

MODELO SIMPLIFICADO PARA EL ANÁLISIS DINÁMICO DE PILOTES SOMETIDOS A CARGA HORIZONTAL

Gustavo E. Pacheco^a, Luis E. Suárez^b y Miguel Pando^b

^aDepartamento de Ingeniería Civil y Ambiental, Universidad Politécnica de Puerto Rico, PO BOX 192017, San Juan, Puerto Rico, 00919-2017, <http://www.pupr.edu>

^bDepartamento de Ingeniería Civil y Agrimensura, Universidad de Puerto Rico, Recinto Universitario de Mayagüez, PO BOX 9041, Mayagüez, Puerto Rico, 00681-9041, <http://civil.uprm.edu>

Palabras Claves: pilotes, carga horizontal dinámica, modelos de Winkler.

Resumen. El modelo más usado para efectuar el análisis de pilotes bajo carga lateral consiste en modelar el pilote como una serie de elementos de viga (flexionales), y considerar la interacción suelo-pilote representando al suelo como un grupo de resortes concentrados perpendiculares al pilote (*Modelo Discreto de Winkler*). Una de las *rigideces dinámicas* más usadas y reconocidas para estos resortes (trabajando en el rango lineal elástico) es la propuesta por Novak; sin embargo, una desventaja de la misma es que su expresión es dependiente de la frecuencia (lo que no permite usarla para análisis en el dominio del tiempo), y muy laboriosa de computar para efectos de la práctica profesional diaria. En este artículo se presenta un modelo simplificado resultante de hacer un análisis de regresión a la rigidez dinámica de Novak. El modelo propuesto tiene las siguientes ventajas: 1) los coeficientes de rigidez k_a , masa m_a y amortiguamiento c_a se obtienen a través de expresiones sencillas, e independientes una de otra; 2) los coeficientes son independientes de la frecuencia; 3) el modelo es fácil de implementar en cualquier programa de análisis estructural comercial, ya que la mayoría permite asignar masas concentradas, resortes y amortiguadores a los nodos de un modelo de elementos finitos; 4) puede extenderse a análisis no lineal, usando las *curvas p-y* para variar la rigidez, tomando k_a como la pendiente inicial de las mismas; 5) podría usarse como base para el desarrollo de especificaciones simplificadas para la interacción suelo pilote.

1 INTRODUCCION

Las fundaciones compuestas por un pilote aislado o un grupo de pilotes son usadas extensivamente en suelos blandos, donde las fundaciones superficiales no son adecuadas debido a que no pueden proveer la capacidad requerida, o a que pueden experimentar grandes asentamientos. Estos pilotes deben diseñarse para soportar cargas laterales debidas a sismos, viento, choques de vehículos y vibraciones de grandes máquinas, por mencionar ejemplos de posibles excitaciones de esta naturaleza. Para analizar la respuesta del pilote ante estas cargas se suele requerir la realización de un análisis dinámico del pilote bajo vibraciones transversales.

En el análisis de pilotes bajo carga horizontal el sistema suelo-pilote se suele modelar de tres maneras diferentes (Poulos y Davis, 1980; Fleming et al., 1992). Por un lado se tiene el *modelo de viga sobre fundación elástica*, método propuesto originalmente por Winkler en 1867, en el cual se propone que la deflexión lateral en cualquier punto del pilote está relacionada linealmente con la presión de contacto suelo-pilote en ese punto: $p(z) = K_h(z) v(z)$, donde $v(z)$ es el desplazamiento transversal, p es la presión de contacto y K_h es el módulo de balasto horizontal del suelo. De esta manera, el suelo se representa como una serie de resortes horizontales desconectados unos de otros. Por otro lado, se tienen los *modelos elásticos continuos*, en los que se representa al suelo como un medio semi-infinito, compuesto de un material homogéneo, isótropo y elástico. Otra posibilidad para modelar el sistema es usar el *método de elementos finitos*, y/o el *método de los elementos de contorno*, en los que el suelo y el pilote se discretizan con elementos que modelen adecuadamente el comportamiento de cada uno y de la interfaz entre ambos.

El modelo de viga sobre fundación elástica o modelo de Winkler se ha usado ampliamente en la práctica de ingeniería de fundaciones, tanto para el análisis bajo cargas horizontales estáticas como dinámicas, como lo confirman diferentes autores (Poulos y Davis, 1980; El Naggar y Novak, 1996; Wang et al., 1998; Mostafa y El Naggar, 2002). Además, este procedimiento se recomienda en diversos reportes técnicos y manuales de diseño, como las publicaciones de la Federal Highway Administration (Lam y Martin, 1986; FHWA, 1997; FHWA, 1998), los reportes del U.S. Army Corps of Engineers (USACE, 1991; USACE, 1998; Mosher y Dawkins, 2000), las publicaciones del Transportation Research Board (Brown et al., 2001), y del Naval Facilities Engineering Command (NFEC, 1986).

Algunas de las ventajas del modelo de viga sobre fundación elástica se listan a continuación: 1) ha demostrado ser una metodología versátil y potente; 2) su implementación numérica es más sencilla que otros modelos numéricos (como el de elementos finitos 3D); 3) es una herramienta de análisis rápida, tanto en la etapa de generación del modelo como en el procesamiento (análisis) y la interpretación de resultados; 4) tiene la capacidad de modelar suelos estratificados, con condiciones variables en la profundidad; 5) se puede considerar la no-linealidad del suelo (por ejemplo, a través de curvas p - y); 6) es usado extensivamente tanto en investigación como en la práctica profesional, por lo cual hay una gran base de conocimiento asociado al mismo.

A pesar de que el modelo de viga sobre fundación elástica es simple, su implementación para el caso de cargas dinámicas puede resultar complicada debido a que las expresiones de la rigidez dinámica del suelo son complejas y dependientes de la frecuencia (por lo cual un análisis en el dominio del tiempo no podría realizarse). Un análisis dinámico en frecuencia

tiene la desventaja de que, al estar basado en el principio de superposición implícito en la transformada de Fourier, no puede extenderse a casos no lineales.

El objetivo de este trabajo es presentar expresiones sencillas, independientes de la frecuencia, para representar un estrato de suelo a través de un resorte, un amortiguador y una masa concentrada, en lugar de usar una expresión para su rigidez dinámica. Estos coeficientes facilitan la implementación del método, permiten efectuar análisis en el dominio del tiempo, y hacer estudios paramétricos del efecto de cada elemento componente (resorte, masa y amortiguador) en la respuesta del sistema.

2 LA RIGIDEZ DINAMICA DE NOVAK

Novak (1974) presentó expresiones analíticas aproximadas de la rigidez dinámica de pilotes describiendo la reacción dinámica del suelo por unidad de longitud de pilote con las fórmulas analíticas derivadas por Baranov en 1967. En este trabajo de Novak, el suelo se modela como un conjunto de estratos horizontales independientes (hipótesis que es consistente con el modelo de Winkler), que se extienden al infinito, cada uno de espesor infinitesimal y compuesto por un material homogéneo, isótropo y elástico-lineal. Se considera que los estratos trabajan en un estado plano de deformaciones y experimentan pequeños desplazamientos. El pilote se supone vertical, con sección transversal circular, la cual permanece constante en forma y dimensiones, experimentando un movimiento de cuerpo rígido (hipótesis que es consistente con la teoría de vigas de Bernoulli-Navier). El disco rígido circular sin masa que representa la sección transversal del pilote experimenta vibraciones armónicas horizontales. El modelo no admite separaciones entre el cilindro rígido y el suelo.

Posteriormente, Novak y sus colaboradores (Novak y Abloul-Ella, 1978; Novak et al., 1978) extendieron este análisis a materiales visco-elásticos, con amortiguamiento material independiente de la frecuencia (amortiguamiento histerético). El amortiguamiento material se considera a través del *Módulo de Corte Complejo* $G^* = G + i G' = G (1 + i D)$, donde el parámetro D (conocido como el *factor de pérdida*) se define en función del *ángulo de pérdida* δ como:

$$D = \tan \delta = \frac{G'}{G} \quad (1)$$

donde:

G = parte real del módulo elástico de corte del suelo

G' = parte imaginaria del módulo elástico de corte del suelo

La *rigidez dinámica* horizontal del suelo ku asociada a una unidad de longitud de cilindro es la reacción dinámica del suelo por unidad de longitud de pilote debida a un desplazamiento unitario armónico del disco rígido. De acuerdo a Novak, esta rigidez está dada por la siguiente expresión compleja:

$$ku = G \pi f(a_0, \nu, D) \quad (2)$$

en la cual la función f es:

$$f(a_o, \nu, D) = -a_o^2 \frac{4K_1(b_o^*)K_1(a_o^*) + a_o^*K_1(b_o^*)K_0(a_o^*) + b_o^*K_0(b_o^*)K_1(a_o^*)}{b_o^*K_0(b_o^*)K_1(a_o^*) + a_o^*K_1(b_o^*)K_0(a_o^*) + b_o^*a_o^*K_0(b_o^*)K_0(a_o^*)} \quad (3)$$

donde:

K_n = función modificada de Bessel del segundo tipo, de orden n

$a_o = \frac{\omega r_o}{V_s}$ = frecuencia adimensional

ω = frecuencia de vibración en rad/seg

r_o = radio del cilindro

$V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ = velocidad de propagación de la onda de corte en el suelo

ρ = densidad del suelo

$a_o^* = \frac{a_o}{\sqrt{1+iD}}$ = frecuencia adimensional compleja

$b_o^* = \frac{a_o^*}{\eta}$

$\eta = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}}$

ν = módulo de Poisson del suelo

Con esta rigidez dinámica se puede simplificar la realidad tridimensional del sistema suelo- pilote a un modelo en el plano, con elementos lineales de viga para representar al pilote y con resortes de rigidez dinámica ku para representar al suelo, como se esquematiza en la Figura 1.

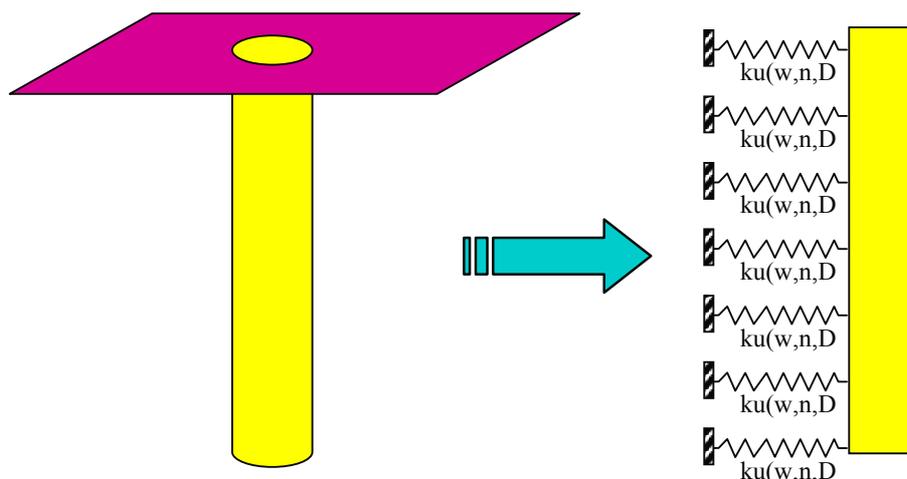


Figura 1: Modelo Suelo-Pilote de Novak

3 APROXIMACION PROPUESTA

La Figura 2 muestra un sistema dinámico de un solo grado de libertad (GDL), compuesto por una masa concentrada M , una rigidez concentrada K y un amortiguador viscoso concentrado de constante de amortiguamiento C .

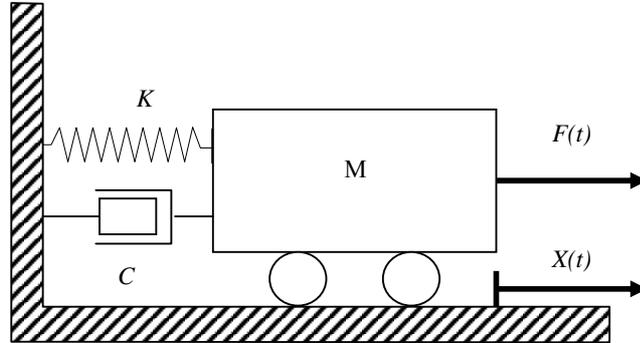


Figura 2: Sistema de un Grado de Libertad (GDL)

La *rigidez dinámica* o *impedancia* de este sistema $Kd(\omega)$ es la magnitud de la fuerza armónica $F(t) = Kd(\omega) e^{i\omega t}$ que se requiere aplicar para obtener un desplazamiento unitario en régimen $X(t) = 1 e^{i\omega t}$. Está dada por:

$$Kd(\omega) = [K - \omega^2 M + i \omega C] \quad (4)$$

donde:

ω = frecuencia de vibración

Considerando la formulación de la rigidez dinámica de un sistema de un GDL (ecuación 4), se propone aproximar la rigidez dinámica presentada por Novak (ecuación 2):

$$ku = G \pi f(a_o, \nu, D) = G \pi \{ \text{Real}[f(a_o, \nu, D)] + i \text{Imag}[f(a_o, \nu, D)] \}$$

mediante las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \text{Real}[f(a_o, \nu, D)] &\approx \alpha_k - \alpha_m a_o^2 \\ \text{Imag}[f(a_o, \nu, D)] &\approx \alpha_c a_o \\ ku &\approx G \pi (\alpha_k - \alpha_m a_o^2 + i \alpha_c a_o) \end{aligned} \quad (5)$$

Los coeficientes α_i son parámetros de ajuste, y los subíndices k , m y c se refieren a la rigidez, masa y amortiguamiento, respectivamente. De esta manera, la rigidez dinámica presentada en la ecuación (2) se aproxima por un sistema de un GDL, con masa m_a , rigidez k_a , y coeficiente de amortiguación c_a , como se representa en la Figura 3 y se expresa a continuación:

$$\begin{aligned}
 ku &\approx k_a - m_a \omega^2 + i c_a \omega \\
 k_a &= G \pi \alpha_k \\
 m_a &= \pi r_o^2 \rho \alpha_m \\
 c_a &= \pi r_o V_s \rho \alpha_c
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

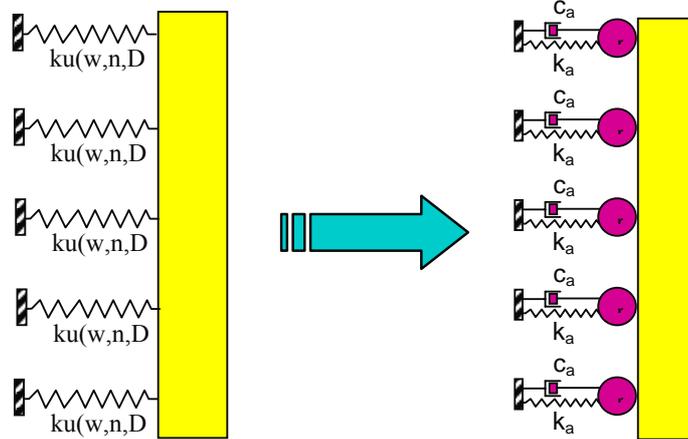


Figura 3: Modelo Suelo-Pilote de Novak y Aproximación Propuesta

Los coeficientes α_i se determinan mediante un análisis de regresión de mínimos cuadrados, de manera que la aproximación obtenida se ajuste adecuadamente a la función original en un rango de a_o de 0 a 3, y para diferentes módulos de Poisson ν del suelo. Un ejemplo de este ajuste para $\nu = 0.5$ se presenta en la Figura 4. Los valores obtenidos para los coeficientes se presentan en la Figura 5 y en la Tabla 1.

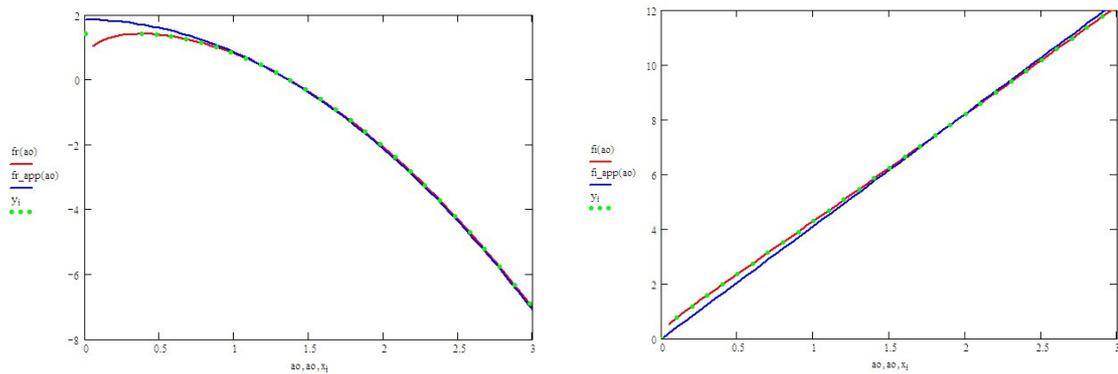


Figura 4: Ejemplo de Ajuste de la Parte Real y la Parte Imaginaria de $f(a_o, \nu, D)$ para $\nu = 0.5$

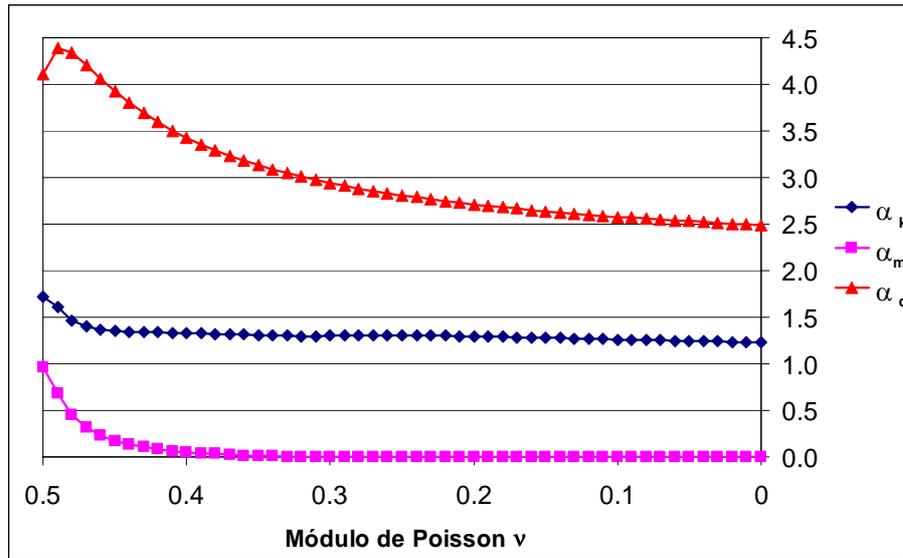


Figura 5: Variación de los Coeficientes α_i con el Módulo de Poisson ν

ν	α_k	α_m	α_c	ν	α_k	α_m	α_c
0.50	1.72137	0.96533	4.10747	0.25	1.30622	-	2.80895
0.49	1.61062	0.68219	4.38920	0.24	1.30435	-	2.78729
0.48	1.46327	0.45715	4.33825	0.23	1.30213	-	2.76687
0.47	1.39946	0.32158	4.20948	0.22	1.29964	-	2.74757
0.46	1.36918	0.23482	4.06638	0.21	1.29692	-	2.72932
0.45	1.35437	0.17664	3.92941	0.20	1.29402	-	2.71203
0.44	1.34592	0.13555	3.80454	0.19	1.29099	-	2.69562
0.43	1.34015	0.10538	3.69268	0.18	1.28784	-	2.68003
0.42	1.33550	0.08258	3.59299	0.17	1.28461	-	2.66519
0.41	1.33130	0.06494	3.50411	0.16	1.28133	-	2.65106
0.40	1.32727	0.05106	3.42465	0.15	1.27800	-	2.63758
0.39	1.32329	0.03998	3.35334	0.14	1.27464	-	2.62470
0.38	1.31933	0.03104	3.28908	0.13	1.27127	-	2.61240
0.37	1.31540	0.02376	3.23091	0.12	1.26791	-	2.60062
0.36	1.31153	0.01780	3.17803	0.11	1.26454	-	2.58934
0.35	1.30775	0.01290	3.12978	0.10	1.26120	-	2.57852
0.34	1.30411	0.00886	3.08557	0.09	1.25787	-	2.56814
0.33	1.30067	0.00553	3.04493	0.08	1.25457	-	2.55817
0.32	1.29749	0.00280	3.00744	0.07	1.25131	-	2.54859
0.31	1.29479	0.00059	2.97274	0.06	1.24807	-	2.53937
0.30	1.30686	-	2.94054	0.05	1.24488	-	2.53049
0.29	1.30834	-	2.91058	0.04	1.24172	-	2.52194
0.28	1.30886	-	2.88262	0.03	1.23861	-	2.51370
0.27	1.30858	-	2.85647	0.02	1.23553	-	2.50574
0.26	1.30766	-	2.83197	0.01	1.23251	-	2.49806
0.25	1.30622	-	2.80895	0.00	1.22953	-	2.49064

Tabla 1: Valor de los Coeficientes α_i en Función del Módulo de Poisson ν

4 VERIFICACIONES

Para verificar el modelo aproximado propuesto se hizo un análisis de la precisión de las regresiones computando el *coeficiente de determinación* R^2 y el *coeficiente de variación* CV . Además se comparó la respuesta dinámica de un sistema suelo-pilote modelando el suelo con la rigidez dinámica de Novak y usando la aproximación propuesta, para un rango amplio de propiedades del suelo y del pilote. Por otra parte, se validó el modelo aproximado comparando los coeficientes de rigidez y amortiguamiento con los obtenidos por otros modelos presentados en la literatura. También se comparó la respuesta predicha para un sistema suelo-pilote con resultados experimentales, y con modelos refinados de elementos finitos tridimensionales. Se presentan a continuación algunos de estos resultados (para más detalles se puede consultar el reporte de Pacheco-Crosetti, 2007):

1) El coeficiente de determinación R^2 para la regresión lineal efectuada a la parte imaginaria de la función $f(a_o, \nu, D)$ (ecuaciones 3 y 5) varió entre 0.993 y 0.999 para los diferentes valores del módulo de Poisson ν . Para la regresión parabólica efectuada a la parte real de la función $f(a_o, \nu, D)$ R^2 varió entre 0.981 y 0.999 para módulos de Poisson comprendidos entre 0.30 y 0.50. Para módulos de Poisson menores de 0.30, la aproximación de la parte real se hizo a través de una función constante y para su análisis se usó el coeficiente de variación CV , el cual varió entre 1.19% y 2.57%. Estos resultados permiten afirmar que la aproximación propuesta resulta un muy buen estimador de los puntos dato seleccionados.

2) Se seleccionó la *flexibilidad dinámica* ó *función de respuesta en frecuencia FRF* de la cabeza del pilote (desplazamiento horizontal en régimen de la cabeza del pilote debido a una carga horizontal unitaria armónica aplicada en la misma) como respuesta dinámica del sistema a comparar. Se modeló un caso de estudio: un pilote circular de hormigón armado, de un pié de radio, longitud de 30 pies (9.1 m), módulo elástico de 3600 ksi (24.8 GPa), y peso específico de 150 pcf (23.6 kN/m³), embebido en un depósito homogéneo de suelo, con módulo elástico de 12 ksi (82.7 MPa), peso específico de 110 pcf (17.3 kN/m³), y módulo de Poisson de 0.3. Usando la rigidez dinámica de Novak y la aproximación propuesta, se hicieron comparaciones variando el módulo de Poisson del suelo (en un rango de 0.2 a 0.5), el módulo elástico del suelo (en un rango de 1.5 a 25.0 ksi; 10.3 a 172.4 MPa), y el radio del pilote (en un rango de 1 a 10 pies; 0.3 a 3 m). La Figura 6 muestra un resultado parcial de esta última comparación. Todos los resultados reflejaron que existía una muy buena concordancia entre ambos modelos, lo que permite afirmar que el modelo aproximado es una buena aproximación del modelo de Novak.

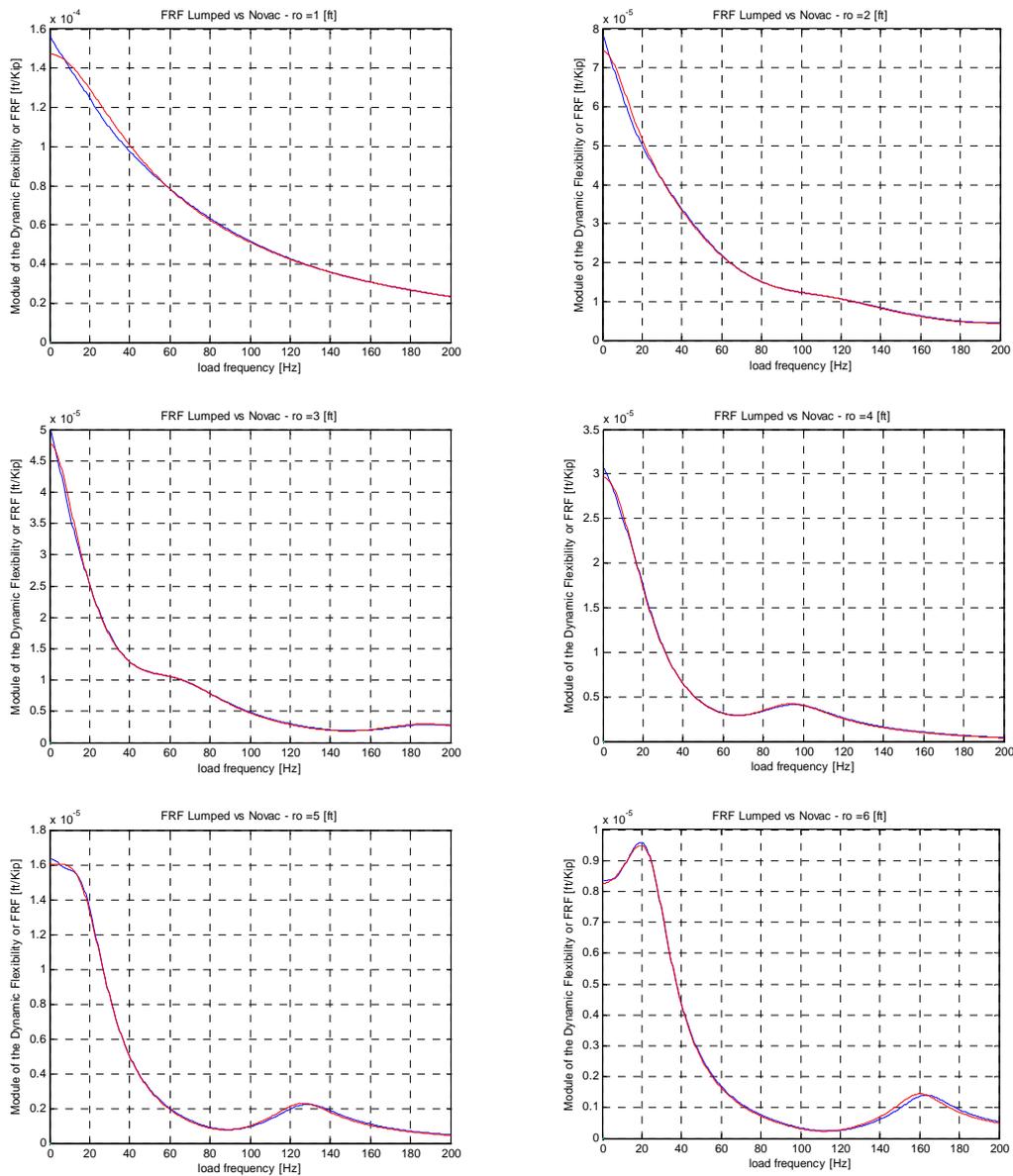


Figura 6: Comparación de la FRF del Modelo Aproximado (Rojo) y Novak (Azul) para Diferentes Radios del Pilote r_o , entre 1 y 6 pies (0.3 a 1.8 m)

3) El coeficiente de amortiguamiento c_a (ecuación 6) se comparó con el propuesto por Berger y colaboradores, según reportado por Wang et al. (1998) y Gazetas y Dobry (1984), adoptando la recomendación de reemplazar el valor de la velocidad de la onda P en tres dimensiones por el valor de la velocidad de la de la onda P en una dimensión. Se computó la razón entre el coeficiente de amortiguamiento obtenido c_a y el propuesto por Berger (modificado), para diferentes módulos de Poisson. Estos resultados se presentan en la Figura 7, en donde C_{rel} es la razón entre los dos coeficientes.

4) El coeficiente de rigidez k_a (ecuación 6) se comparó con el propuesto por Vesić (1961) para vigas sobre fundación elástica, siguiendo las recomendaciones de Klar et al. (2004) para extenderlo al caso de pilotes sometidos a carga horizontal. Se computó la razón entre el

coeficiente de rigidez propuesto k_a y el propuesto por Vesic para diferentes condiciones. Un ejemplo de estos cálculos se presenta en la Figura 8, en donde K_{rel} designa la razón entre los coeficientes de rigidez. En esta figura se consideraron tres módulos elásticos del pilote (100E3, 1000E3 y 10000E3 ksf; 4.79 GPa, 47.9 GPa y 479 MPa) para diferentes módulos elásticos del suelo (entre 200 y 3800 ksf; 9.6 MPa y 181.9 MPa) y un módulo de Poisson del suelo de 0.3.

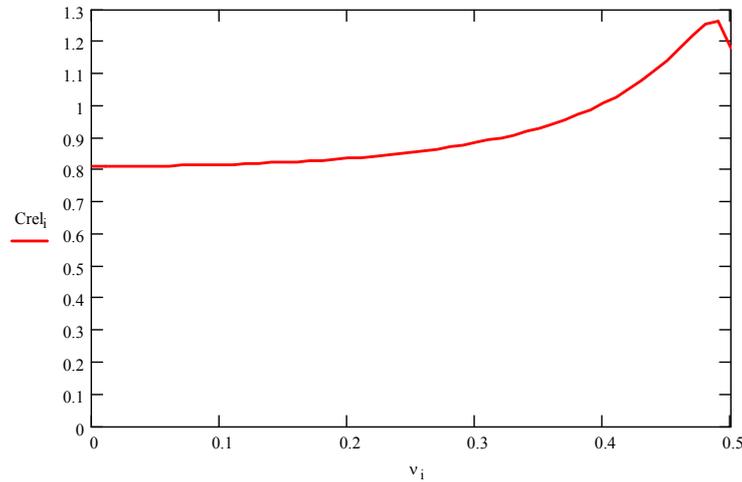


Figura 7: Razón entre el Coeficiente de Amortiguamiento c_a y el de Berger para Diferentes Módulos de Poisson

Estas dos últimas comparaciones muestran que con el modelo aproximado se obtienen valores para los coeficientes de amortiguamiento y rigidez del mismo orden de magnitud que otros modelos disponibles en la literatura, lo cual refuerza la confiabilidad de la aproximación propuesta.

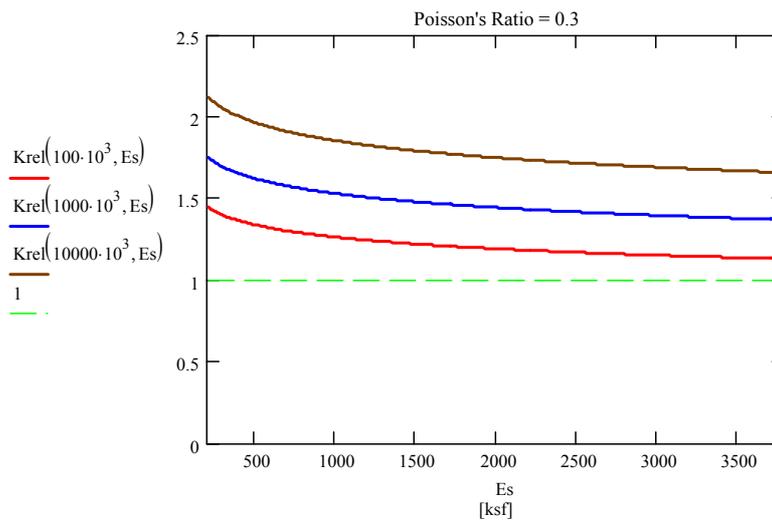


Figura 8: Razón entre el Coeficiente de Rigidez k_a y el de Vesic para Diferentes Módulos Elásticos del Suelo Es, y Tres Valores del Módulo Elástico del Pilote, para un Módulo de Poisson del Suelo de 0.3

5 CONCLUSIONES

En este trabajo se obtuvo un modelo discreto simple para representar la rigidez dinámica a partir de un modelo continuo derivado por Novak. Se propuso una aproximación polinómica del modelo de Novak, equivalente a la de un sistema de un grado de libertad, y se obtuvieron los parámetros de ajuste a través de un análisis de regresión de mínimos cuadrados. Estos coeficientes de ajuste se presentaron gráficamente y tabularmente en función del módulo de Poisson del suelo.

El modelo aproximado fue verificado exhaustivamente y los resultados obtenidos demuestran que es una muy buena aproximación del modelo de Novak. Además se comprobó que los coeficientes de rigidez y de amortiguamiento son del mismo orden de magnitud que los de otros modelos presentados en la literatura. Por último se verificó que el modelo propuesto predice muy bien resultados experimentales (esto último no se incluye en este artículo).

El modelo aproximado propuesto tiene como ventajas: 1) los coeficientes de rigidez k_a , masa m_a y amortiguamiento c_a se obtienen a través de expresiones sencillas, e independientes una de otra; 2) los coeficientes son independientes de la frecuencia, por lo cual se pueden utilizar para realizar análisis en el dominio del tiempo; 3) el modelo es fácil de implementar numéricamente, ó usando cualquier programa de análisis estructural comercial, ya que la mayoría permite asignar masas concentradas, resortes y amortiguadores a los nodos del modelo de elementos finitos; 4) el tiempo computacional requerido para un análisis en las etapas de pre-procesamiento, procesamiento y post-procesamiento es de órdenes de magnitud menor que el requerido por modelos más refinados, como el de elementos finitos tridimensionales; 5) el tener coeficientes de rigidez, amortiguamiento y masa independientes posibilitan efectuar estudios paramétricos del efecto de cada elemento componente (resorte, masa y amortiguador) en la respuesta del sistema; 6) puede extenderse para realizar análisis no lineal, por ejemplo usando *curvas p-y* para variar la rigidez, tomando k_a como la pendiente inicial de las mismas; 7) un modelo simple tiene más factibilidad de ser adoptado por la comunidad profesional, y podría facilitar la enseñanza del análisis dinámico de pilotes a nivel universitario; 8) podría usarse como base para el desarrollo de especificaciones simplificadas para la interacción suelo-pilote, como las *NEHRP* propuestas por el Building Seismic Safety Council (2003) para zapatas aisladas.

REFERENCIAS

- Brown D. A., O'Neil M. W., Hoit M., McVay M., El Naggar M. H., y Chakraborty S., *Static and Dynamic Lateral Loading of Pile Groups*, National Cooperative Highway Research Program, NCHRP Report 461, Transportation Research Board –National Research Council, National Academy Press, Washington, DC, 2001.
- Building Seismic Safety Council, *NEHRP (National Earthquake Hazards Reduction Program) Recommended Provisions for Seismic Regulations for New Buildings and Other Structures (FEMA 450)*, National Institute of the Building Sciences, Washington, DC,

- 2003.
- De Napoli V. E., *Análisis Numérico y Experimental de Pilotes Excavados de Hormigón Armado Cargados Lateralmente*, Tesis, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina, 2006.
- El Naggar M. H. y Novak M., Nonlinear Analysis for Dynamic Lateral Pile Response, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 15, 233-244, 1996.
- Federal Highway Administration, *Design and Construction of Driven Pile Foundations. Workshop Manual – Volume I*, Publication No. FHWA HI 97-013. Washington, DC, FHWA, 1997 (revised 1998).
- Federal Highway Administration, *Geotechnical Earthquake Engineering Reference Manual*, Publication No. FHWA HI 99-012. Washington, DC, FHWA, 1998.
- Fleming W. G. K., Weltman A. J., Randolph M. F., y Elson W. K., *Piling Engineering*, Blackie & Son, Glasgow, and Halsted Press (imprint of John Wiley & Sons), New York, 1992.
- Gazetas G., y Dobry R., Horizontal Response of Piles in Layered Soils, *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol. 110 (1), pp. 20-40, 1984.
- Klar A., Vorster T. E. B., Soga K., y Mair R. J., “Soil - Pipe - Tunnel Interaction: Comparison between Winkler and Elastic Continuum Solutions”, Technical Report CUED/D-SOILS/TR 332, University of Cambridge, UK, 2004.
- Lam I., y Martin G. R., *Seismic Design of Highway Bridge Foundations Design Procedures and Guidelines*, Report FHWA/RD-86/102. Washington, DC, FHWA, 1986.
- Mosher, R. L. and Dawkins, W. P., *Theoretical Manual for Pile Foundations*, U.S. Army Corps of Engineers, Computer-Aided Structural Engineering Project, Publication ERDC/ITL TR-00-5, Washington, DC, 2000.
- Mostafa Y. E. and El Naggar M. H., Dynamic Analysis of Laterally Loaded Pile Groups in Sands and Clay, *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 39, 1358-1383, 2002.
- Naval Facilities Engineering Command (NFEC), *Foundations and Earth Structures*, Publication Design Manual 7.02 (DM 7.02), Alexandria, Virginia, 1986.
- Novak M., Dynamic Stiffness and Damping of Piles, *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 11, 574-598, 1974.
- Novak M., Nogami T., y Aboul-Ella F., Dynamic Soil Reaction for Plane Strain Case, *Journal of Engineering. Mechanics*, ASCE, Vol. 104(4), 953-995, 1978.
- Pacheco-Crosetti G. E., *Dynamic Lateral Response of Single Piles Considering Soil Inertia Contribution*, Ph.D. Dissertation, Civil Engineering and Land Surveying Department, University of Puerto Rico, Mayagüez Campus, 2007.
- Poulos H. G. y Davis E. H. *Pile Foundation Analysis and Design*, John Wiley & Sons, New York, 1980.
- U.S. Army Corps of Engineers (USACE), *Design of Pile Foundations*, Engineering and Design, Publication EM 1110-2-2906, Washington, DC, 1991.
- U.S. Army Corps of Engineers (USACE), *Design of Deep Foundations*, Technical Instructions, Publication TI 818-02, Washington, DC, 1998.
- Vesić A. B., Bending of Beams Resting on Isotropic Elastic Solid, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 87 (2), 35-53, 1961.
- Wang S., Kutter B. L., Chacko M. J., Wilson D. W., Boulanger R. W., y Abghari A., Nonlinear Soil-Pile Structure Interaction, *Earthquake Spectra*, Vol. 14 (2), 377-396, 1998.