es igual a cero y la velocidad relativa entre ellos es menor que cero, generándose la fuerza de contacto. Esta fase termina cuando la velocidad relativa entre los cuerpos es cero, dando paso a la etapa de expansión, la cual termina cuando la fuerza de contacto es cero.

La fuerza de contacto, producto del impacto, se distribuye a través de las superficies de contacto de los cuerpos, produciendo una cierta distribución de esfuerzos que dependerá de la geometría de las superficies en contacto de acuerdo con la teoría de Hertz (Goldsmith<sup>1</sup>).

### 2.1 Estimación de la fuerza de contacto

El impacto transversal entre una masa rígida con una velocidad inicial  $v_0$  y una viga flexible ha sido desarrollada a través de varios métodos que utilizan consideraciones energéticas. Para comenzar el estudio se describe la ecuación del movimiento de los cuerpos, para lo cual Goldsmith ocupa la ecuación del movimiento para vibraciones forzadas del modelo de vigas Euler-Bernoulli:

$$EI \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 \omega}{\partial \tau^2} = \bar{F}(c, \tau) \quad (1)$$

Donde E es el módulo de elasticidad, I es el momento de inercia,  $\rho$  es la densidad del material y A es el área transversal de la viga. El término  $\bar{F}$  establece la fuerza de contacto, la cual varía en el tiempo  $\tau$  y a lo largo de barra  $x$ . Esta fuerza sólo debe considerarse para el punto de contacto  $c$ . Para cualquier caso la ecuación de deflexión de la viga puede ser escrita como:

$$\omega = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i(x) q_i(\tau) \quad (2)$$

El término  $\chi_i(x)$  representa los distintos modos de vibrar de la viga, los cuales dependen de las condiciones de borde. El término  $q_i(\tau)$  establece las vibraciones transversales que dependen de las frecuencias naturales del sistema. Este término es encontrado a través de las ecuaciones de Lagrange evaluando la energía cinética T y energía potencial V. Descomponiendo la fuerza generalizada como  $F(\tau) \chi_i(c)$ , se puede expresar:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \dot{q}_i^2 \rho A \int_0^L \chi_i^2 dx \quad \text{y} \quad V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} q_i^2 AE \int_0^L \left( \frac{\partial^2 \chi_i}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (3)$$

Tal que

$$\left[ \rho A \int_0^L \chi_i^2 dx \right] \ddot{q}_i + \left[ AE \int_0^L \left( \frac{\partial^2 \chi_i}{\partial x} \right)^2 dx \right] q_i = F(\tau) \chi_i(c) \quad (4)$$

La solución general a esta ecuación diferencial, multiplicada a los modos de vibrar  $\chi_i$  da la solución de las vibraciones producto del impacto:

$$w(x, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i \left[ q_0 \cos \omega_i \tau + \frac{\dot{q}_0}{\omega_i} \text{sen} \omega_i \tau + \frac{\chi_i(c)}{\rho A \omega_i \int_0^L \chi_i^2 dx} \int_0^{\tau} F(\bar{\tau}) \text{sen} \omega_i (\tau - \bar{\tau}) d\bar{\tau} \right] \quad (5)$$

Donde  $q_0$  y  $\dot{q}_0$  son el desplazamiento y velocidad inicial de la viga respectivamente, y  $\bar{\tau}$  es la variable temporal de integración. La ecuación (5) puede ser dividida en dos: la primera que incluye los términos que acompañan a  $q_0$  y  $\dot{q}_0$  que representa la respuesta estacionaria del sistema, y la segunda como el término que acompaña la fuerza y representa la respuesta transiente, que es de interés al momento del impacto. La incógnita de esta ecuación es la fuerza de contacto, ya que hasta el momento no se sabe su magnitud y distribución en el tiempo. Para determinar la fuerza de contacto se utilizan: la parte transiente del desplazamiento de la viga, la ecuación del movimiento de la masa golpeadora y la teoría de contacto de Hertz. Si los cuerpos fuesen rígidos no habrá penetración, de manera que en el punto de contacto se debe cumplir que:

$$v_0 \tau - \frac{1}{m_2} \int_0^{\tau} d\tau \int_0^c F d\tau = \frac{1}{\rho A} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\chi_i^2(c)}{\omega_i \int_0^L \chi_i^2 dx} \int_0^{\tau} F(\bar{\tau}) \text{sen} \omega_i (\tau - \bar{\tau}) d\bar{\tau} \quad (6)$$

$$\omega_2 \text{ de masa golpeadora} = \omega_1 \text{ transiente de la viga}$$

Lo que equivale a que el desplazamiento de ambos puntos es igual durante todo el tiempo de impacto. Para el caso de cuerpos elásticos esta hipótesis no es válida ya que entre ambos cuerpos hay una penetración  $\alpha = \omega_1 - \omega_2$ , con lo cual la ecuación (6) queda:

$$\alpha = v_0 \tau - \frac{1}{m_2} \int_0^{\tau} d\tau \int_0^c F d\tau - \frac{1}{\rho A} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\chi_i^2(c)}{\omega_i \int_0^L \chi_i^2 dx} \int_0^{\tau} F(\bar{\tau}) \text{sen} \omega_i (\tau - \bar{\tau}) d\bar{\tau} \quad (7)$$

La ecuación (7) sólo podrá ser resuelta si se conocen las frecuencias naturales  $\omega_i$  y los modos de vibrar de la viga  $\chi_i$  de antemano, lo cual no siempre es fácil, debido a las condiciones de borde del sistema.

### 3 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS DE LA VIGA FLEXIBLE

El modelo presentado por Simo<sup>11</sup> es un modelo que generaliza el modelo de Reissner<sup>13</sup> y debe ser considerado como una parametrización conveniente del modelo de Antman<sup>14</sup> basado en el modelo de viga de Kirchhoff-Love<sup>15</sup> que considera extensión y corte. El modelo de viga usado considera cizallamiento, extensión, flexión y torsión de la viga.

Los trabajos presentados por Simo<sup>11,16,17</sup> fueron programados por Barrientos<sup>12</sup> en ambiente Matlab, generando un programa computacional que permite estudiar la cinemática y dinámica de vigas con comportamiento lineal y no lineal, aplicados a sistemas de multicuerpos flexibles, incluyendo efectos de cizallamiento, tracción y torsión. El elemento de viga es discretizado usando el método de los elementos finitos y la integración del sistema de ecuaciones no lineales se realiza usando el método de Newton-Raphson asociado al algoritmo de integración temporal HHT<sup>18,19</sup>.

#### 3.1 Configuración.

El modelo se basa en elegir dos diferentes marcos de referencia para la descripción del mecanismo de deformación: uno fijo a la sección  $\mathbf{t}_i$ , y el otro de referencia  $\mathbf{E}_i$ . La figura 1 esquematiza el modelo de viga utilizado.

Donde  $\mathbf{t}_i(S, \tau)$ ;  $i=1,2,3$  representan vectores bases ortogonales de un marco móvil fijo a una sección transversal cualquiera,  $S$  representa la coordenada curvilínea a lo largo de la línea de centroides de la viga sin deformar y  $\tau$  es el tiempo  $\in \mathcal{R}^+$ . El origen de  $\mathbf{t}_i$  está fijo a la línea de centroidal de la sección y  $\mathbf{t}_3(S)$  permanece siempre normal a ella.  $\mathbf{E}_i(S)$ ;  $i=1,2,3$ , es la base fija de la misma sección en la configuración de referencia, tal que se cumple que  $\mathbf{t}_i(S,0)=\mathbf{E}_i(S)$ .  $\mathbf{e}_i$ ;  $i=1,2,3$  es base fija inercial. La orientación de  $\mathbf{t}_i$  es representada por la transformación ortogonal:

$$\mathbf{t}_i(S, \tau) = \mathbf{\Lambda}(S, \tau) \mathbf{E}_i \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (8)$$

así el conjunto  $C$  de todas las posibles configuraciones de la barra queda definido como:

$$C = \{ \Phi \equiv (\phi_0, \mathbf{\Lambda}) \} \quad (9)$$

Donde el vector  $\phi_0$  representa la posición de la línea centroidal y  $\mathbf{\Lambda}$  representa la rotación de la sección.  $\mathbf{\Lambda} \in$  al grupo  $SO(3)$ , que es el grupo ortogonal de las rotaciones finitas, no conmutativo tal que se cumple:  $\mathbf{\Lambda}^T = \mathbf{\Lambda}^{-1}$  y  $\det \mathbf{\Lambda} = 1$ . Físicamente,  $\mathbf{\Lambda}$  representa una rotación finita.  $so(3)$ , se denomina al conjunto de todas las matrices antisimétricas. En notación matricial una matriz antisimétrica y su vector axial asociado se representa según:

$$[\theta_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{bmatrix} ; \in so(3) \quad \{ \theta_i \} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} ; \in \mathcal{R}^3 \quad (10)$$

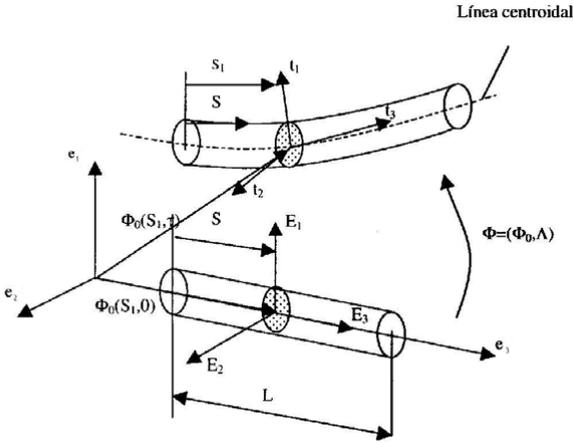


Figura 1. Modelo de viga no lineal.

$so(3)$  y  $\mathfrak{R}^3$  están relacionados por el isomorfismo  $\tilde{\theta}\mathbf{h} = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{h}$ , para cualquier vector  $\mathbf{h} \in \mathfrak{R}^3$ . Aquí,  $\boldsymbol{\theta} \in \mathfrak{R}^3$  es el vector axial asociado al tensor antisimétrico  $\tilde{\theta} \in so(3)$ .

### 3.2 Descripción cinemática de la viga

Las ecuaciones básicas para la descripción del movimiento de la viga se puede resumir en base a los siguientes items.

- Para un tiempo fijo (8) se expresa de la forma:

$$\mathbf{t}_I(S) = \boldsymbol{\Lambda}(S)\mathbf{E}_I \quad ; \quad I=1,2,3 \quad (11)$$

- La derivada con respecto a  $S$  de (11) será:

$$\frac{d}{dS} \mathbf{t}_I(S) = \frac{d}{dS} (\boldsymbol{\Lambda}(S)\mathbf{E}_I) = \frac{d\boldsymbol{\Lambda}}{dS} \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{t}_I = \boldsymbol{\Omega}(S)\mathbf{t}_I(S) \quad (12)$$

- Con  $\boldsymbol{\Omega}(S) = \frac{d\boldsymbol{\Lambda}}{dS} \boldsymbol{\Lambda}^{-1}$  un tensor antisimétrico para cada  $S$ , el cual mide la curvatura de la viga. Su correspondiente vector axial  $\boldsymbol{\Omega}(S)$  está definido por la relación  $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}(S)\boldsymbol{\Omega}(S) = \mathbf{0}$ , así se puede escribir en función del vector axial  $\boldsymbol{\Omega}$ :

$$\frac{d}{dS} \mathbf{t}_I(S) = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{t}_I(S) \quad ; \quad I=1,2,3 \quad (13)$$

- Se define el movimiento de la viga como:

$$\phi_\tau = \phi_0(S, \tau) + \sum_{i=1}^2 \mathbf{X}_i \mathbf{t}_i(S, \tau) \quad (14)$$

- La derivada del marco móvil con respecto al tiempo,  $\mathbf{t}_i$  está definida por (11), donde la transformación ortogonal ahora depende del tiempo, esto es,  $\mathbf{A}(S, \tau)$ . Derivando:

$$\dot{\mathbf{t}}_i(S, \tau) = [\mathbf{A}(S, \tau) \mathbf{A}^T(S, \tau)] \mathbf{t}_i(S, \tau) = \mathbf{W}(S, \tau) \mathbf{t}_i(S, \tau) \quad ; \quad i=1,2,3 \quad (15)$$

donde  $\mathbf{W}(S, \tau) = -\mathbf{W}^T(S, \tau)$ , es el tensor antisimétrico  $\in \text{so}(3)$  que define la rotación del marco móvil. El vector axial  $\mathbf{W}(S, \tau) \in \mathbb{R}^3$ , satisface la condición  $\mathbf{W}(S, \tau) \mathbf{W}(S, \tau) = \mathbf{0}$ , y representa la vorticidad del marco móvil. En términos del vector vorticidad, podemos escribir:

$$\dot{\mathbf{t}}_i(S, \tau) = \mathbf{W}(S, \tau) \times \mathbf{t}_i(S, \tau) \quad (16)$$

- Momento Lineal. Se considera una sección arbitraria  $A_\tau$ . Se define el momento lineal por unidad de arco de referencia, asociado al movimiento de la viga:

$$\mathbf{L}_\tau \equiv \int_A \int \rho_0(\mathbf{X}, S) \phi_\tau(\mathbf{X}, S, \tau) \equiv A_p \phi_0(S, \tau) \quad (17)$$

Donde  $\rho_0(S, \tau)$  es la densidad de la configuración de referencia y  $A_p = \int_A \rho_0(\mathbf{X}, S) d\mathbf{X}$  es la masa por unidad de longitud,  $\phi_0(S, \tau)$  define la posición actual del centroide de la sección transversal y  $\phi_\tau$  la posición de un punto en la sección.

- Momento angular. Similarmente se define el momento angular por unidad de longitud de arco de referencia asociado al movimiento (14) y relativo a un punto como:

$$\mathbf{H}_\tau = \int_A \rho_0(\mathbf{X}, S) [\phi_\tau - \phi_0(S, \tau)] \times \phi_\tau(\mathbf{X}, S, \tau) d\mathbf{X} \quad (18)$$

derivando con respecto al tiempo se obtiene la siguiente expresión para  $\dot{\mathbf{H}}_\tau$ :

$$\dot{\mathbf{H}}_\tau = \mathbf{I}_p \mathbf{W} + \mathbf{W} \times \mathbf{H}_\tau \quad (19)$$

Cuya ecuación es análoga a la obtenida para el momento angular en mecánica de cuerpos rígidos.  $\mathbf{I}_p$  es el tensor de inercia y si se considera el caso especial en que el marco móvil  $\mathbf{t}_i(S, \tau)$  está orientado en dirección de los ejes principales de la sección:  $\mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_1$  es el momento polar de inercia y  $\mathbf{I}_1$  e  $\mathbf{I}_2$  son los momentos de inercia en las direcciones 1 y 2 respectivamente.

### 3.3 Esfuerzos internos

Sea  $\mathbf{T}_3$  el vector esfuerzo por unidad de área de referencia actuando sobre la sección transversal  $A_\tau$ . La fuerza resultante por unidad de arco de referencia  $\mathbf{n}(S, \tau)$  sobre la sección en la configuración actual está dada por:

$$\mathbf{n} = \int_A \mathbf{T}_3(\mathbf{X}, S) dx \quad (20)$$

y la cupla de esfuerzos  $\mathbf{m} = m_i \mathbf{e}_i$  sobre la sección transversal en su configuración actual, está definida como:

$$\mathbf{M} = \int_A (\boldsymbol{\phi}_\tau - \boldsymbol{\phi}_0(S, \tau)) \times \mathbf{T}_3(\mathbf{X}, S) dA \quad (21)$$

el esfuerzo resultante  $\mathbf{N} = N_i \mathbf{E}_i$  y el momento  $\mathbf{M} = M_i \mathbf{E}_i$  en su configuración de referencia se obtiene transformando  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{m}$  según:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(S, \tau) &= \boldsymbol{\Lambda}(S, \tau) \mathbf{N}(S, \tau) \\ \mathbf{m}(S, \tau) &= \boldsymbol{\Lambda}(S, \tau) \mathbf{M}(S, \tau) \end{aligned} \quad (22)$$

### 3.4 Leyes de balance de momento lineal y angular

Para expresar las ecuaciones del movimiento en términos de las fuerzas  $\mathbf{n}(S, \tau)$  y momentos  $\mathbf{m}(S, \tau)$  resultantes, usamos la teoría tridimensional de los principios de balance lineal y angular:

$$\frac{\partial}{\partial S} \mathbf{n}(S, \tau) + \bar{\mathbf{n}}(S, \tau) = \mathbf{L}_\tau \equiv A_p \ddot{\boldsymbol{\phi}}_0(S, \tau) \quad (23)$$

$$\frac{\partial}{\partial S} \mathbf{m}(S, \tau) + \frac{\partial \boldsymbol{\phi}_0}{\partial S} \times \mathbf{n} + \bar{\mathbf{m}}(S, \tau) = \mathbf{H}_\tau \equiv \mathbf{I}_p \mathbf{W} + \mathbf{W} \times (\mathbf{I}_p \mathbf{W}) \quad (24)$$

donde  $\bar{\mathbf{n}}$  y  $\bar{\mathbf{m}}$  son la carga aplicada y el momento aplicado respectivamente.

### 3.5 Ley constitutiva

La relación entre los esfuerzos y deformaciones se obtiene a partir de la matriz constitutiva como:

$$\mathbf{C} = \text{diag}((GA)_1, (GA)_2, EA, (EI)_1, (EI)_2, GJ) \quad (25)$$

Donde  $(GA)_1$ ,  $(GA)_2$  denotan la rigidez al corte a lo largo de los ejes  $\mathbf{t}_1$  y  $\mathbf{t}_2$ ,  $EA$  es la rigidez axial,  $EI_1$ ,  $EI_2$  son las rigideces flectoras principales relativas a los ejes  $\mathbf{t}_1$  y  $\mathbf{t}_2$ ,  $GJ$  es la rigidez torsional de la barra.

### 3.6 Formulación Variacional

El objetivo es linealizar la ecuación variacional del sistema, por lo que haciendo uso de la teoría variacional y multiplicando las ecuaciones de balance de momento lineal (23) y angular (24) por una variación admisible arbitraria, y luego integrando, se obtiene el variacional de la energía dado por:

$$G(\Phi, \eta, \Theta) = \int_{0,L} \left\{ \mathbf{n} \left[ \frac{d\eta_0}{dS} - \Theta \times \frac{d\phi_0}{dS} \right] + \mathbf{m} \frac{d\Theta}{dS} \right\} dS - \int_{0,L} (\bar{\mathbf{n}}\eta_0 + \bar{\mathbf{m}}\Theta) dS \quad (26)$$

con  $\eta_0$  y  $\Theta$  una variación admisible arbitraria lineal y angular respectivamente. Este funcional servirá de base para construir la formulación por elementos finitos.

### 3.7 Discretización Espacial

Para obtener la ecuación del movimiento del sistema, se debe linealizar el funcional (26) lo cual además al discretizar el espacio en elementos finitos (Simo<sup>17</sup>), puede ser presentada como:

$$\left[ \frac{1}{h^2\beta} \mathbf{M} + \gamma h \beta \mathbf{D} + \mathbf{K}_T(\Phi_{n+1}^{(i)}) \right] \Delta \Phi_{v+1}^{(i+1)} = \mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{M}\Phi_{n+1}^{(i)} - \mathbf{D}\Phi_{n+1}^{(i)} - \mathbf{P}(\Phi_{n+1}^{(i)}) \quad (27)$$

Donde  $\mathbf{M}$  es la matriz de masa,  $\mathbf{D}$  es la matriz de amortiguamiento,  $\mathbf{P}$  es el vector de fuerzas internas,  $\mathbf{F}$  el vector de cargas externas,  $\mathbf{K}_T$  la matriz tangente que incluye la matriz material y geométrica,  $\mathbf{M}\Phi$  es la parte del vector de carga debido a la inercia y  $\mathbf{D}\Phi$  es el vector de cargas asociado al amortiguamiento.  $\beta$  y  $\gamma$  son parámetros de integración de los algoritmos de integración de la familia de Newmark y  $h$  es el paso de integración.

### 3.8 Algoritmo de integración HHT

La ecuación de movimiento será integrada implementando el algoritmo de integración HHT (Flores<sup>19</sup>), para lo cual la ecuación (28) debe ser escrita de la siguiente forma:

$$\mathbf{M}\Phi_{n+1} + (1 + \xi)\mathbf{D}\Phi_{n+1} - \xi\mathbf{D}\Phi_n + (1 + \xi)\mathbf{P}(\Phi_{n+1}) - \xi\mathbf{P}(\Phi_n) = (1 + \xi)\mathbf{F}_{n+1} - \xi\mathbf{F}_n \quad (28)$$

con

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1} &= \Phi_n + h\dot{\Phi}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)h^2\ddot{\Phi} + \beta h^2\ddot{\Phi}_{n+1} \\ \Phi_{n+1} &= \Phi_n + (1 - \gamma)h\dot{\Phi}_n + \gamma h\dot{\Phi}_{n+1} \end{aligned} \quad (29)$$

Con lo cual la ecuación general del movimiento de la viga integrada en el tiempo a través del método HHT es:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{h^2\beta} \mathbf{M} + (1 + \xi)\gamma h \beta \mathbf{D} + (1 + \xi)\mathbf{K}_T(\Phi_{n+1}^{(i)}) \right] \Delta \Phi_{n+1}^{(i+1)} &= \\ = (1 + \xi)\mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{M}\ddot{\Phi}_{n+1}^{(i)} - (1 + \xi)\mathbf{D}\dot{\Phi}_{n+1}^{(i)} - (1 + \xi)\mathbf{P}(\Phi_{n+1}^{(i)}) + \xi\mathbf{F}_n + \xi\mathbf{D}\dot{\Phi}_n + \xi\mathbf{P}(\Phi_n) \end{aligned} \quad (30)$$

Donde  $\xi$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  son los parámetros de integración del método HHT.  $\mathbf{F}_n$  es la fuerza de impacto para el tiempo ( $nd\tau$ ) la cual se obtiene usando la ley de contacto de Hertz.

#### 4 LEY DE CONTACTO DE HERTZ

La ley de contacto de Hertz permite determinar la fuerza de contacto entre dos cuerpos, además de la distribución de esfuerzos a través de las superficies de contacto. Esta distribución dependerá de la geometría de las superficies de contacto. Cumpliendo todo lo anterior se tiene que para el caso de un contacto entre una esfera y un plano (viga y la bola golpeadora), se tiene la siguiente distribución de esfuerzo a lo largo del radio de contacto para un contacto elástico (Goldsmith<sup>1</sup>-figura 2):

$$\sigma(r) = \frac{\sigma_{\max}}{a} \sqrt{a^2 - r^2} \quad (31)$$

Por lo cual la fuerza de contacto para un radio a es:

$$F = \int_0^a \pi r \frac{\sigma_{\max}}{a} \sqrt{a^2 - r^2} \quad (32)$$

En la ley de contacto de Hertz, la relación entre la fuerza F y la penetración  $\alpha$  entre los cuerpos está dada por:

$$F = k_2 \alpha^{(3/2)} \quad (33)$$

con  $k_2 = \frac{4}{3\pi} \sqrt{r_2} \frac{1}{\delta_1 + \delta_2}$  donde  $r_2$  es el radio de la masa golpeadora y  $\delta_i$  está dada por:

$$\delta_1 = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1 \pi} \quad ; \quad \delta_2 = \frac{1 - \mu_2^2}{E_2 \pi} \quad (34)$$

$\mu_i$  es el coeficiente de Poisson y  $E_i$  es el módulo de elasticidad de cada material. De la geometría del sistema (Figura 2 ) se establece la relación entre la penetración  $\alpha$  y el radio de la huella "a":

$$(r_2 - \alpha)^2 + a^2 = r_2^2 \quad (35)$$

despejando:  $\alpha^2 - 2\alpha r_2 + a^2 = 0 \Rightarrow a = \sqrt{(2\alpha r_2 - \alpha^2)}$ . Reemplazando se obtiene la distribución y la magnitud de los esfuerzos  $\sigma(r)$  a través de la superficie de contacto.

##### 4.1 Cálculo de la fuerza de contacto

Los cuerpos entran en contacto desde que su distancia relativa se hace cero, consecuencia de lo cual se origina la fuerza de contacto que acelera los cuerpos en dirección contraria a la penetración. Para obtener la fuerza de contacto producto del impacto se debe recurrir a las ecuaciones (7) y (33) para el caso de análisis local presentado por Goldsmith (viga Euler-Bernoulli) y las ecuaciones (30) y (33), para el caso de análisis local a través del método de los elementos finitos presentado por Simo. Para el caso del modelo de Goldsmith se tiene:

$$\alpha = \left[ \frac{F}{k_2} \right]^{\frac{2}{3}} = v_0 \tau - \frac{1}{m_2} \int_0^\tau d\tau \int_0^\tau F d\tau - \frac{1}{\rho A} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\chi_i^2(c)}{\omega_i} \int_0^t \chi_i^2 dx \int_0^t F(\bar{\tau}) \text{sen} \omega_i (\tau - \bar{\tau}) d\bar{\tau}_i \quad (36)$$

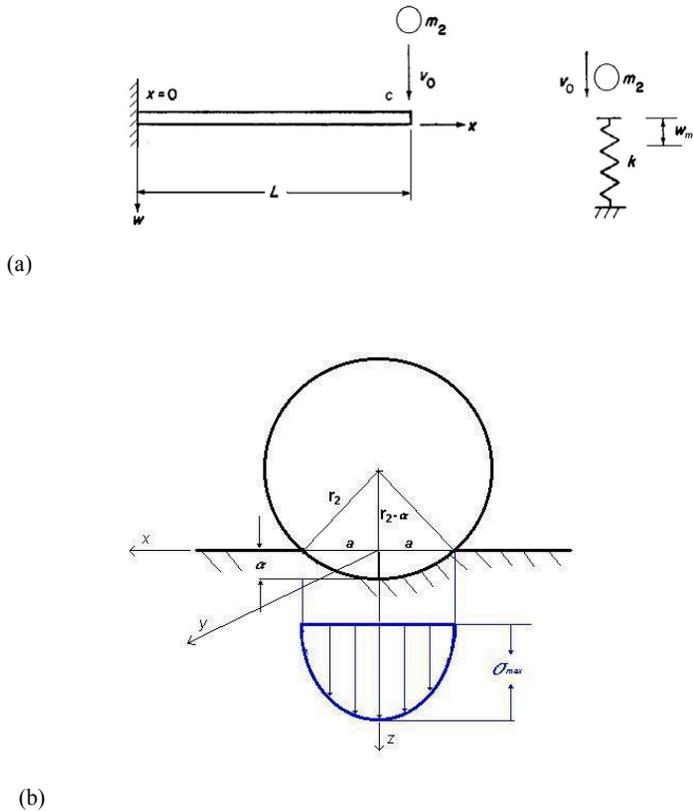


Figura 2. (a) Viga en voladizo golpeada por una bola de masa  $m_2$  dejada caer de una altura cualquiera. (b) huella de la bola sobre la viga y distribución de esfuerzos generado.

La ecuación (36) se resuelve numéricamente. Para su evaluación se requiere discretizar el tiempo de impacto, reemplazando  $\tau = n\Delta\tau$ , por lo cual queda de la forma:

$$\alpha = \left[ \frac{F}{k_2} \right]^{\frac{2}{3}} = \omega_2(n-1) - \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^{n-1} F_j \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\chi_i^2(c)}{\omega_i \int_0^L \chi_i^2 dx} \frac{\cos \omega_i(n-j)\Delta\tau - \cos \omega_i(n-j+1)\Delta\tau}{\omega_i} \quad (37)$$

De (37) se obtiene la fuerza de contacto para cada instante. Ella es válida sólo si los esfuerzos en la zona del impacto son menores que el esfuerzo de fluencia. Para el caso del modelo de Simo la ecuación del movimiento ya está integrada (30), con lo cual la fuerza se

calcula numéricamente integrando la ecuación del movimiento de la masa golpeadora ( $\omega_2$ ) y relacionando la penetración con la fuerza a través de la ley de contacto de Hertz (33). La figura 3 muestra el diagrama de flujo del programa computacional implementado.

#### 4.2 Fuerza de compresión.

La fuerza de compresión obtenida en la ecuación (37) es válida sólo si  $\sigma_{\max}$  es menor que  $\sigma_0$ , donde  $\sigma_{\max}$  se obtiene de la ecuación (32):

$$\sigma_{\max} = \frac{3F(n)}{2\pi a(n)^2} \quad (38)$$

$a(n)$  es el radio del círculo de contacto para el tiempo  $nd\tau$ . Si  $\sigma_{\max}$  es mayor que  $\sigma_0$  se tiene un impacto con deformación plástica, donde la fuerza de contacto es menor que la establecida en la ecuación (37) debido al cambio de la distribución de esfuerzo.

Para analizar lo que ocurre cuando se alcanza el esfuerzo de fluencia se usará el modelo de un material perfectamente plástico, lo que implica que el esfuerzo de compresión no excederá el  $\sigma_0$  (figura 4). El cálculo de la fuerza de contacto para este caso, comienza con determinar el radio plástico ( $r_p$ ), el cual corresponde a la circunferencia de contacto que ha alcanzado el esfuerzo de fluencia.

$$r_p(n) = \sqrt{a(n)^2 - \frac{\sigma_0 a^2}{\sigma_{\max}(n)}} \quad (39)$$

Donde  $\sigma_{\max}$  se obtiene de la ecuación (39), por lo que la nueva fuerza de contacto será :

$$F(n) = \int_{r_p(n)}^{a(n)} 2\pi r \frac{\sigma_{\max}(n)}{a(n)} \sqrt{a(n)^2 - r^2} dr + \sigma_0 \pi r_p(n)^2 \quad (40)$$

La ecuación (40) es válida hasta que la velocidad relativa entre los cuerpos ( $d\alpha/d\tau$ ) sea nula, lo cual indica el término de la fase de compresión. El término  $r_{pf}$  es el radio plástico al final de la fase de compresión.

#### 4.3 Fase de expansión

La fase de expansión es aquella en que la fuerza actúa en la misma dirección de la velocidad relativa de penetración de los cuerpos. Esta fase comienza cuando termina la fase de compresión. Las fuerzas que se generan en esta etapa dependen de lo ocurrido en la fase de compresión. Si en la fase de compresión no se alcanza el esfuerzo admisible ( $r_{pf} = 0$ ), el impulso de expansión es idéntico al de compresión y las fuerzas pueden ser calculadas a través de la ecuación (37). Para el caso de que  $r_{pf} \neq 0$  (figura 4), se alcanza el esfuerzo de fluencia y el impulso de expansión será menor que el impulso de compresión. El área proyectada que alcanzó la plasticidad ( $\pi r_{pf}^2$ ) recupera sólo la parte elástica de deformación, mientras que el área comprendida entre  $r_{pf}$  y “a” se recupera totalmente. El resto de energía queda como deformación plástica. Así, la fuerza de expansión está dada por:

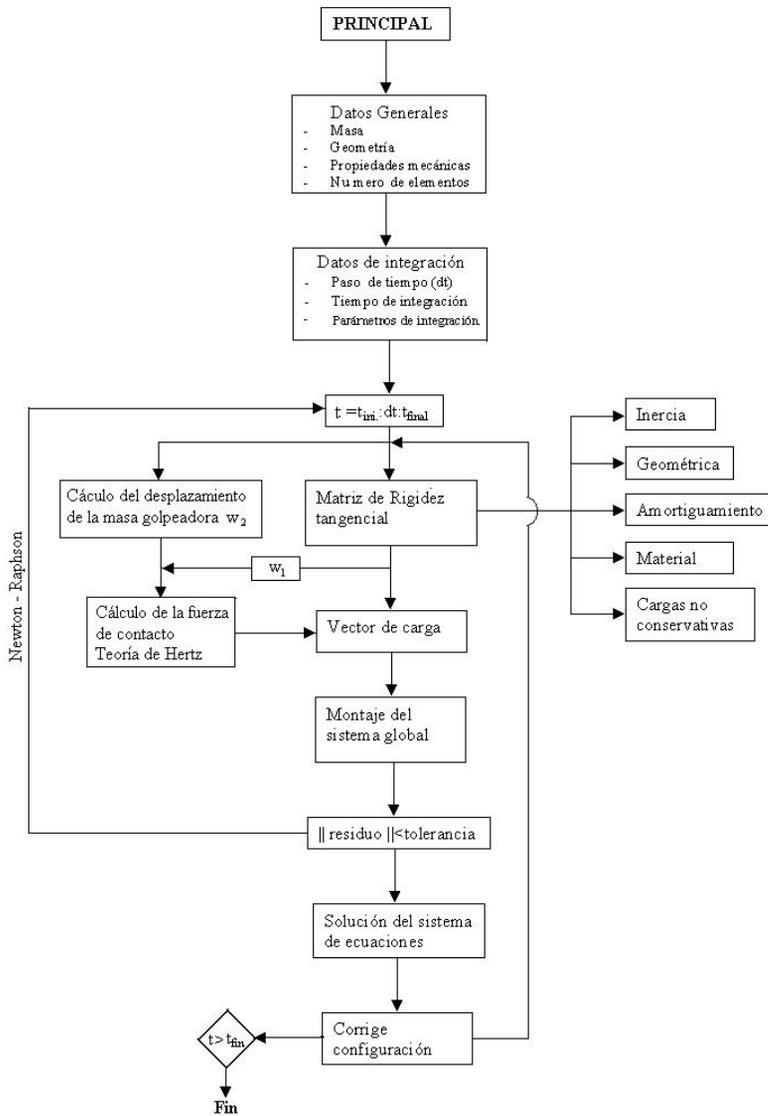


Figura 3. Diagrama de flujo del proceso de Integración.

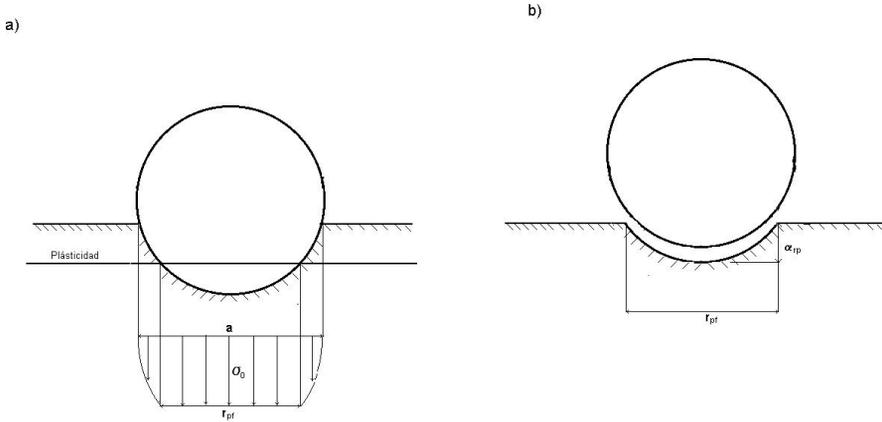


Figura 4. a) término de la compresión b) término de la expansión.

$$F(n) = \int_{r_{pf}}^{a(n)} 2\pi r \frac{\sigma_{\max}(n)}{a(n)} \sqrt{a(n)^2 - r_{pf}^2} dr + \sigma_{ex}(n) \pi r_{pf}^2 \quad (41)$$

$\sigma_{ex}$  es el esfuerzo de expansión en la zona de deformación plástica, dado por:

$$\sigma_{ex}(n) = \frac{\sigma_{\max}(n)}{a(n)} \sqrt{a(n)^2 - r_{pf}^2} \quad (42)$$

La fase de expansión termina cuando el radio plástico  $r_{pf}$  es igual al radio de la zona de contacto “a”, y la fuerza de contacto se hace nula. Se aprecia que toda la energía que se almacena en la fase de compresión no se desarrolla a través de la fuerza de expansión, quedando parte de ella como deformación plástica.

## 5 COMPARACIÓN ENTRE LOS DISTINTOS MÉTODOS

A continuación se comparan los resultados entre el método analítico (Goldsmith) y el método numérico (elementos finitos)-analítico (teoría de Hertz), usando una viga en voladizo con las siguientes características : Largo  $L=1.15$  m, Ancho =  $0.025$  m, Alto =  $0.005$  m,  $E = 2.1 \cdot 10^5$  MPa, densidad  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup> y  $\sigma_0 = 340$  MPa. La bola golpeadora tiene un radio  $r_2 = 0.005$  m y una masa  $m_2 = 0.009$  kg (Figura 2.a).

### 5.1 Método analítico

Primero se deben calcular las frecuencias naturales del sistema con sus modos de vibrar para las condiciones de borde planteadas. Para acotar el problema se considerara sólo las primeras 4 frecuencias naturales del sistema y donde los modos de vibrar están dados por la relación:

$$\chi_i(x) = \frac{\cosh(\xi_i x) - \cos(\xi_i x)}{\cosh(\xi_i L) + \cos(\xi_i L)} - \frac{\sinh(\xi_i x) - \sin(\xi_i x)}{\sinh(\xi_i L) + \sin(\xi_i L)} \quad (43)$$

Con  $\xi_i = \sqrt{\omega_i \left( \frac{\rho A}{EI} \right)^{\frac{1}{4}}}$ . Los valores y modos de vibrar se muestran en la figura 5.

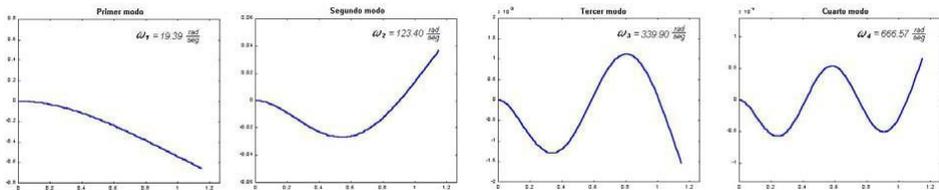


Figura 5. Modos de vibrar de la viga empotrada.

Así la ecuación del movimiento para la viga en voladizo que impacta en el extremo libre ( $x = L$ ), está dada por:

$$\omega_1(x, n\Delta\tau) = \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^{n-1} F_j \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\chi_i(x)\chi_i(L)}{\omega_i \int_0^L \chi_i^2 dx} \frac{\cos \omega_i(n-j)\Delta\tau - \cos \omega_i(n-j+1)\Delta\tau}{\omega_i} \quad (44)$$

donde  $\int_0^L \chi_i^2 dx = L \frac{\cos^2 \xi_i L}{\sin^4 \xi_i L}$  con lo cual se obtienen los desplazamientos de la viga para cada instante. El movimiento de la masa  $m_2$  se obtiene de forma discreta de la forma:

$$\omega_2(n\Delta\tau) = \omega_2((n-1)\Delta\tau) + v_2(n-1)\Delta\tau + \frac{F_{n-1}\Delta\tau^2}{2m_2} \quad (45)$$

con  $v_2(n) = v_2(n-1) + \frac{F_{n-1}\Delta\tau}{m_2}$  con las condiciones iniciales  $\omega_2(0)=0$ ,  $v(0) = v_0$  y  $F_0 = 0$ . De

(44) y (45) se calcula numéricamente la penetración entre los cuerpos y la fuerza de impacto cuando no se alcanza la plasticidad.

$$\alpha(\Delta\tau) = \omega_1(c, n\Delta\tau) + \omega_2(n\Delta\tau) = \left[ \frac{F}{k_2} \right]^{\frac{2}{3}} \quad (46)$$

Al ser integrada la ecuación (46) se obtiene la penetración entre los cuerpos y directamente la fuerza de impacto.

## 5.2 Análisis a través de los elementos finitos (numérico-analítico)

Se dispone de un programa computacional basado en el método de los elementos finitos para vigas flexibles donde se requiere sólo del ingreso de datos geométricos y características de los materiales. Para encontrar la fuerza de contacto producto del impacto, se añade un subprograma por medio del cual se encuentra la fuerza de contacto usando la teoría de Hertz mencionada. El diagrama de flujo se muestra en la figura 3.

## 6 RESULTADOS

La figura 6 muestra como varían los resultados obtenidos a través del método analítico según la cantidad de modos que se utilizan. A mayor cantidad de modos utilizados, mayor será la exactitud de los resultados. La comparación entre ambos métodos (figura 6b y 6c) muestra bastante similitud, donde las pequeñas diferencias (en los desplazamientos) son atribuidas a la diferencia de los modelos de viga para ambos métodos, así como también al número de modos de vibrar considerados en el método analítico (cuatro) y a la cantidad de elementos finitos considerados para representar la viga (diez) en el método numérico. Sin embargo estas variaciones no afectan mayormente los cálculos de las fuerzas de contacto (figura 6c).

Interesa estudiar el efecto de los distintos parámetros que intervienen en el impacto de manera de poder establecer cómo su variación afecta al fenómeno. Por ejemplo, el coeficiente de restitución definido como el cociente entre la componente normal de la velocidad inicial y final de la masa golpeadora (Ley de Newton). Los resultados obtenidos para el ejemplo específico se muestran en la figura 7.

En la figura 7 se destacan dos zonas: la primera, en la cual el coeficiente de restitución no varía con la velocidad ( $v_0 < 0.01$  m/s, equivalente a soltar la bola de masa  $m_2$  desde una altura casi nula) y coincide con la zona elástica. La segunda se obtiene una vez alcanzado el límite plástico, donde se aprecia que el coeficiente de restitución disminuye drásticamente, hasta que para velocidades mayores de 10 m/s (equivalente a dejar caer la bola de masa  $m_2$  desde una altura de 5.1 m) el impacto no es suficiente para cambiar el sentido de la velocidad de la masa golpeadora, ocurriendo impactos sucesivos entre  $m_2$  y la viga, debido a la flexibilidad considerada. La figura 8 muestra como varía la duración del impacto y el radio plástico, cuando se deja caer desde diferentes alturas (variación de la velocidad de impacto de la bola de masa  $m_2$ ).

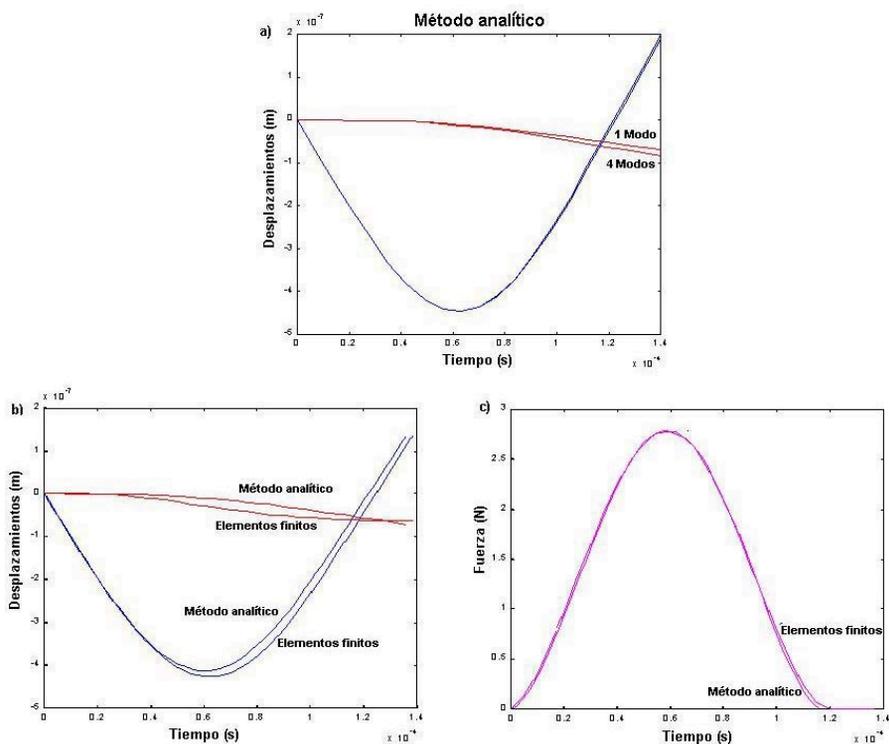


Figura 6. a) desplazamientos de los cuerpos ocupando distinto número de modos: rojo representa el desplazamiento de la viga y en azul se representa el de la bola. La diferencia entre ambas curvas es la penetración  $\alpha$ , b) desplazamiento de los cuerpos para los distintos métodos, c) Distribución de la fuerza de contacto generada entre la bola y la viga. El área bajo la curva representa el impacto de la fuerza..

Se aprecia que el tiempo de impacto disminuye a medida que aumenta la velocidad de impacto  $v_0$  hasta un mínimo, para el cual la duración no depende de la velocidad de impacto. El radio plástico (figura 8b) es nulo para pequeñas velocidades de impacto ( $< 0.01$  m/s). Una vez alcanzando el límite elástico el radio plástico aumenta con la velocidad tendiendo al valor máximo extremo igual al radio de la esfera golpeadora ( $r_2$ ). Se realiza un análisis de la variación de los resultados según varía la masa de la esfera golpeadora. La geometría del sistema y la velocidad de impacto ( $v_0 = 0.01$ ) se mantienen constantes. Se define el término adimensional  $\lambda$  que representa la razón entre la masa golpeadora  $m_2$  y la masa de la viga  $m_1$ :  $\lambda = m_2/m_1$ .

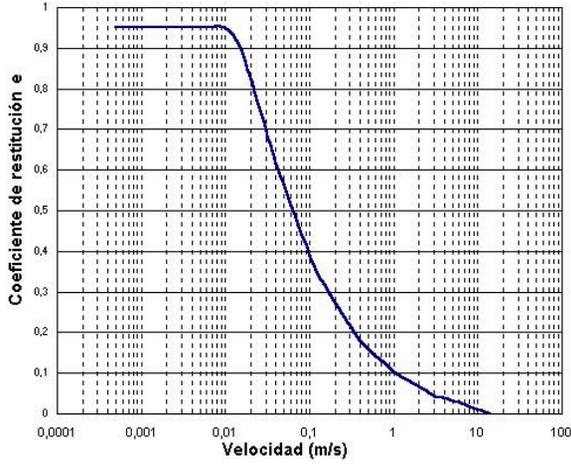


Figura 7. Coeficiente de restitución. Método numérico analítico.

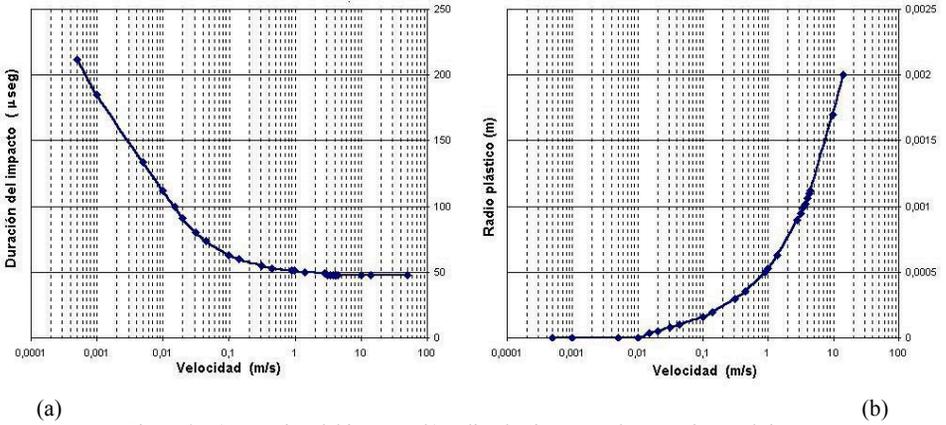


Figura 8. a) Duración del impacto b) radio plástico. Método numérico analítico.

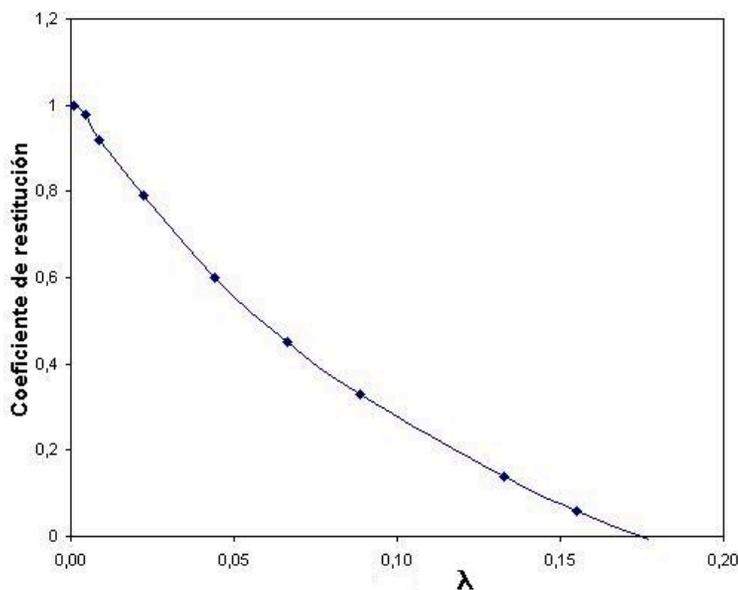


Figura 9. Coeficiente de restitución. Método numérico analítico.

La figura 9 representa la variación del coeficiente de restitución en función de  $\lambda$ . Se aprecia que el coeficiente de restitución disminuye a medida que aumenta la masa golpeadora, hasta un punto donde la masa golpeadora es tan grande que un impacto no basta para cambiar el sentido de la velocidad de la esfera, (en este caso para  $\lambda > 0.175$ ), siendo la viga la que absorbe completamente el impacto inicial.

## 7 CONCLUSIONES

El conocimiento del fenómeno de impacto es de vital importancia para las distintas áreas del diseño en la ingeniería. Por lo cual las teorías planteadas son de vital ayuda para comprender y predecir las consecuencias de este fenómeno. El método analítico presentado por Goldsmith es una buena aproximación para explicar el fenómeno de impacto entre elementos flexibles, pero se ve limitado por el manejo matemático que se debe realizar para diferentes casos. El método de los elementos finitos unido a la teoría de contacto de Hertz, da una buena aproximación del fenómeno de impacto, y puede ser utilizado en la predicción de desplazamientos y fuerzas involucradas en el impacto. Es necesario mejorar el modelo de material perfectamente elástico, para poder predecir con mayor exactitud los efectos producidos en las superficies de contacto. El efecto que halla deformaciones plásticas en la zona de impacto ayuda a disminuir la fuerza de contacto al momento del impacto. La duración del

tiempo de impacto se reduce cuando hay deformación plástica.

## 8 REFERENCIAS

- [1] Goldsmith W., *Impact: The theory and Physical Behaviour of Colliding Solids*. Edward Arnold Ltd., 1960.
- [2] Thornton C., *Coefficient of Restitution for Collinear Collisions of Elastic-Perfectly Plastic Spheres*. Journal of Applied Mechanics, 64, 1997.
- [3] Brach R. M., *Friction, restitution, and energy loss in planar collisions*. Transactions of the ASME, 51, 1984.
- [4] Wang Y., Mason M. T., *Two-dimensional rigid-body collisions with friction*. Journal of Applied Mechanics, 59, 1992.
- [5] Fandrich M., Hogue C., *An experimental study of rigid body impacts*. Contact Mechanics, Edited by M. Raous et al, 1995.
- [6] Keller J. B., *Impact with friction*. Journal of Applied Mechanics, 53, 1986.
- [7] Stronge W. J., *Rigid body collisions with friction*. Proc. R. Soc. Lond. A, 431, 1990.
- [8] Pfeiffer F., Glocker Ch., *Multibody Dynamics With Unilateral Contacts*. Munchen, im November 1995.
- [9] Sampaio R., Cataldo E., *Comparación entre modelos de colisión entre cuerpos* Actas del VIII Congreso de Ingeniería Mecánica, U de Concepción, Chile, 1:491-496, 1998.
- [10] Baeza L., *Simulación de Choque entre Elementos Rígidos*. Informe de Memoria de Título, U de Concepción, Chile, 2000.
- [11] Simo J.C., A Finite Strain Beam Formulation. *The Three Dimensional Dynamics Problem. Part I*. Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering, 49:55-70, 1985.
- [12] Barrientos G., *Dinámica no-lineal de estructuras flexibles en grandes deformaciones*. Tesis de Doctorado, Puc-Rio de Janeiro, Brasil, Diciembre 1997.
- [13] Reissner E., *On one-dimensional finite strain beam theory: The plane problem*. J. Appl. Math. Phys. 23 (1972) 795-804.
- [14] Antman S. S., *Kirchhoff's problem for nonlinearly elastic rods*. Quart. J. Appl. Math. 32 (1974) 221-240.
- [15] Love A. E. H., *The Mathematical Theory of Elasticity*, Dover, New York, 1944.
- [16] Simo J.C., Vu-Quoc L., *On the Dynamics of Flexible Beams Under Large Overall Motions - The Plane Case: Part I*. Journal of Applied Mechanics. Transaction of ASME. 53: 849-854, December 1986.
- [17] Simo J.C. and Vu-Quoc L., *On the Dynamics of Flexible Beams Under Large Overall Motions - The Plane Case: Part II*. Journal of Applied Mechanics. Transaction of ASME, 53:855-863, December 1986.
- [18] Hilbert H.M., Hughes J.R., Taylor R.L., *Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 5: 283-292, 1997.
- [19] Flores P., *Estudio del comportamiento dinámico de sistemas de multicuerpos flexibles*. Informe de Memoria de Título, U de Concepción, Chile, 2000.