

ANÁLISIS NO LINEAL EN TIEMPO Y FRECUENCIA DE PLACA PLANA CON GRANDES ROTACIONES POR ELEMENTOS FINITOS Y ESCALAS MÚLTIPLES EN ORDENES SUPERIORES DE APROXIMACIÓN

Ferreira, R.T.^{a,b}, Prato, C. A.^a

^aGrupo de Métodos Numéricos en Mecánica Estructural, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Universidad Nacional de Córdoba, Avenida Velez Sarfield 1601, 5000 Córdoba, Argentina, <http://www.efn.uncor.edu>

^bDepartamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Universidad Nacional de Córdoba, Avenida Velez Sarfield 1601, 5000 Córdoba, Argentina, rferrey@efn.uncor.edu, <http://www.efn.uncor.edu>

Keywords: Placas, Elementos Finitos, Escalas Múltiples.

Resumen. Se realiza el análisis no lineal de respuesta en tiempo y frecuencia de una placa plana delgada circular con grandes rotaciones empotrada en sus bordes y sometida a distintos estados de carga armónica. El método de Elementos Finitos ha sido utilizado tanto para obtener la versión discreta del plano de la placa como para la reducción del problema a un número finito de grados de libertad y el método de Escalas Múltiples para la resolución analítica aproximada del problema no lineal a través de órdenes superiores de aproximación. En la respuesta en frecuencia se caracterizan y justifican la existencia picos que pueden o no estar asociados a resonancias secundarias. Se desarrollan estrategias analíticas y gráficas y se interpreta que los procedimientos seguidos facilitan la exploración, predicción, análisis y justificación de fenómenos no lineales en la dinámica de placas con grandes rotaciones.

1 INTRODUCCIÓN

El presente trabajo consiste en el análisis dinámico no lineal de la respuesta de una placa plana circular empotrada en sus bordes con no linealidades geométricas debido a grandes rotaciones. Para ello se resuelven las tradicionales ecuaciones de Chu-Hermann pertenecientes a la teoría no lineal de placas, las cuales son el resultado de una evolución que se explica en el libro de [Timoshenko y Woinowsky-Krieger, \(1970\)](#). El método de elementos finitos, [Zienkiewicz, \(1980\)](#), aceptado para este tipo de problemas, se aplica para obtener un número finito de variables y se incluye amortiguamiento de naturaleza viscosa de tipo Rayleigh que se implementa conforme a la formulación proporcionada en [Clough y Penzien, \(1975\)](#). Se obtienen de esta forma ecuaciones no lineales en coordenadas modales ([Véase, Ecuación \(1\)](#))

$$\ddot{\Psi} + w_0^2 \Psi = \epsilon f(t, \Psi, \dot{\Psi}) \quad (1.)$$

donde t es el tiempo, Ψ , $\dot{\Psi}$, $\ddot{\Psi}$ son los vectores desplazamiento, velocidad y aceleración, ϵ es el parámetro de perturbación, w_0 es una frecuencia natural y el vector f , presente en el segundo miembro de la ecuación, agrupa fuerzas no lineales, o dependientes de la velocidad o de excitación externa. El método de Escalas múltiples se aplica para resolver la ecuación de equilibrio dinámico, ([Véase, Ecuación 1](#)), como se describe en la referencia [Nayfeh, \(1985\)](#), debido a que permite mantener explícita las relaciones entre las variables intermedias. Como se busca analizar, interpretar y justificar la respuesta en tiempo y frecuencia de la placa, se adopta el análisis no lineal de oscilaciones, consistente en la exploración analítica y gráfica desde la obtención de órdenes superiores de aproximación del método de escalas múltiples en expansión de derivadas, conforme a lo realizado por [Ferreyra, \(2004\)](#).

2 PLACA CON GRANDES ROTACIONES

2.1 Geometría, material y propiedades

La placa en estudio es circular de radio 0,5 m, de 4 mm de espesor y se encuentra empotrada en los bordes ([Véase, Figura 1](#)).

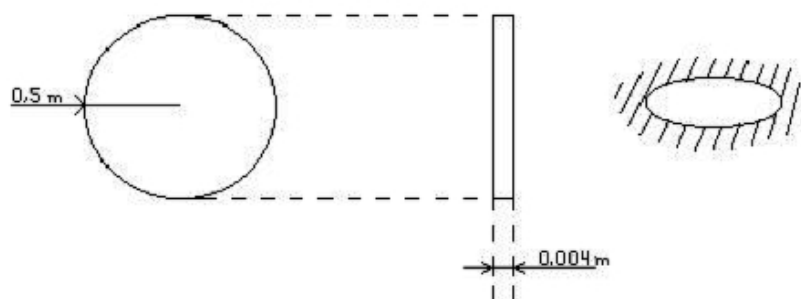


Figura 1: Dimensiones y Condiciones de borde.

El módulo longitudinal de elasticidad, E , es de 750.000 kg/cm^2 . El coeficiente de Poisson $\nu=0.3$, la densidad, $\rho=0,0028 \text{ kg/cm}^3$. Se asume $u=v=w=w_x=w_y=0$ sobre la frontera Γ . Se adoptan 4 elementos finitos trapezoidales y 5 grados de libertad por nodo. La placa resulta con cinco grados de libertad del nodo central que queda libre y con cinco modos naturales de oscilación relacionados con el sistema lineal no amortiguado. Los coeficientes adimensionales

de amortiguamiento, ξ_n , para todos los modos naturales se adoptan iguales a 0.1.

La ecuación vectorial (1) con segundo miembro nulo permite obtener las frecuencias naturales del sistema lineal no amortiguado. (Véase, Tabla 1)

n	1	2	3	4	5
W(n)	223.448	631.780	631.780	32578.071	32578.071

Tabla 1: Frecuencias Naturales.

La frecuencia fundamental, $w(1)$, corresponde al movimiento en la dirección transversal al plano de la placa.

2.2 Equilibrio dinámico, condiciones iniciales, excitación y respuesta

La ecuación de equilibrio dinámico en coordenadas modales posee subíndices n, m, p y q que varían entre 1 y 5, (Véase, Ecuación 2), donde se pueden apreciar arreglos y términos asociados a no linealidades cuadráticas y cúbicas, típicos en problemas de placas con grandes rotaciones y deformaciones en el plano medio.

$$\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial t^2} + 2\xi_n \gamma_n \frac{\partial \psi_n}{\partial t} + \gamma_n^2 \psi_n = f_n(t) - \alpha_2 \psi_m \psi_p - \alpha_3 \psi_m \psi_p \psi_q \quad (2)$$

Las condiciones iniciales en coordenadas modales se adoptan nulas, (Véase, Ecuaciones (3)); luego, el movimiento dependerá de la fuerza externa modal $f_n(t)$, aplicada sobre la placa, y ningún modo contribuye para que el movimiento se inicie.

$$\begin{aligned} \psi_1(0) = \dots = \psi_n(0) = \dots = \psi_5(0) &= 0 \\ \dot{\psi}_1(0) = \dots = \dot{\psi}_n(0) = \dots = \dot{\psi}_5(0) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

La fuerza externa modal, $f(t)$, que se aplica sobre la placa, se ha distribuido en la forma del primer modo de oscilación y se adoptan distintas superposiciones de fuerzas $f_i(t)$, de muy distinta importancia, asociadas a diferentes exponentes del parámetro de perturbación, (Véase, Ecuación (4)).

$$f = \epsilon^1 f_1 + \epsilon^2 f_2 + \epsilon^3 f_3 + \epsilon^4 f_4 \quad (4)$$

Cada fuerza f_i , en Newton, resulta de la superposición de armónicas en distintas frecuencias, (Véase, Ecuaciones (5)). En este ejemplo, el subíndice i varía entre 1 y N_i , donde N_i es el número de armónicas utilizado para definir cada término. Se toma $N_1=1, N_2=N_3=0, N_4=2$ y se adoptan los valores $a_1 = a, a_2=0.033a, a_3=0.02a, \theta_1 = 0, \theta_2=2.78571, \theta_3=5, \theta_4 = 3\pi/2$, mientras que θ_2, θ_3 se eligen arbitrarios. Las expresiones de referencia son

$$\begin{aligned} a &= 136.961 & f_1(t) &= a \cos(\Omega t + \theta) \\ \Omega &= w(1)/3 + 1 & f_4(t) &= \sum_{k=2}^{k=3} a_k \cos(\Omega_k t + \theta_k) \end{aligned} \quad (5)$$

La carga resultante de múltiples frecuencias $f(t)$, posee 3 armónicas. En virtud de que el problema presenta no linealidades cuadráticas y cúbicas y de que la excitación aislada $f_1(t)$ posee frecuencia $\Omega = 1/3 w(1)+1$, cercana a la fundamental, se anticipa desde la teoría no lineal la posibilidad de existencia de una resonancia súper-armónica en la respuesta. En consecuencia, para este ejemplo, reviste interés conocer si tal resonancia existe en forma

efectiva en la respuesta no lineal. Por otra parte, la carga $f_4(t)$ consistente en la superposición de dos armónicas arbitrarias es de muy baja amplitud y se utiliza aquí para definir a la excitación multifrecuencia $f(t)$. La respuesta a la excitación mono-frecuencia $f_1(t)$ se afecta por la presencia de $f_4(t)$; por consiguiente, también interesa conocer el grado de participación de $f_4(t)$ en la respuesta de la excitación $f(t)$.

La respuesta a esa carga se presenta en forma más breve mediante la Densidad Espectral de Potencia, DEP, y el argumento, $Arg(u)$, de su transformada de Fourier, (Véase, Figura 2).

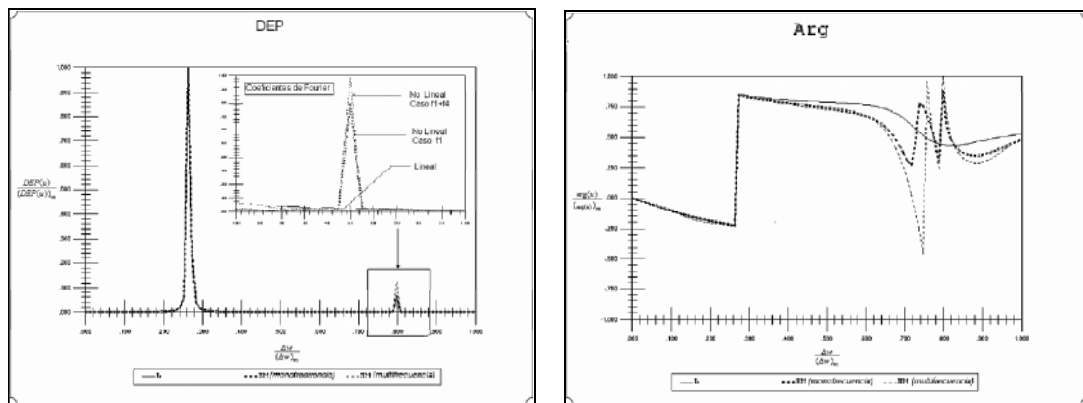


Figura 2: Densidad Espectral de Potencia y Argumento de la Transformada de Fourier de $u(t)$.

Los gráficos están normalizados en ambos ejes, tomando $w / (w)_m$ para las abscisas, y $|DEP| / (|DEP|)_m$ y $Arg(u) / (Arg(u))_m$ para las ordenadas donde el subíndice “m” indica el máximo valor que toma la función en el intervalo. La Densidad Espectral de Potencia, DEP, de respuestas no lineales, tanto para la carga monofrecuencia como para la carga multifrecuencia, presentan un primer pico definido a la frecuencia de la excitación más importante, w_1 , y un segundo pico en la frecuencia fundamental de resonancia, $w(1)$. La función Argumento, Arg, describe un perfil de resonancia en $w(1)$. La resonancia no es apreciada por la respuesta lineal en los intervalos elegidos para la representación. Se observa que la resonancia correspondiente a la carga monofrecuencia $f_1(t)$, es ligeramente menor que la resonancia asociada a la carga multifrecuencia $f(t)=f_1(t)+f_4(t)$, (Véase, Figura 2). Se deduce que aparece un fenómeno bajo la teoría no lineal y que las pequeñas cargas armónicas amplifican la resonancia en forma moderada; a continuación, estos resultados se complementan con un análisis exploratorio para el caso multifrecuencia.

3 ANÁLISIS NO LINEAL DE OSCILACIONES

El método de Escalas Múltiples se utiliza en este análisis dinámico no lineal por mantener explícitas las relaciones entre variables intermedias y por proporcionar una solución robusta para cualquier orden de aproximación que sea escogido.

3.1 Respuesta temporal

La excitación aplicada a frecuencia cero, carga estática, permite comprobar que la teoría lineal puede anticipar en forma satisfactoria el cálculo de desplazamientos debido a que la amplitud de excitación es baja. Desde esta observación se podría suponer a priori que, bajo carga dinámica, la teoría lineal continúa proporcionando resultados satisfactorios en todas las

frecuencias. Si esta suposición es cierta, entonces las respuestas dinámica lineal y dinámica no lineal serían parecidas.

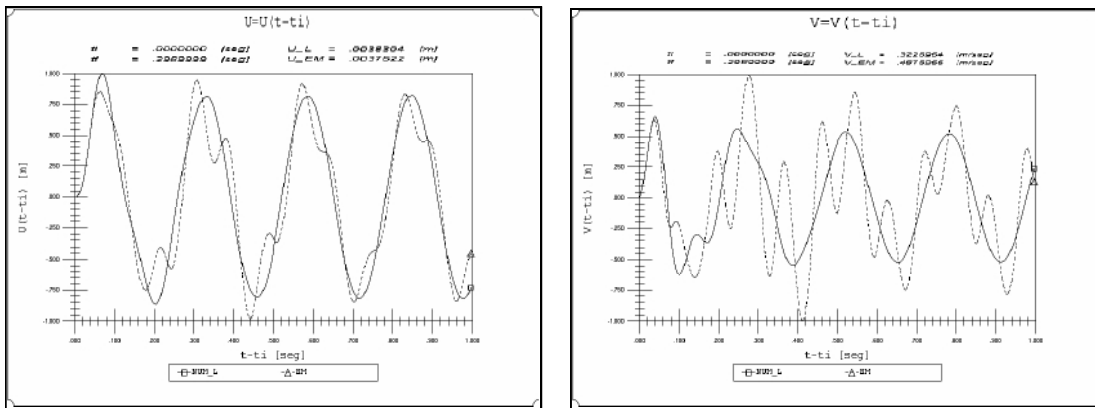


Figura 3: U y V en función del tiempo, distorsión no lineal.

Sin embargo, esto simplemente no sucede, (Véase, Figura 3), y se puede observar significativas diferencias en el desplazamiento, U, y en la velocidad, V, en función del tiempo, entre los casos lineal y no lineal por escalas múltiples en el problema considerado.

En el plano (U,V) el régimen transitorio inicial y la distorsión no lineal se aprecian claramente. Un bucle se cierra al completar un ciclo y, en el caso no lineal, aparece un nuevo bucle interno aproximadamente a un tercio del recorrido sobre la curva que se repite otra vez a los dos tercios de recorrido antes de completar el ciclo.

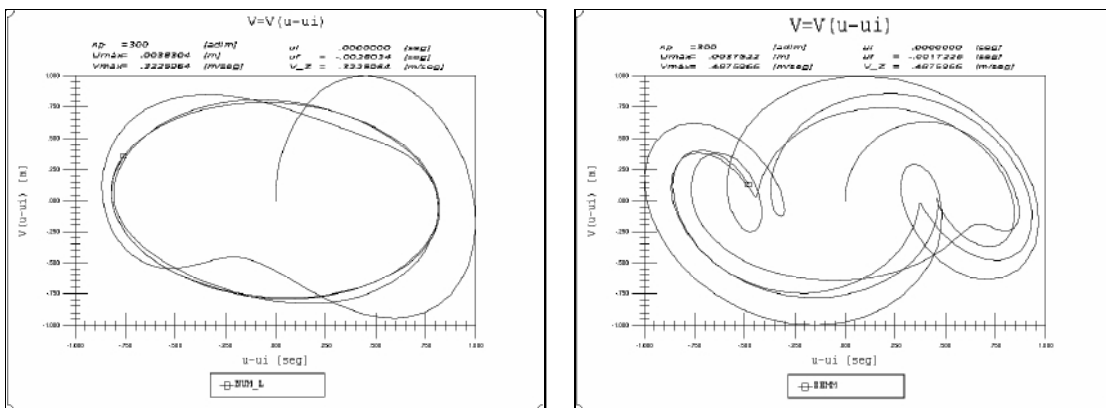


Figura 4: Plano de estado, distorsión no lineal.

El período del movimiento complementario descrito por la teoría no lineal es cerca de tres veces más pequeño, (Véase, Figura 4). Como parte del análisis, interesa caracterizar y justificar este fenómeno.

3.2 Respuesta en frecuencia

La exploración local y global de picos y de otros accidentes propios de la respuesta no lineal en frecuencia, (Véase, Figura 5), se realiza eventualmente en forma analítica y gráfica para cada orden de aproximación. De esta forma es posible caracterizar el fenómeno, asociarlo a un orden de aparición, relacionarlo a un conjunto de cargas externas o no y a una combinación de frecuencias naturales o de excitación, Ferreyra, (2004).

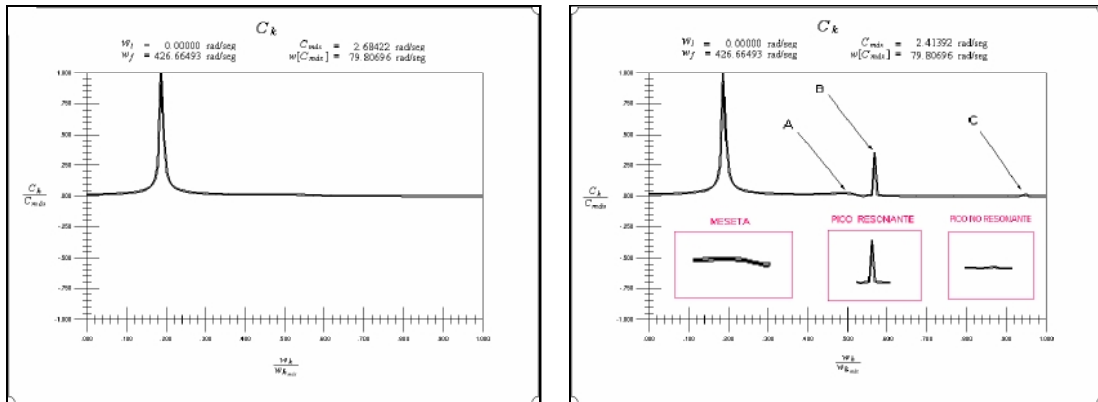


Figura 5: Coeficientes de Fourier, particularidades no lineales.

La respuesta lineal, a la izquierda, presenta un pico bien definido, (Véase, Figura 5). La respuesta no lineal en frecuencia, a la derecha, a simple vista posee tres irregularidades denotadas por los elementos (A, B, C).

La meseta “A” se anticipa por la altísima sensibilidad de la función argumento, ARG, en seis Ordenes de Aproximación, OA, considerados, (Véase, Figura 6), donde los argumentos toman valores en el intervalo $(-Arg/(Arg)_m, Arg/(Arg)_m)$.

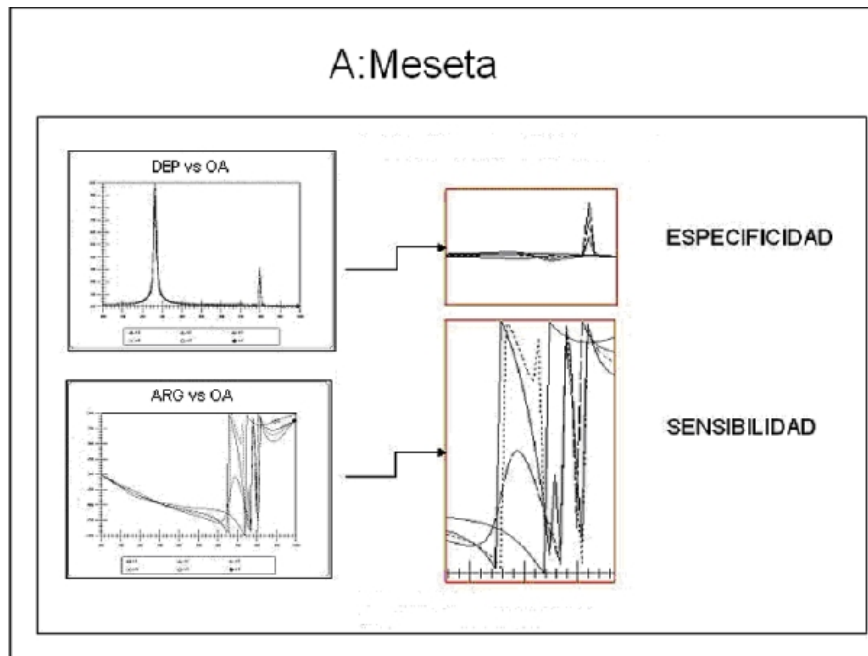


Figura 6: Meseta: Especificidad y Sensibilidad en diferentes Ordenes de aproximación.

La presencia de la meseta se confirma porque persiste en forma visible aún cuando es representada por la función Densidad Espectral de Potencia, DEP, a la cual se asocia una elevada especificidad.

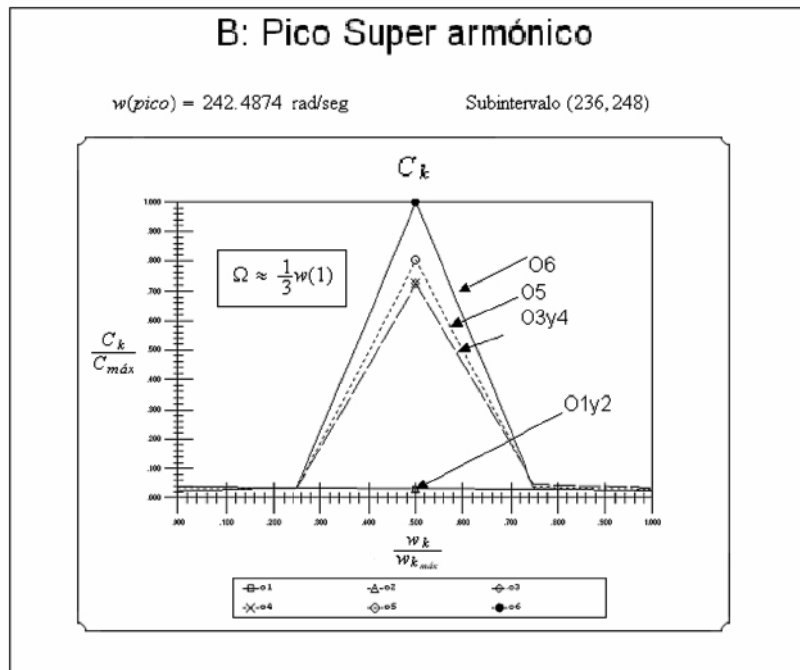


Figura 7: Pico super armónico: aparición en el tercer orden de aproximación.

Ha sido detectado, desde el tercer orden de aproximación, un pico relacionado a la frecuencia fundamental del sistema no lineal, $w(1)$ y a la frecuencias de excitación externa, Ω , (Véase, Figura 7). El pico corresponde a una resonancia super armónica. En simultáneo, y dentro del mismo intervalo escogido para la observación, se verifica la existencia de un pico no resonante de considerable magnitud en la respuesta en frecuencia. Para este pico no resonante, (Véase, Figura 8) se individualizó, en el cuarto orden de aproximación, el conjunto de armónicas que lo constituyen, encontrando que la naturaleza del pico no resonante se relaciona sólo con la combinación de armónicas asociadas a frecuencias externas a la placa.

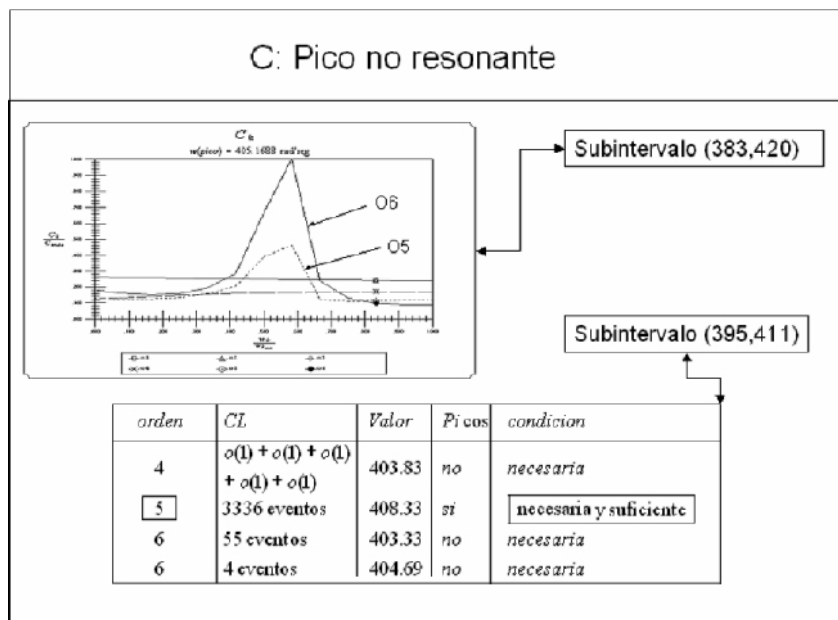


Figura 8: Pico no resonante: aparición en el quinto orden de aproximación.

El análisis dinámico no lineal discreto, realizado a la placa plana circular, permitió encontrar

condiciones necesarias de naturaleza analítica materializadas por las combinaciones lineales entre frecuencias intermedias durante la resolución y condiciones suficientes proporcionada por estrategias de inspección gráfica local y global. En la respuesta en frecuencia de la placa estudiada se encontró un pico de resonancia súper armónica que aparece desde el tercer orden de aproximación, una meseta y un pico no resonante que se puede justificar con aproximaciones desde el quinto orden. Se utilizó, para la exploración de la respuesta, la elevada sensibilidad de la función argumento de la transformada de Fourier y, para la confirmación del diagnóstico, la especificidad de la función densidad espectral de potencia.

4 CONCLUSIONES

La respuesta en frecuencia de un sistema no lineal cuadrático y cúbico, como el que se asocia a una placa plana con grandes rotaciones, bajo excitaciones representadas por la superposición de armónicas poseen picos que no pueden ser anticipados por la teoría lineal. Los picos son de distinta naturaleza ya que pueden estar asociados o no a resonancias secundarias. La caracterización y justificación de existencia de picos que aparecen a una frecuencia determinada en la respuesta se aborda desde condiciones necesarias y suficientes como estrategias complementarias del análisis no lineal. Con ese objetivo se implementó un procedimiento de predicción para determinar si se satisfacen o no condiciones necesarias de existencia de resonancias secundarias de picos no resonantes unido a criterios de representación suficientes para decidir sobre la presencia efectiva de la frecuencia bajo estudio en la respuesta del sistema. La aplicación del método de escalas múltiples en órdenes superiores de aproximación permite caracterizar la respuesta en frecuencia, componente por componente, en función de su importancia dentro del marco de la teoría de perturbaciones. Finalmente, se interpreta que los procedimientos seguidos facilitan la exploración, predicción, análisis y justificación de fenómenos no lineales en la dinámica de placas con grandes rotaciones.

REFERENCES

- Clough, R. W. y Penzien, J. Dynamics of Structures. Mc Graw-Hill, Inc., (1975)
- Ferreira, R.T., Aplicación del Método de Elementos Finitos al Análisis Dinámico No Lineal de Placas Planas Elásticas a través de la Expansión de Derivadas del Método de Escalas Múltiples. Tesis Doctoral, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Universidad Nacional de Córdoba, 2004.
- Nayfeh, A. H. Problems in Perturbation, John Wiley & Sons, Inc., 1985.
- Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger, S. Theory of Plates and Shells, Mc Graw-Hill, Inc., Nueva York. Traducción al Español, Ediciones Urmo, 1959.
- Zienkiewicz, O. C., El Método de Elementos Finitos, Editorial Reverté, 1980.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece a la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional de Córdoba por cubrir parte de los gastos para realizar este trabajo.