

SIMULACION NUMERICA DE MATERIALES CON MICRO POROS: INFLUENCIA DEL ESTADO DE TRIAXIALIDAD.

P.J. Sánchez^a, A.E. Huespe^a, J. Oliver^b and V. Sonzogni^a

^aCentro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería CIMEC-INTEC-UNL-CONICET,
Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina, psanchez@intec.unl.edu.ar, <http://cimec.org.ar>

^bUniversidad Politécnica de Cataluña (UPC) CIMNE, Edificio C1, Campus Norte, 08034 Barcelona,
España, oliver@cimne.upc.edu

Keywords: falla dúctil, modelo de Gurson, propagación de fractura.

Abstract. En el presente trabajo se propone una metodología numérica basada en la consideración de efectos observables a nivel micromecánico para simular computacionalmente el comportamiento constitutivo de materiales con heterogeneidades, tales como la existencia de micro poros o vacíos. Típicamente, esta situación se presenta en aleaciones metálicas, de allí la importancia y necesidad de su estudio. Se pretende analizar la respuesta material acoplando fenómenos provenientes de una escala micromecánica, basada en el concepto de celda unitaria, con otra macroscópica, formulada en el contexto clásico de leyes fenomenológicas, haciendo uso para ello del modelo constitutivo de Gurson. El objetivo final de este trabajo es obtener información del modelo micromecánico que se utiliza para caracterizar la energía de fractura macromecánica manteniendo constante uno de los parámetros más influyentes en la respuesta ante la falla de materiales dúctiles, como lo es el estado de triaxialidad. Este estudio es el paso previo para modelar fractura en metales incorporando modelos cohesivos. Se presenta además una nueva estrategia de integración aplicada al modelo de Gurson (método *Impl-ex*) que manifiesta un desempeño numérico superior con respecto a las metodologías actuales, fundamentalmente en lo que respecta a robustez del algoritmo.

1 INTRODUCCION

La falla por generación y propagación de fisuras en metales es el producto de la interacción mutua de tres mecanismos micromecánicos: *nucleación*, *crecimiento* y *coalescencia* de micro poros. Existe evidencia experimental que fundamenta esta afirmación. Incluso es factible también la interacción múltiple de poros [Tvergaard and Hutchinson \(2002\)](#) o entre poblaciones de vacíos de diferentes escalas de longitud, que coexisten en el medio. Por este motivo resulta natural la formulación de modelos constitutivos que acoplen tales efectos micromecánicos para estimar la respuesta a nivel macro. Basándose en estos conceptos, Gurson ([Gurson, 1975, 1977](#)) propuso una ley fenomenológica que ha cobrado relevancia en la comunidad científica, a tal punto que la gran mayoría de los modelos para la simulación de falla dúctil utilizan las ideas allí introducidas. Este modelo incorpora como nueva variable una fracción volumétrica de vacíos (f) para considerar la presencia de micro-cavidades en la matriz material. Un importante aporte posterior fue hecho por [Tvergaard \(1982\)](#) y [Tvergaard and Needleman \(1984\)](#) tras introducir un criterio empírico de *coalescencia* de poros, dando origen al denominado modelo GTN (Gurson-Tvergaard-Needleman). En este sentido también deben destacarse las contribuciones de otros investigadores, como por ejemplo [Xia et al. \(1995\)](#); [Zhang \(1998\)](#); [Zhang et al. \(2000\)](#); [Thomason \(1998\)](#). Para el estudio presente adoptaremos el modelo GTN.

En el contexto de la simulación numérica de falla dúctil, las líneas actuales de investigación están direccionadas a desarrollar herramientas que permitan analizar con mayor detalle los fenómenos que se manifiestan en el proceso de falla, como por ejemplo: (a) una mejor descripción del fenómeno de coalescencia de poros pre-existentes y predecir localización (o necking) entre vacíos, estimando así el modo de propagación de fractura viable (b) cuantificar las magnitudes de energía que se ponen en juego al propagar una fisura (energía estable o de deformación plástica generalizada vs. energía de fractura propiamente dicha), (c) idear modelos micromecánicos que permitan caracterizar los mecanismos observables a nivel macro, (d) introducir una regularización constitutiva que evite la falta de objetividad del modelo en la etapa post-crítica, etc. El estado de triaxialidad $T = \sigma_m/q$, definido como la relación entre la tensión media (σ_m) y la tensión equivalente de Von Mises (q), tiene una marcada influencia en cada uno de los aspectos mencionados anteriormente. La finalidad de este trabajo es comprender esta fuerte dependencia, particularmente en lo que respecta a la cuantificación de la energía de fractura. Como meta a largo plazo, esta información se utilizará para la caracterización de un modelo discreto cohesivo a introducir consistentemente en un medio gobernado por la ley GTN cuando se active el proceso de localización.

En ENIEF 2006, los autores han publicado algunos resultados preliminares en esta temática de estudio ([Sánchez et al., 2006a](#)). En el artículo presente se describen algunos avances complementarios considerados de importancia. Como aporte novedoso se introduce una forma alternativa y eficiente para integrar las ecuaciones del modelo GTN. Esta nueva técnica, denominada método *Impl-ex* (ver sección (3.2)) nos ha permitido resolver problemas de complejidad elevada con robustez y precisión razonable hasta agotar por completo el material, cuestión esta última de importancia cuando se intenta medir energía asociada al proceso de fractura. Como se mencionó, también es nuestro objetivo analizar la influencia del estado de triaxialidad (T) en el proceso de falla. Para encarar este último punto, fue necesario implementar condiciones de borde específicas con el fin de mantener el nivel de *triaxialidad medio* constante, durante el proceso completo de carga (ver sección (4)).

2 MODELO EXTENDIDO DE GURSON-TVERGAARD-NEEDLEMAN

Las ecuaciones que definen el modelo GTN ya son clásicas en el contexto del modelado de falla dúctil, por este motivo se introducen aquí en forma resumida. Según las consideraciones propuestas por Tvergaard (1981, 1982) y Tvergaard and Needleman (1984), es posible plantear:

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, f, \bar{\varepsilon}) = \left[\frac{q}{\sigma_0(\bar{\varepsilon})} \right]^2 + \underbrace{2q_1 f^*(f) \cosh(\alpha) - 1 - q_3 [f^*(f)]^2}_{\phi_p} \leq 0 \quad ; \quad \alpha = -\frac{3}{2} \frac{q_2 p}{\sigma_0} \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(p, q) = -p \mathbb{I} + \frac{2}{3} q \mathbf{n} \quad ; \quad \mathbf{n} = \sqrt{3/2} (\mathbf{S} / \|\mathbf{S}\|) \quad (2)$$

$$f^* = \begin{cases} f & \text{para } f \leq f_C \\ f_C + \frac{q_1 - f_C}{f_F - f_C} (f - f_C) & \text{para } f_C < f < f_F \end{cases} \quad (3)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ representa el tensor de tensiones de Cauchy, $p = -\frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$ es la presión, $q = [\frac{3}{2}(\mathbf{S} : \mathbf{S})]^{1/2}$ la tensión equivalente de Von-Mises dado que $\mathbf{S} = \text{dev}(\boldsymbol{\sigma})$, q_1 , q_2 y q_3 ($q_3 = q_1^2$) son parámetros materiales ajustables por experimentación y $\sigma_0 = \sigma_0(\bar{\varepsilon})$ es la tensión de fluencia equivalente microscópica dependiente de la deformación equivalente microscópica en la matriz del material ($\bar{\varepsilon}$) a través de una ley de endurecimiento que definimos como:

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_y} = \left[1 + \frac{E\bar{\varepsilon}}{\sigma_y} \right]^N \quad (4)$$

La fracción volumétrica de vacío (o porosidad) se considera a través del escalar f , que actúa como una variable interna adicional del modelo. Note que la función de fluencia ϕ depende de una *fracción de vacíos modificada* (f^*) incorporada para simular la degradación rápida de resistencia debido al proceso de coalescencia de poros. La modificación (3) se activa cuando $f > f_C$, siendo f_C el valor crítico de la fracción de poros que produce la coalescencia, mientras que f_F es aquél para el cual el material se encuentra completamente degradado. El término ϕ_p , que como veremos más adelante tendrá un tratamiento particular, se ha introducido para enfatizar la dependencia que posee la función $\phi(\boldsymbol{\sigma}, f, \bar{\varepsilon})$ con la presión hidrostática. En la expresión (2), \mathbb{I} representa el tensor identidad de segundo orden ($\mathbb{I} = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$).

La regla de flujo macroscópico sigue una ley de normalidad del tipo:

$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \gamma \underbrace{\left[\frac{q_1 q_2 f^*}{\sigma_0} \sinh(\alpha) \mathbb{I} + \frac{3}{\sigma_0^2} \mathbf{S} \right]}_M \quad (5)$$

siendo γ es el multiplicador plástico y M el tensor que aporta la dirección del flujo inelástico. Además, se verifica que:

$$\dot{\varepsilon}_p^p \frac{\partial \phi}{\partial q} + \dot{\varepsilon}_q^p \frac{\partial \phi}{\partial p} = 0 \quad (6)$$

donde la componente volumétrica ($\dot{\varepsilon}_p^p$) y desviadora ($\dot{\varepsilon}_q^p$) de la tasa de deformación plástica vienen definidas por las expresiones siguientes:

$$\dot{\varepsilon}_p^p = -\gamma \frac{\partial \phi}{\partial p} \quad ; \quad \dot{\varepsilon}_q^p = \gamma \frac{\partial \phi}{\partial q} \quad (7)$$

En la ley de evolución del parámetro de porosidad (f) aportan dos mecanismos. El primero debido a la velocidad de *crecimiento de poros*, que depende fundamentalmente del estado de triaxialidad. El segundo factor modela la velocidad de *nucleación de vacíos*, resultando ser una función de la tasa de deformación plástica equivalente ($\dot{\bar{\epsilon}}$) en la matriz:

$$\dot{f} = \underbrace{(1 - f) \dot{\epsilon}_p^p}_{\text{crecimiento}} + \underbrace{\mathcal{A}_m(\bar{\epsilon}) \dot{\bar{\epsilon}}}_{\text{nucleación}} \quad (8)$$

donde, según [Chu and Needleman \(1980\)](#), la función $\mathcal{A}_m(\bar{\epsilon})$ asegura que la nucleación de poros sigue una ley normal de distribución con valor medio $\bar{\epsilon}_N$ y desviación estándar es s_N . Finalmente, la tasa de deformación plástica microscópica ($\dot{\bar{\epsilon}}$) se deduce del balance de trabajo plástico a nivel macroscópico y microscópico:

$$(1 - f) \sigma_0 \dot{\bar{\epsilon}} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \quad (9)$$

3 INTEGRACION CONSTITUTIVA DEL MODELO GTN

La marcada no linealidad que presentan las leyes de evolución del modelo GTN se traduce en inconvenientes al momento de resolver numéricamente problemas reales, fundamentalmente en la etapa post-crítica de localización material. Este hecho ha motivado el desarrollo de numerosas estrategias de integración, ver por ejemplo [Zhang \(1995\)](#); [Kojic et al. \(2002\)](#); [Betegon et al. \(2006\)](#). En un trabajo previo, los autores presentaron un esquema implícito *fraccionado*, siguiendo la metodología propuesta anteriormente por [Aravas \(1987\)](#). En la presente contribución se avanza un paso más logrando introducir un nuevo esquema de integración denominado método *Impl-ex*. Esta metodología surge como una extensión de los conceptos discutidos en [Oliver et al. \(2005\)](#), aplicado ahora a un modelo fuertemente dependiente del estado hidrostático de tensión, lo cual introduce algunas consideraciones especiales ([Sánchez et al., 2006b](#)).

En líneas generales, el esquema *Impl-ex* requiere dos etapas de integración por cada paso de tiempo. La primera corresponde a una estrategia implícita estándar mientras que la restante está basada en una extrapolación explícita. A continuación discutimos ambas etapas de cálculo y la forma en que interactúan y se complementan. También describimos al detalle el algoritmo numérico junto con su derivada consistente para la implementación computacional del esquema.

3.1 Esquema de integración implícito fraccionado

Como se mencionó, un aspecto clave del método *Impl-ex* consiste en obtener, en primera instancia, una solución implícita estándar. Por completitud se reescribe aquí un esquema ya propuesto por los autores para esta etapa inicial ([Sánchez et al., 2006a](#)). Discretizando las ecuaciones de gobierno del modelo GTN (1,6,8,9) mediante un esquema en diferencias finitas retrasado, es posible escribir:

$$\Delta \epsilon_p^p \frac{\partial \phi}{\partial q} + \Delta \epsilon_q^p \frac{\partial \phi}{\partial p} = 0 \quad \text{eq. (a)}$$

$$\left[\frac{q}{\sigma_0} \right]^2 + 2 q_1 f^* \cosh(\alpha) - 1 - q_3 (f^*)^2 = 0 \quad \text{eq. (b)} \quad (10)$$

$$\frac{-p \Delta \epsilon_p^p + q \Delta \epsilon_q^p}{(1 - f) \sigma_0} - \Delta \bar{\epsilon} = 0 \quad \text{eq. (c)}$$

$$(1 - f) \Delta \epsilon_p^p + \mathcal{A}_m \Delta \bar{\epsilon} - \Delta f = 0 \quad \text{eq. (d)}$$

donde $[\Delta\varepsilon_p^p, \Delta\varepsilon_q^p, \Delta\bar{\varepsilon}, \Delta f]$ representa el vector de incrementos finitos de las variables en tasas $[\dot{\varepsilon}_p^p, \dot{\varepsilon}_q^p, \dot{\bar{\varepsilon}}, \dot{f}]$, respectivamente. En forma compacta las ecuaciones (10) pueden expresarse como: $\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{0}$, donde el residuo (\mathbf{R}) del sistema queda definido mediante:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_a \\ R_b \\ \dots \\ R_c \\ R_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \dots \\ \mathbf{R}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_p^p \frac{\partial\phi}{\partial q} + \Delta\varepsilon_q^p \frac{\partial\phi}{\partial p} \\ \left(\frac{q}{\sigma_0}\right)^2 + 2q_1 f^* \cosh(\alpha) - 1 - q_3 (f^*)^2 \\ \dots \\ \frac{-p\Delta\varepsilon_p^p + q\Delta\varepsilon_q^p}{(1-f)\sigma_0} - \Delta\bar{\varepsilon} \\ (1-f)\Delta\varepsilon_p^p + \mathcal{A}_m \Delta\bar{\varepsilon} - \Delta f \end{bmatrix} \quad (11)$$

La solución del sistema (10) puede obtenerse vía un procedimiento iterativo tipo Newton-Raphson. Definimos $\Delta\mathbf{X} = [\Delta\varepsilon_p^p, \Delta\varepsilon_q^p, \Delta\bar{\varepsilon}, \Delta f] = (\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n)$ como el vector de incrementos finitos de las variables internas, luego la corrección de primer orden $\delta\mathbf{X}^{(i)}$ para tales incrementos $\Delta\mathbf{X}$, se computa como:

$$\delta\mathbf{X}^{(i)} = -\mathbf{J}^{(i)-1} \mathbf{R}^{(i)} \quad ; \quad \delta\mathbf{X}^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta\Delta\varepsilon_p^p \\ \delta\Delta\varepsilon_q^p \\ \dots \\ \delta\Delta\bar{\varepsilon} \\ \delta\Delta f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \dots \\ \delta_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

siendo \mathbf{J} la matriz jacobiana obtenida tras linealizar el sistema de ecuaciones (10):

$$\mathbf{J}^{(i)} = \frac{\partial\mathbf{R}^{(i)}}{\partial\Delta\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} J_{aa} & J_{ab} & : & J_{ac} & J_{ad} \\ J_{ba} & J_{bb} & : & J_{bc} & J_{bd} \\ \dots & \dots & . & \dots & \dots \\ J_{ca} & J_{cb} & : & J_{cc} & J_{cd} \\ J_{da} & J_{db} & : & J_{dc} & J_{dd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & : & \mathbf{A}_{12} \\ \dots & . & \dots \\ \mathbf{A}_{21} & : & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (13)$$

En (12-13) el supra-índice (i) implica iteración número “ i ” en el mismo paso de tiempo: ($n+1$). Las expresiones para cada componente de \mathbf{J} pueden encontrarse en Sánchez et al. (2006a,b).

Basándonos en la partición sugerida por la ecs. (11)-(13), en el cuadro (1) se propone un algoritmo de integración con doble loop iterativo (*esquema fraccionado*). El loop interno resuelve $\|\mathbf{R}_2\| = 0$ manteniendo fijo $\delta_1 \equiv \mathbf{0}$, de esta forma cada iteración primaria determina:

$$\delta_2 = \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{R}_2 \quad (14)$$

hasta la convergencia. Según (12), el loop externo evalúa δ_1 , considerando $\mathbf{R}_2 = \mathbf{0}$, mediante:

$$\delta_1 = (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21})^{-1} \mathbf{R}_1 \quad (15)$$

3.2 Esquema de integración Implícito-Explícito (*Impl-Ex*)

La aplicación del procedimiento descrito en la sección previa origina una metodología suficientemente robusta sólo cuando la respuesta material está gobernada por campos cuasi homogéneos de deformación plástica y bajos niveles de porosidad. Por el contrario, la estabilidad del esquema se ve sustancialmente degradada en el régimen post-crítico donde el proceso de coalescencia de vacíos y localización se torna dominante. Este comportamiento numérico espúreo se debe a la pérdida de definición positiva del tensor tangente. Tales inconvenientes surgen como motivación para desarrollar técnicas alternativas.

Cuadro 1: Algoritmo *implícito* de integración numérica para el modelo GTN.

Paso de integración: $(n + 1)$

DATOS: ε_{n+1} ; $\mathbf{X}_n = [\varepsilon_n^p, \bar{\varepsilon}_n, f_n]$

(1) Estado trial

Computar: $\boldsymbol{\sigma}^{trial} = \mathbf{C}^e : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p)$; $\mathbf{S}^{trial} = dev(\boldsymbol{\sigma}^{trial})$
 $p_{n+1} = p^{trial} = -\frac{1}{3} tr(\boldsymbol{\sigma}^{trial})$; $q_{n+1} = q^{trial} = [3/2 (\mathbf{S}^{trial} : \mathbf{S}^{trial})]^{1/2}$
 $\mathbf{n}^{trial} = \sqrt{3/2} (\mathbf{S}^{trial} / \|\mathbf{S}\|^{trial})$; $\phi^{trial} = \phi(\boldsymbol{\sigma}^{trial}, \bar{\varepsilon}_n, f_n)$
Asumir: $\Delta \mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{0}$, i.e: $\Delta \varepsilon_p^p = \Delta \varepsilon_q^p = \Delta \bar{\varepsilon} = \Delta f = 0$

(2) Verificar criterio de fluencia

Si $\phi^{trial} \leq 0 \rightarrow$ avanzar al paso (7)
Si $\phi^{trial} > 0 \rightarrow$ avanzar al paso (3)

(3) Loop externo de Newton: iteración en $\Delta \varepsilon_p^p$ y $\Delta \varepsilon_q^p$, para resolver $\mathbf{R}_{1n+1} = \mathbf{0}$

Evaluar: $\sigma_0 = \sigma_0(\bar{\varepsilon})$ y $\mathcal{A}_m = \mathcal{A}_m(\bar{\varepsilon})$
Computar residuo: $\mathbf{R}_1(\Delta \varepsilon_p^p, \Delta \varepsilon_q^p, \Delta \bar{\varepsilon}, \Delta f)$, a partir de ec. (11)
Computar jacobiano: \mathbf{J} , a partir de ec. (13)
Computar incrementos para las dos primeras ecs: $\boldsymbol{\delta}_1 = [\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21}]^{-1} \mathbf{R}_1$
Actualizar: $\begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_p^p \\ \Delta \varepsilon_q^p \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_p^p \\ \Delta \varepsilon_q^p \end{bmatrix} + \boldsymbol{\delta}_1$
Actualizar: $p_{n+1} = p^{trial} + \kappa \Delta \varepsilon_p^p$
Actualizar: $q_{n+1} = q^{trial} - 3\mu \Delta \varepsilon_q^p$

(4) Loop interno de Newton: iteración en $\Delta \bar{\varepsilon}$ y Δf , para resolver $\mathbf{R}_{2n+1} = \mathbf{0}$

Evaluar: $\sigma_0 = \sigma_0(\bar{\varepsilon})$ y $\mathcal{A}_m = \mathcal{A}_m(\bar{\varepsilon})$
Computar residuo: $\mathbf{R}_2(\Delta \varepsilon_p^p, \Delta \varepsilon_q^p, \Delta \bar{\varepsilon}, \Delta f)$, a partir de ec. (11)
Computar: \mathbf{A}_{22} , from eq. (13)
Computar incrementos para las dos últimas ecs.: $\boldsymbol{\delta}_2 = \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{R}_2$
Actualizar: $\begin{bmatrix} \Delta \bar{\varepsilon} \\ \Delta f \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \Delta \bar{\varepsilon} \\ \Delta f \end{bmatrix} + \boldsymbol{\delta}_2$
Actualizar: $\bar{\varepsilon}_{n+1} = \bar{\varepsilon}_n + \Delta \bar{\varepsilon}$
Actualizar: $f_{n+1} = f_n + \Delta f$

(5) Verificar convergencia para el loop interno

Actualizar residuo: $\mathbf{R}_2(\Delta \varepsilon_p^p, \Delta \varepsilon_q^p, \Delta \bar{\varepsilon}, \Delta f)$, a partir de ec. (11)
Si $\|\mathbf{R}_2\| < tol2 \rightarrow$ Avanzar al paso (6)
Sino \rightarrow Retroceder al paso (4)

Fin loop interno

(6) Verificar convergencia para el loop externo

Actualizar residuo: $\mathbf{R}_1(\Delta \varepsilon_p^p, \Delta \varepsilon_q^p, \Delta \bar{\varepsilon}, \Delta f)$, a partir de ec. (11)
Si $\|\mathbf{R}_1\| < tol1 \rightarrow$ Avanzar al paso (7)
Sino \rightarrow Retroceder al paso (3)

Fin loop externo

(7) Actualizar estado de tensión

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = -p_{n+1} \mathbb{I} + \frac{2}{3} q_{n+1} \mathbf{n}^{trial}$$

(8) Actualizar tensor de deformación plástica

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \frac{1}{3} \Delta \varepsilon_p^p \mathbb{I} + \Delta \varepsilon_q^p \mathbf{n}^{trial}$$

SALIDA: $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$; $\mathbf{X}_{n+1} = [\varepsilon_{n+1}^p, \bar{\varepsilon}_{n+1}, f_{n+1}]$

Se propone entonces un nuevo esquema de integración constitutivo, en el cual se definen dos secuencias de variables:

- secuencia “implícita”, denotada por el símbolo ($\hat{\cdot}$) sobre cada variable: $\{\hat{\sigma}, \hat{\epsilon}^p, \hat{\gamma}, \hat{f}, \hat{\epsilon}\}$.
- secuencia “explícita”, denotada con el símbolo ($\tilde{\cdot}$) sobre cada variable: $\{\tilde{\sigma}, \tilde{\epsilon}^p, \tilde{\gamma}, \tilde{f}, \tilde{\epsilon}\}$.

3.2.1 Algoritmo propuesto para el método *Impl-Ex*

Consideremos conocido el incremento total de deformación $\Delta\epsilon_{n+1}$ al paso de tiempo en estudio ($n + 1$). El conjunto de variables implícitas $\{\hat{\sigma}_{n+1}, \hat{\epsilon}_{n+1}^p, \hat{\gamma}_{n+1}, \hat{f}_{n+1}, \hat{\epsilon}_{n+1}\}$ pueden obtenerse aplicando el algoritmo descrito en el Cuadro (1). La secuencia explícita de variables se actualiza mediante el procedimiento siguiente:

- (1) las variables internas implícitas $\hat{f}_n, \hat{\epsilon}_n$ y el multiplicador plástico $\hat{\gamma}_n$ del paso de tiempo previo se asignan a las correspondientes variables explícitas del paso actual:

$$\tilde{f}_{n+1} = \hat{f}_n \quad (16)$$

$$\tilde{\epsilon}_{n+1} = \hat{\epsilon}_n \quad (17)$$

$$\tilde{\gamma}_{n+1} = \hat{\gamma}_n \frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta t_n} \quad (18)$$

note que la ec. (18) considera la posibilidad de escalamiento en la longitud de pasos de tiempo consecutivos, a través del factor: $\Delta t_{n+1}/\Delta t_n$.

Una vez definido \tilde{f}_{n+1} y $\tilde{\epsilon}_{n+1}$, las variables $\tilde{\sigma}_{0n+1}$ y \tilde{f}_{n+1}^* se determinan mediante la ley de endurecimiento adoptada y la ec. (3) respectivamente, ya que:

$$\tilde{f}_{n+1}^* = f^*(\tilde{f}_{n+1}) \quad (19)$$

$$\tilde{\sigma}_{0n+1} = \sigma_0(\tilde{\epsilon}_{n+1}) \quad (20)$$

- (2) el tensor de tensiones explícito se actualiza siguiendo un esquema *Predictor Elástico - Corrector Plástico*:

$$\tilde{\sigma}_{n+1} = \hat{\sigma}_n + \mathbf{C}^e : (\Delta\epsilon_{n+1} - \Delta\tilde{\epsilon}_{n+1}^p) = \underbrace{\hat{\sigma}^{trial}}_{\text{Predictor Elástico}} - \underbrace{\mathbf{C}^e : \Delta\tilde{\epsilon}_{n+1}^p}_{\text{Corrector Plástico}} \quad (21)$$

donde debe enfatizarse que el primer término, $\hat{\sigma}^{trial} = \hat{\sigma}_n + \mathbf{C}^e : \Delta\epsilon_{n+1}$, coincide con el predictor elástico implícito del paso actual ($n + 1$). El término correctivo considera un valor explícito de la deformación plástica ($\Delta\tilde{\epsilon}^p$):

$$\Delta\tilde{\epsilon}_{n+1}^p = \tilde{\gamma}_{n+1} \frac{\partial\psi(\tilde{\sigma}_{n+1}, \tilde{f}_{n+1}, \tilde{\epsilon}_{n+1})}{\partial\sigma} \quad (22)$$

siendo la función ψ similar al criterio de fluencia GTN:

$$\psi = \left[\frac{q}{\sigma_0} \right]^2 + \psi_p - 1 - q_3 (f^*)^2 \quad (23)$$

en la cual el término dependiente de la presión, ψ_p , resulta una aproximación parabólica de ϕ_p (ver ecuación (1)):

$$\begin{aligned} \psi_p(p) &= \phi_p(\hat{p}_n) + \frac{\partial \phi_p(\hat{p}_n)}{\partial p} [p - \hat{p}_n] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_p(\hat{p}_n)}{\partial p^2} [p - \hat{p}_n]^2 = \\ &= \phi_p(\hat{p}_n) + \tilde{\chi} \tilde{\omega} \sinh(\tilde{\omega} \hat{p}_n) [p - \hat{p}_n] + \frac{1}{2} \tilde{\chi} \tilde{\omega}^2 \cosh(\tilde{\omega} \hat{p}_n) [p - \hat{p}_n]^2 \quad (24) \\ \tilde{\chi} &= 2 q_1 \tilde{f}_{n+1}^* \quad ; \quad \tilde{\omega} = -\frac{3}{2} \frac{q_2}{\tilde{\sigma}_{0n+1}} \end{aligned}$$

Según las ecs. (21-24), la extrapolación explícita de la tensión $\tilde{\sigma}_{n+1}$ puede computarse en forma cerrada:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{n+1} &= \tilde{\mathbf{S}}_{n+1} - \tilde{p}_{n+1} \mathbf{I} \\ \tilde{\mathbf{S}}_{n+1} &= \left[1 + \frac{6 \mu \tilde{\gamma}_{n+1}}{\tilde{\sigma}_{0n+1}^2} \right]^{-1} \hat{\mathbf{S}}^{trial} \quad (25) \\ \tilde{p}_{n+1} &= (1 + \kappa \tilde{\gamma}_{n+1} \tilde{\chi} \tilde{\omega}^2 \cosh(\tilde{\omega} \hat{p}_n))^{-1} \left[\hat{p}^{trial} - \kappa \tilde{\gamma}_{n+1} \frac{\partial \phi_p(\hat{p}_n)}{\partial p} \right] \end{aligned}$$

El cuadro (2) resume el algoritmo completo para la implementación del método *Impl-ex*.

3.3 Módulo tangente consistente: módulo efectivo

La derivada consistente del esquema *Impl-ex* descrito anteriormente puede deducirse a partir de la forma débil discreta (vía MEF) que adopta el residuo global ($\widetilde{\mathbf{Res}}$) de las ecuaciones de equilibrio, el cual se asume estar definido en términos de las tensiones explícitas $\tilde{\sigma}$ y las fuerzas externas:

$$\widetilde{\mathbf{Res}} = \int_{\Omega} (\tilde{\sigma}_{n+1} : \nabla^s \delta \mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} (\mathbf{f}^{ext} \cdot \delta \mathbf{u}) d\Omega \quad ; \quad \forall \delta \mathbf{u} \text{ compatible} \quad (26)$$

en donde el vector de desplazamientos incrementales de la estructura $\Delta \mathbf{u}$ se computa, en general, mediante un procedimiento iterativo del tipo:

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{u} = -\widetilde{\mathbf{Res}} \quad (27)$$

La matriz de rigidez $\mathbf{K} = \partial \widetilde{\mathbf{Res}} / \partial \mathbf{u}$ se obtiene a partir de la contribución de matrices elementales \mathbf{K}^e , como sigue:

$$\mathbf{K} = \bigoplus_{e=1}^{n_{elem}} \mathbf{K}^e \quad ; \quad \mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \left[\mathbf{B}^T \frac{\partial \tilde{\sigma}_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} \mathbf{B} \right] d\Omega \quad (28)$$

Cuadro 2: Algoritmo *Implex* de integración numérica para el modelo GTN.

Paso de Integración: $(n + 1)$

DATOS: ε_{n+1} ; valores previos implícitos: $\hat{\mathbf{X}}_n, \hat{p}_n, \hat{\gamma}_n$

(1) Integración implícita

LLAMADA A LA RUTINA IMPLICITA (Cuadro (1))

SALIDA: $\hat{\sigma}_{n+1}$; $\hat{\mathbf{X}}_{n+1}$; \hat{p}^{trial} ; $\hat{\mathbf{S}}^{trial}$

(2) Extrapolación de variables internas a partir de valores implícitos previos

$$\tilde{\gamma}_{n+1} = \hat{\gamma}_n \frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta t_n}$$

$$\tilde{\varepsilon}_{n+1} = \hat{\varepsilon}_n$$

$$\tilde{f}_{n+1} = \hat{f}_n$$

(3) Actualizar estado de tensión: $\tilde{\sigma}_{n+1}$

Evaluar: $\beta_1 = 1 + [6 \mu \tilde{\gamma}_{n+1} / \tilde{\sigma}_{0n+1}^2]$

Evaluar: $\beta_2 = 1 + \kappa \tilde{\gamma}_{n+1} \tilde{\chi} \tilde{\omega}^2 \cosh(\tilde{\omega} \hat{p}_n)$

donde: $\tilde{\chi} = 2 q_1 \tilde{f}_{n+1}^*$; $\tilde{\omega} = -\frac{3}{2} \frac{q_2}{\tilde{\sigma}_{0n+1}^2}$

Computar: $\tilde{\mathbf{S}}_{n+1} = \frac{1}{\beta_1} \hat{\mathbf{S}}^{trial}$

$$\tilde{p}_{n+1} = \frac{1}{\beta_2} [\hat{p}^{trial} - \kappa \tilde{\gamma}_{n+1} \phi_p(\hat{p}_n)]$$

$$\tilde{\sigma}_{n+1} = -\tilde{p}_{n+1} \mathbb{I} + \tilde{\mathbf{S}}_{n+1}$$

SALIDA: valores explícitos: $\tilde{\sigma}_{n+1}, \tilde{\mathbf{X}}_{n+1}$; valores implícitos: $\hat{p}_{n+1}, \hat{\mathbf{X}}_{n+1}$

donde \mathbf{A} representa el operador de ensamblaje estándar de elementos finitos y \mathbf{B} es la matriz elemental que mapea desplazamientos en deformaciones. Teniendo en cuenta las ecs. (21-24), el tensor *tangente efectivo* \mathbf{C}_{n+1}^{eff} viene dado por:

$$\mathbf{C}_{n+1}^{eff} = \frac{\partial \tilde{\sigma}_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \tilde{\kappa} \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + 2 \tilde{\mu} \left[\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \right]$$

$$\tilde{\mu} = \mu \left[1 + \frac{6 \mu \tilde{\gamma}_{n+1}}{\tilde{\sigma}_{0n+1}^2} \right]^{-1} ; \quad \tilde{\mu} > 0$$

$$\tilde{\kappa} = \kappa \left(1 + \kappa \tilde{\gamma}_{n+1} \tilde{\chi} \tilde{\omega}^2 \cosh(\tilde{\omega} \hat{p}_n) \right)^{-1} ; \quad \tilde{\kappa} > 0$$
(29)

siendo \mathbb{I} es el tensor identidad de cuarto orden ($\mathbb{I} = 1/2 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$).

Como se infiere de la ecuación (29), el operador \mathbf{C}_{n+1}^{eff} se mantiene siempre *definido positivo* aún durante el proceso de falla material. Es simple demostrar que la matriz de rigidez estructural \mathbf{K} hereda también esta cualidad matemática, determinando así un sistema de ecuaciones bien colocado desde el punto de vista numérico. Nótese además que, en el contexto de pequeñas deformaciones que nos ocupa, \mathbf{C}_{n+1}^{eff} (y por ende \mathbf{K}) es constante con lo cual el sistema global de ecuaciones (27) requiere una única iteración por paso de tiempo para converger. Estas dos propiedades importantes del tensor tangente, a saber: (i) *definición positiva* y (ii) *valor constante por paso de tiempo*, inherentes al método de integración propuesto, caracterizan la robustez y el excelente desempeño del esquema *Impl-ex* si lo comparamos, por ejemplo, con el procedimiento implícito de la sección (3.1). Un análisis de exactitud y velocidad de convergencia del método, aplicado al modelo GTN, puede encontrarse en Sánchez et al. (2006b). En este trabajo estamos más interesados en mostrar sus aplicaciones en la simulación de falla dúctil.

4 RESPUESTA DEL MODELO GTN SOMETIDO A CONDICIONES DE TRIAXIALIDAD CONSTANTE

El factor de triaxialidad del estado tensional, T , gobierna completamente las condiciones de propagación de fisuras en falla dúctil. Es una de las variables más significativas en este tipo de problemas. Por lo tanto, es importante conocer la dependencia del modelo con este factor, y más aún, saber si esta respuesta coincide con la fenomenología observada.

En la presente sección estudiamos mediante simulación numérica esta dependencia. Para ello es necesario realizar una serie de experimentos en los cuales sea posible gobernar adecuadamente la triaxialidad del estado tensional durante el proceso de carga.

4.1 Desarrollo de un modelo numérico para preservar la triaxialidad constante en una celda representativa

Siguiendo a [Faleskog et al. \(1998-a\)](#) hemos desarrollado un modelo de elementos finitos para conseguir este objetivo. La idea consiste en imponer, en una celda unitaria, condiciones de contorno debidamente especificadas de tal modo que se mantengan constantes, en valores medios, las relaciones entre las 3 tensiones principales:

$$\rho_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = cte \quad ; \quad \rho_3 = \frac{\sigma_3}{\sigma_1} = cte \quad (30)$$

Bajo esta condición, es directo observar que T resulta una función única de ρ_2 y ρ_3 : $T(\rho_2, \rho_3)$, con lo cual se mantendrá constante durante el proceso e carga.

Asumimos un estado de deformación plana. En este caso, nuestro interés consiste en mantener una relación constante entre las tensiones principales en el plano $x-y$. Según la referencia arriba citada, la cara superior de la celda unitaria de la Figura 1 se estira con una velocidad constante, $\dot{\delta}_y = cte$. Un elemento finito especialmente desarrollado, permite verificar que la cara vertical se estire uniformemente con un valor $\dot{\delta}_x = cte$, sin alabearse, de tal modo que la fuerza resultante sobre las caras superior (Σ_y) y vertical (Σ_x) verifiquen la condición: $\Sigma_x = \rho_x \Sigma_y$ con ρ_x un constante fijada de antemano. Sabiendo además que las fuerzas resultantes Σ_y y Σ_x son los valores medios (en el volumen) de las tensiones σ_x y σ_y (Hill, 1967), y que por las mismas razones σ_{xy} en valor medio se anula, el procedimiento brinda una relación media constante entre las tensiones principales.

4.2 Análisis en una celda representativa

En la Figura 1-(b) verificamos el modelo, comparando la solución numérica que hemos obtenido respecto a la publicada por [Faleskog et al. \(1998-a\)](#). Se puede observar en la figura, que cuando la celda no es perturbada, ni geométrica ni materialmente, la solución obtenida coincide muy aproximadamente con la referencia, a pesar que nuestro modelo utiliza una cinemática linealizada y la referencia una cinemática exacta. No obstante, en nuestro modelo, detectamos inestabilidad del material justo al sobrepasar la carga límite. La dirección de bifurcación, sin embargo no es de 0° compatible con el modo de localización admisible por las condiciones de borde (ver [Sánchez et al. \(2006b\)](#)). El ángulo de cero grado se consigue posteriormente.

Al introducir una perturbación en las propiedades del material (aumentando f_o en un 1% en el elemento A de la figura 1-(a)) se observa un adelantamiento notable del punto de bifurcación, en concordancia con el análisis de inestabilidad analítico. Aparentemente, este efecto no fue detectado por los autores en la referencia citada.

En la Figura 1-(c) estudiamos la sensibilidad de la respuesta del modelo, curva (Σ_y/σ_o) vs.

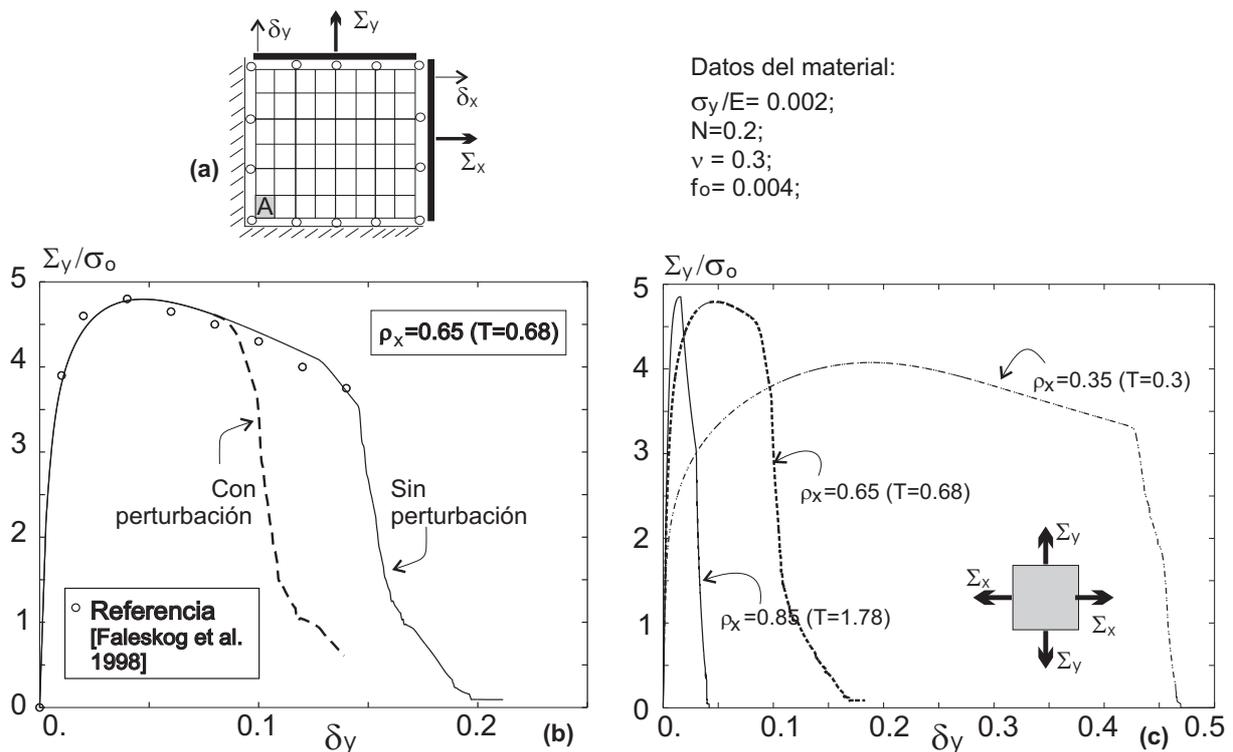


Figure 1: Determinación de la respuesta del modelo GTN en procesos de carga bajo condiciones de triaxialidad constante: (a) celda unitaria representativa y datos del material modelado; (b) validación del modelo; (c) respuesta carga-desplazamiento para diferentes valores de T .

δ_y , con el factor ρ_x (triaxialidad T). Vemos la notable influencia que tiene este factor sobre el comportamiento frágil-dúctil del material.

En la Figura 2-(a) analizamos la energía total consumida por la celda W^{int} para conseguir la degradación completa del material en función del factor de triaxialidad y del exponente de endurecimiento N (ver ec. (4)), considérese que $W^{ext} = W^{int}$. En la Figura 2-(b) se muestra la dependencia de la tensión pico, σ^{max} , en función de estas dos variables.

5 CONCLUSIONES

En este trabajo se muestran resultados parciales de una línea de investigación en actual desarrollo direccionada a modelar numéricamente falla dúctil. A continuación se enumeran las conclusiones obtenidas:

- el método *Impl-ex* de integración constitutiva resulta ser un esquema robusto y confiable, permitiéndonos obtener la historia completa de respuesta material hasta el completo agotamiento de su resistencia. Esto, ciertamente, representa un aporte novedoso en la temática de estudio dada la complejidad del fenómeno que se intenta modelar.
- se ha desarrollado una metodología numérica general que nos permite simular problemas de fractura dúctil manteniendo el nivel medio de triaxialidad T constante en el volumen de una celda representativa. Esta técnica permite realizar estudios paramétricos en función de T , en modelos micro-mecánicos, con el fin de comprender más profundamente la sensibilidad ante sus variaciones.
- el estado de triaxialidad T tiene una notoria influencia en la respuesta material. Esta de-

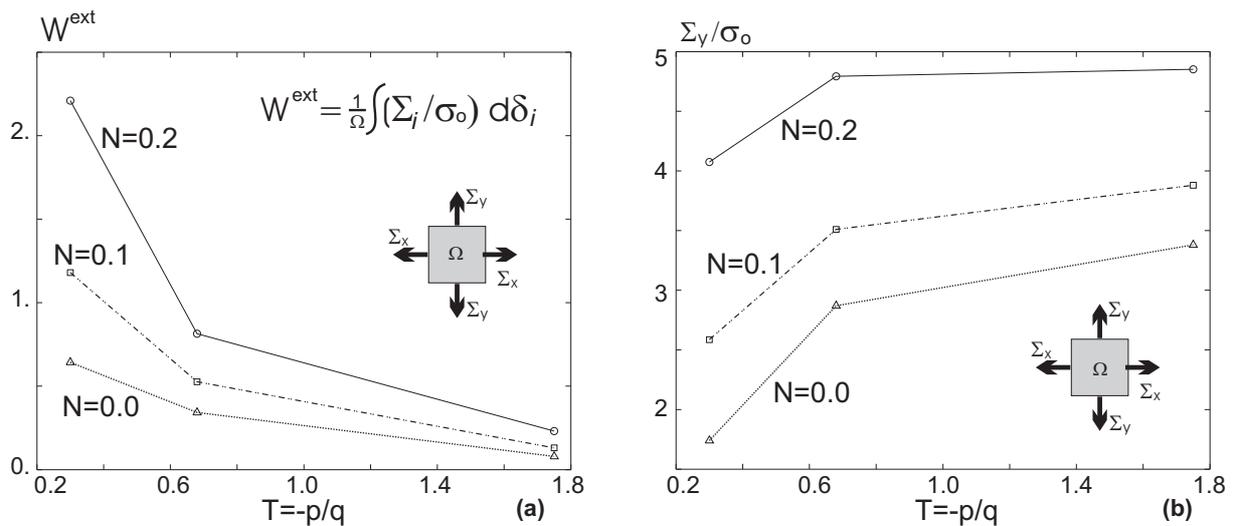


Figure 2: Determinación de la respuesta del modelo GTN: (a) energía total requerida para producir el agotamiento completo de la celda; (b) tensión máxima.

pendencia se ha estudiado cuantificando la energía total consumida hasta alcanzar la falla y el valor que toma la carga límite en una celda representativa que responde al modelo GTN. Los resultados obtenidos concuerdan razonablemente bien con los publicados por otros autores.

- se ha observado además una transición bien definida entre modos dúctiles y frágiles de falla conforme T se incrementa. Para un mismo valor de triaxialidad, la energía de fractura y la carga límite aumenta si crece el exponente N de la ley de endurecimiento.

A futuro se prevee el desarrollo un modelo GTN macroscópico regularizado para simular falla dúctil, enriquecido con una ley discreta-cohesiva para simular el proceso de coalescencia de poros y propagación de fractura.

REFERENCES

- Aravas N. On the numerical integration of a class of pressure-dependent plasticity models. *Int. J. Numer Methods Eng.*, 24:1395–1416, 1987.
- Betegon C., del Coz J., and Peñuelas I. Implicit integration procedure for viscoplastic gurson material. *Comput. Methods App. Mech. Eng.*, 195:6146–6157, 2006.
- Chu C. and Needleman A. Void nucleation effects in biaxially stretched sheets. *J. Engng. Materials Technol.*, 102:249–256, 1980.
- Faleskog J., Gao X., and Shih C. Cell model for nonlinear fracture analysis. Part I: Micromechanics calibration. *Int. J. Fract.*, 89:355–373, 1998-a.
- Gurson A. *Plastic flow and fracture behavior of ductile materials incorporating void nucleation, growth and coalescence*. Ph.D. thesis, Brown University, 1975.
- Gurson A. Continuum of ductile rupture by void nucleation and growth - Part I: Yield criteria and flow rules for porous ductile media. *J. Engng. Materials Technol. ASME*, 99:2–15, 1977.
- Kojic M., Vlastelica I., and Zivkovic M. Implicit stress integration procedure for large strain deformation of Gurson model. *Int. J. Numer Methods Eng.*, 53:2701–2720, 2002.
- Oliver J., Huespe A., Blanco S., and Linero D. Stability and robustness issues in numerical modeling of material failure with the strong discontinuity approach. *Comput. Methods App. Mech. Eng.*, 195(52):7093–7114, 2005.

- Sánchez P., Huespe A., Anca A., and Sonzogni V. Modos de falla dúctil y bifurcación material utilizando el modelo de Gurson. In V.S.M.S. A. Cardona N. Nigro, editor, *XV Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones, ENIEF 2006*, pages 1975–1995. AMCA, Santa Fe, Argentina, 2006a.
- Sánchez P., Huespe A., and Oliver J. On some topic for the numerical simulation of ductile fracture. *International Journal of Plasticity (enviado)*, 2006b.
- Thomason P. A view on ductile-fracture modelling. *Fatig. Fract. Engng. Mat. Struct.*, 21:1105–1122, 1998.
- Tvergaard V. Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions. *Int. J. Fract.*, 17:389–407, 1981.
- Tvergaard V. On localization in ductile materials containing spherical voids. *Int. J. Fract.*, 18:237–252, 1982.
- Tvergaard V. and Hutchinson J.W. Two mechanisms of ductile fracture: void by void growth versus multiple void interactions. *Int. J. Solids Struct.*, 39:3581–3597, 2002.
- Tvergaard V. and Needleman A. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Metall.*, 32:157–169, 1984.
- Xia L., Shih C., and Hutchinson J. Computational approach to ductile crack growth under large scale yielding conditions. *J. Mech. Phys. Solids*, 43:389–413, 1995.
- Zhang Z. On the accuracies of numerical integration algorithms for Gurson-based pressure-dependent elastoplastic constitutive models. *Comput. Methods App. Mech. Eng.*, 121:29–44, 1995.
- Zhang Z. A complete Gurson model. Nonlinear fracture and damage mechanics. In M. Aliabadi, editor, *Computational Mechanics Publications*. 1998.
- Zhang Z., Thaulow C., and Odegard J. A complete Gurson model approach for ductile fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 67:155–168, 2000.