

CRITERIOS DE PLASTICIDAD O DE FLUENCIA CRITERIO PROPIO DE UN MATERIAL.

Por Ing. Gérald Pirard^a e Inga. Constanca Pirard^a

^a *Cátedra de Mecánica de las Estructuras, Universidad Nacional de Córdoba, 5000 Córdoba, Argentina, www.efn.uncor.edu*

Palabras clave: Criterios – Plasticidad o fluencia.

Resumen: El valor de un criterio de plasticidad se basa fundamentalmente en su verificación experimental... Las elucubraciones siguientes son totalmente teóricas... y carecen de valor, siempre y cuando se refuten experimentalmente. No obstante constatamos que los resultados teóricos aquí expresados no presentan grandes variaciones, desde un punto de vista práctico, respecto a los resultados ya conocidos. y por lo tanto podrían ser válidos al menos en cuanto a su presentación.

El principio de la plasticidad parece ser un fenómeno que escapa en cierta medida a mediciones certeras, y lo dicho se asienta en los numerosos ensayos que entregan resultados dispares. Según el criterio adoptado, o los ensayos realizados, vemos, por ejemplo, que el límite de elasticidad al corte varía entre un 0,5 y un 0,62 del valor del límite de elasticidad a tracción simple.

Parecería que el límite de elasticidad no se encuentra claramente acotado, que “se escapa” y en cierta forma es lo que proponemos aquí.

Entre el fin del dominio elástico y el principio del dominio plástico, existe una zona de transición no bien definida.

En el presente trabajo se retoma el criterio energético (Beltrami) realizando su análisis y comparación con los criterios existentes. Se introduce a partir de éste último el criterio propio del material.

1 NOMENCLATURA UTILIZADA:

R_e	Tensión de tracción en el límite de elasticidad para materiales dúctiles.
R'_e	Tensión de compresión en el límite de elasticidad (Igual al anterior para el acero) para materiales dúctiles
R''_e	Tensión de corte en el límite de elasticidad. para materiales dúctiles.
R_r	Tensión de rotura a tracción para materiales frágiles.
R'_r	Tensión de rotura a compresión para materiales frágiles.
ϵ_e	Deformación específica en el límite de elasticidad.
μ	Coefficiente de Poisson.
E	Modulo de elasticidad longitudinal.
G	Modulo de elasticidad transversal, que vale $\frac{E}{2(1+\mu)}$
W	Energía interna vale $W_v + W_d$
W_e	Máxima energía elástica.
W_v	Energía por cambio de volumen.
W_d	Energía de distorsión.
$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$	Tensiones principales con $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$
$\sigma_a \sigma_b \sigma_c$	Tensiones principales, sin exigencias relativas.
I_1	Primer invariante del estado tensional, que vale: $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_a + \sigma_b + \sigma_c$
I_2	Segundo invariante del estado tensional, que vale: $\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1$
I_3	Tercer invariante del estado tensional, que vale: $\sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$

2 INTRODUCCIÓN:

El valor de un criterio de plasticidad esta sentado fundamentalmente en su verificación experimental... Las elucubraciones siguientes son totalmente teóricas... y carecen de todo valor, siempre y cuando se refuten experimentalmente. No obstante reconocemos que los resultados teóricos que expresamos aquí, no cambian casi nada a los resultados conocidos de un punto de vista práctico, y por lo tanto pueden tener cierta validez, por lo menos en la presentación.

El principio de la plasticidad parece ser un fenómeno que escapa un poco a mediciones certeras, y lo dicho se asienta en los numerosos ensayos que entregan resultados dispares. Según el criterio adoptado, o los ensayos realizados, vemos, por ejemplo, que el límite de elasticidad al corte varia entre un 0,5 y un 0,62 del valor del límite de elasticidad a tracción simple.

Parecería que el límite de elasticidad no esta bien definido, que “se escapa” y en cierta forma es lo que proponemos aquí.

Sabemos que el límite de elasticidad separa el dominio elástico del dominio plástico. Entre el fin del dominio elástico y el principio del dominio plástico, existe una zona de transición no bien definida durante la cual se producen transformaciones en el material. Y ello es evidente.

No vamos a realizar consideraciones metalúrgicas, ni competir con ilustres investigadores sobre el tema. Tratamos simplemente de unificar la presentación, por lo menos para los

materiales dúctiles. Para los materiales frágiles, el criterio de la máxima tensión principal es suficiente. (Galileo, Leibnitz, Clebsch, Rankine). O sea, para materiales frágiles:

$$\sigma_1 < R_r \quad \text{o bien} \quad |\sigma_3| < R'_r$$

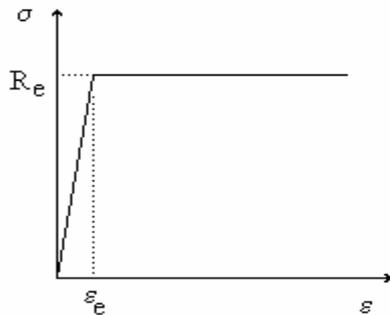


Fig. 1

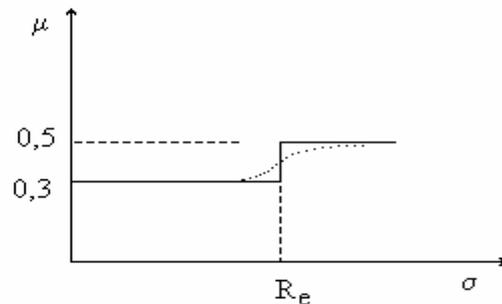


Fig. 2

Una de las transformaciones admitida en los materiales dúctiles es el cambio de coeficiente de Poisson, ya que para el acero se considera que μ vale 0,3 en el período elástico y que en el período plástico μ vale 0,5, ya que las deformaciones plásticas se realizan sin cambio de volumen.

En lo que sigue consideramos un acero elástico, idealmente plástico, con el diagrama conocido de la Fig. 1, y para el coeficiente de Poisson que tendría un diagrama parecido al diagrama de puntos de la Fig. 2, lo reemplazamos por el de trazo continuo, con un salto brusco, cuando se alcanza el límite de elasticidad. Este salto corresponde, en cierta forma, a las transformaciones que comentábamos más arriba. La manera como cambia el coeficiente de Poisson no es importante. De toda manera ya aparece aquí que el final del período elástico, con μ que vale 0,3 no es lo mismo que el principio del período plástico con $\mu = 0,5$.

En los desarrollos siguientes entraremos un poco en conflicto con autores ilustres... lo lamentamos, consolándonos en el hecho que dichos conflictos son mínimos, y no cambian nada en la faz práctica.

3 ENERGÍA INTERNA

Antes de repasar los criterios, vemos la expresión de la energía interna acumulada en una unidad de volumen.

Si el material sigue la ley de Hooke (1678), la energía puede escribirse según las direcciones principales:

$$W = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]$$

Se separa a menudo esta expresión en dos partes, W_v ligada al cambio de volumen y W_d ligada a la energía de distorsión. $W = W_v + W_d$ con:

$$W_v = \frac{(1-2\mu)}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

$$W_d = \frac{(1+\mu)}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1)$$

$$= \frac{(1+\mu)}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

Probablemente resulte más útil expresar dichas expresiones en función de los invariantes del estado tensional, definidos en la nomenclatura del principio:

$$W = \frac{I}{2E} [I_1^2 - 2(1+\mu)I_2] = \frac{I_1^2}{2E} - \frac{I_2}{2G} \quad W_v = \frac{(1-2\mu)}{6E} I_1^2 \quad W_d = \frac{I}{6G} (I_1^2 - 3I_2)$$

4 REPASOS DE LOS CRITERIOS

Para uniformizar el lenguaje utilizado y la evolución que existió en los Criterios, repasamos rápidamente los más importantes.

4.1 CRITERIO DE COULOMB-TRESCA-GUEST:

Basado sobre una hipótesis de Coulomb (1773), desarrollada por el Ing. Francés Tresca (1865) con experiencias sencillas, confirmado en 1903 por experiencias más precisas del Ingles Guest. Este criterio considera que las primeras deformaciones plásticas ocurren por deformaciones consecutivas a las tensiones de corte máximas. Este Criterio se escribe:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq R_e$$

En el caso plano degenerado, muy común, $\sigma_x = \sigma$, $\tau_{xy} = \tau$, y todas las otras tensiones nulas, Fig. 3, obtenemos:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}; \quad \sigma_2 = 0 \quad ; \quad \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

lo que permite escribir el criterio como: $\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq R_e$

Notaremos que si τ vale cero, reencontramos: $\sigma \leq R_e$ pero si $\sigma = 0$, encontramos: $2\tau \leq R_e$

o sea $\tau \leq \frac{R_e}{2}$ o sea, como sabemos que en corte puro el τ máximo vale R'_e , debemos tener:

$$R'_e = \frac{R_e}{2} = 0,5R_e$$

Existen dos críticas habituales a este criterio (que no obstante se usa mucho aún hoy), primero la tensión intermedia σ_2 juega algún papel (pequeño) en la aparición de la plasticidad, y segundo, más grave, los ensayos experimentales muestran que el límite de elasticidad al corte R'_e es superior al $0,5 R_e$ que implica el uso de este criterio.

Por ello se propuso el criterio siguiente.

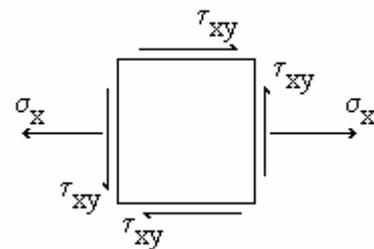


Fig. 3

4.2 CRITERIO DE MAXWELL-HUBER-HENCKY-VON MISES:

Parecería que el primero en sugerir el criterio siguiente fue Maxwell en una carta a Lord Kelvin, este criterio fue propuesto después por Huber en 1904, Von Mises en 1913 y su interpretación energética por Hencky en 1924. El criterio propone una expresión simétrica en las tres tensiones principales:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq R_e$$

Este criterio puede tener dos interpretaciones:

Primero, si comparamos esta expresión con la energía de distorsión, vemos que este criterio puede escribirse:

$$\sqrt{\frac{3E.W_d}{1+\mu}} \leq R_e$$

o sea que este criterio puede interpretarse que la plasticidad ocurre cuando la energía de distorsión alcanza un cierto valor.

Otros prefieren una explicación independiente de la ley de comportamiento del material (E , μ), o sea una interpretación puramente tensional. Si se calcula la tensión de corte actuando sobre un plano igualmente inclinado respecto a las tres direcciones principales, llamado el corte octaedral, τ_{oc} , obtenemos:

$$\tau_{oc} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

por lo tanto el criterio puede escribirse: $\tau_{oc} \leq \frac{\sqrt{2}}{3} R_e$

lo que puede interpretarse que la plasticidad ocurre cuando el corte octaedral alcanza un cierto valor.

Más allá del origen y/o interpretaciones físicas dadas a este criterio, se sabe que la validez de un criterio esta en su respaldo experimental. Para ello nos ponemos en el mismo caso plano degenerado analizado para el criterio de Tresca, y obtenemos:

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq R_e$$

Ello implica que si τ vale cero, reencontramos: $\sigma \leq R_e$

pero si $\sigma = 0$, encontramos: $\sqrt{3}\tau \leq R_e$ o sea

$$\tau \leq \frac{R_e}{\sqrt{3}}$$

y como sabemos que en corte puro el τ máximo vale R''_e , debemos tener:

$$R''_e = \frac{R_e}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} R_e = 0,577 R_e$$

Este valor es mucho más cerca de los valores experimentales.

La comparación de estos dos criterios es bien conocida, y en el plano se representa, Fig. 4, por un hexágono para Tresca y una elipse envolvente para Von Mises. (σ_a y σ_b son las tensiones principales no nulas.) Ecuación de la elipse: $\sigma_a^2 - \sigma_a \sigma_b + \sigma_b^2 = R_e^2$

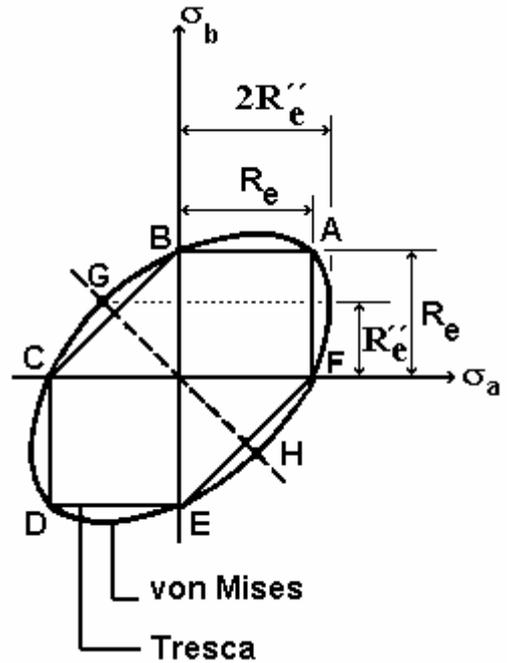


Fig. 4

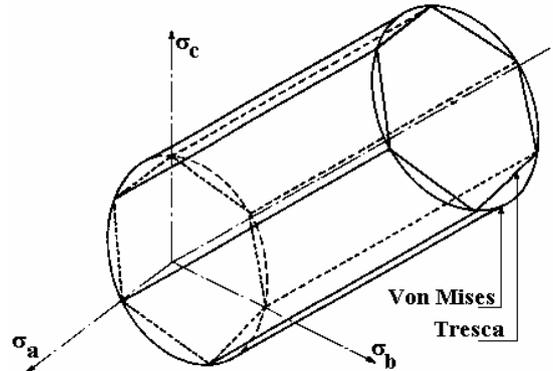


Fig. 5

Los dos criterios coinciden en seis puntos y su mayor diferencia ocurre en corte puro y vale 15,4%. (Línea GH de la Fig. 4)

En una representación espacial, en los ejes principal de tensiones, ($\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$) los dos criterios se representan por prismas, teniendo como eje central el eje “hidrostático”, hexagonal para Tresca, y circular para Von Mises, Fig. 5. La intersección de dicho prisma con el plano a-b por ejemplo da la Fig. 4. Notamos en esta representación que esta superficie que separa el dominio elástico del plástico, no se cierra sobre el eje “hidrostático”. En estado hidrostático, no existe plasticidad. Por otro lado, y de un punto de vista práctico, notamos que las dos superficies son bastante cercanas una de la otra.

4.3 CONSIDERACIONES SOBRE DICHS CRITERIOS:

Notaremos, y es fundamental, que el límite de elasticidad en tracción, R_e , el límite de elasticidad en corte, R''_e , y el criterio usado **no son nociones independientes** entre sí. Si R''_e vale $0.5R_e$, podemos utilizar Tresca, si R''_e vale $0,577R_e$, podemos usar Von Mises. Ahora, si R''_e , no vale ni uno, ni el otro, ¿qué criterio usar?

En la práctica de los libros de Diseño de Máquinas, se suele dar $R''_e = 0,6R_e$. Ello parece indicar que si bien el criterio de Von Mises mejoró con respecto al de Tresca, aún no corresponde del todo a la realidad experimental.

Para subsanar este problema, en el caso plano degenerado utilizado, vimos que el coeficiente del corte es el que cambio de 4 a 3. Se suele entonces introducir un criterio propio del material utilizado, adecuado al caso en el cual se dan los dos límites elásticos.

4.4 CRITERIO PROPIO DEL MATERIAL UTILIZADO:

Se propone el criterio siguiente, para el caso plano degenerado:
$$\sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{R_e}{R''_e}\right)^2 \tau^2} \leq R_e$$

vemos los casos particulares: si τ vale cero, reencontramos: $\sigma \leq R_e$

pero si $\sigma = 0$, encontramos:

$$\frac{R_e}{R''_e} \tau \leq R_e \quad \text{o sea} \quad \tau \leq R''_e$$

Notaremos que si utilizamos $R''_e = 0,5R_e$ reencontramos Tresca, y

si utilizamos $R''_e = 0,577R_e = \frac{R_e}{\sqrt{3}}$,

reencontramos Von Mises.

En la práctica de uso del criterio propio, se impone cada vez más la presentación siguiente:

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma}{R_e}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{R''_e}\right)^2} \leq 1$$

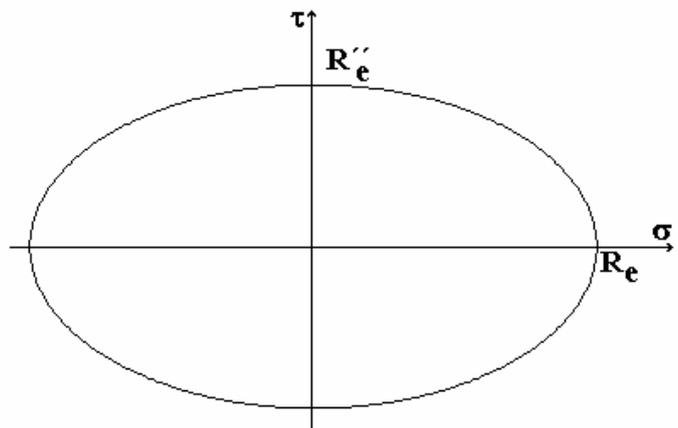


Fig. 6

Es interesante representar esta expresión en un gráfico (σ, τ) y obtenemos una elipse. (Fig.6)

Se mejora la expresión anterior, incorporando el coeficiente de seguridad (s) con respecto a la plasticidad (o al fin de la elasticidad):

$\sqrt{\left(\frac{\sigma}{R_e}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{R''_e}\right)^2} = \frac{I}{s}$ Esta última presentación es la recomendada, de uso práctico en los libros de Diseños de Maquinas.

La pregunta, origen de este trabajo, es:

¿Como será la forma del criterio propio en el estado triple de tensión?

Por supuesto varios autores ya trabajaron sobre el tema. Muchos siguen una misma línea de pensamiento: conseguir una expresión analítica de las tres tensiones principales que engloben R_e en tracción pura, R'_e en compresión y R''_e en corte puro, o sea una función de las tres tensiones principales y de R_e , R'_e y R''_e . Otros no incluyen R''_e y por lo tanto la tensión admisible al corte se obtiene como función de R_e y R'_e .

Parece bastante lógico considerar que el fin del período elástico y el principio del período plástico estén vinculados a la energía almacenada en el cuerpo. Beltrami ya propuso en 1885, un criterio basado en la energía almacenada. Este criterio fue abandonado por trabajos presentados por Bridgman. Antes de discutir la validez o invalidez de este criterio, lo presentamos.

5 CRITERIO ENERGÉTICO y CRITERIO PROPIO GENERAL

Ya hemos presentado las energías anteriormente, la retomamos aquí en función de los invariantes:

$$W = \frac{I_1^2}{2E} - \frac{I_2}{2G} = W_v + W_d, \quad W_v = \frac{(1-2\mu)}{6E} I_1^2, \quad W_d = \frac{I}{6G} (I_1^2 - 3I_2)$$

La máxima energía que puede almacenarse en estado elástico se determina habitualmente

en estado uniaxial, y da: $W_e = \frac{R_e^2}{2E}$ pero también podemos establecer dicho límite en corte

puro, y da: $W_e = \frac{R''_e^2}{2E}$

Limitando así la energía total tendremos como criterio la expresión de Beltrami:

$$\frac{I_1^2}{2E} - \frac{I_2}{2G} \leq \frac{R_e^2}{2E} = \frac{R''_e^2}{2G}$$

Vamos estudiar detenidamente dicha expresión en sus tres miembros.

Primero podemos dividir el primer miembro por el segundo o el tercero que le es igual, y obtenemos:

$$\frac{I_1^2}{R_e^2} - \frac{I_2}{R''_e^2} \leq 1$$

y la forma más simple y definitiva del criterio sería tomando la raíz cuadrada y haciendo aparecer el coeficiente de seguridad:

$$\sqrt{\frac{I_1^2}{R_e^2} - \frac{I_2}{R''_e^2}} \leq \frac{I}{s}$$

Si desarrollamos los invariantes sería:

Con tensiones principales:

$$\sqrt{\frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{R_e^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1}{R''_e^2}} \leq \frac{I}{s}$$

Con tensiones cartesianas:

$$\sqrt{\frac{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2}{R_e^2} - \frac{\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2}{R''_e{}^2}} \leq \frac{1}{s}$$

Notaremos que reencontramos fácilmente como casos particulares los criterios de Tresca (si $\sigma_2 = 0$, y $R''_e = 0,5R_e$) y de Von Mises (si $\sigma_2 = 0$, y $R''_e = 0,577R_e$).

Y, en estado plano degenerado, si $\sigma_x = \sigma$, $\sigma_y = \sigma_z = 0$, $\tau_{xy} = \tau$, $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, obtenemos como antes:

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma}{R_e}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{R''_e}\right)^2} = \frac{1}{s}$$

Probablemente el estudio de los últimos términos de la relación dada necesiten más análisis.

$$\frac{R_e^2}{2E} = \frac{R''_e{}^2}{2G}$$

en seguida despejamos:

$$R''_e = R_e \sqrt{\frac{G}{E}} = R_e \sqrt{\frac{1}{2(1+\mu)}}$$

Notamos que durante el período elástico y hasta el fin del mismo (Escalón 0,3 de la Fig. 2) μ vale 0,3 y obtenemos: $R''_e = 0,62R_e$, bastante cerca de lo que suele usarse en proyecto de máquinas.

Alcanzado este punto, el coeficiente de Poisson evoluciona solo hacia 0,5. Cuando μ alcanza 0,3888, R''_e baja a $0,6R_e$, y por fin cuando μ alcanza 0,5, R''_e alcanza el valor dado por Von Mises $0,577R_e$, que corresponde al principio de la plasticidad. Vemos así que diferenciamos **el fin de la elasticidad**, final del piso 0,3 en la Fig. 2, del **principio de la plasticidad**, principio del escalón 0,5 en la Fig.2. Notamos de paso que el valor proporcionado por Tresca, corresponde a $\mu = 1$, imposible teóricamente, y demasiado del lado de la seguridad del punto de vista práctico.

Notamos que el fin del período elástico aparece como una superficie desplazable, como un visillo frente a una ventana, que, cuando lo alcanzamos con el dedo, se escapa hasta otra posición límite, por ejemplo cuando toca el vidrio, que correspondería al principio del período de plasticidad. El paso de una a otra corresponde al cambio del coeficiente de Poisson, asociado a cambios de estructuras moleculares internas que no abordamos aquí.

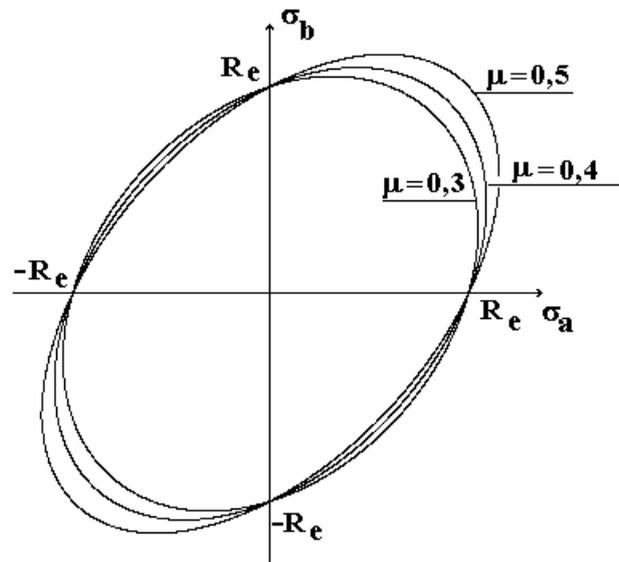


Fig. 7

Notamos también que cuando alcanzamos coeficiente de Poisson, el criterio propio coincide con el de Von Mises. Ello es lógico ya que el criterio de Von Mises se basa en la energía de distorsión (W_d) y que esta coincide con la energía total (W) si la energía de cambio

de volumen (W_v) vale cero. Eso ocurre al principio de la plasticidad.

La relación G/E que vale $\frac{1}{2,6}$ en el período elástico, vale $\frac{0}{0}$, indeterminado en plasticidad (según la Fig. 1), pero tiende a $\frac{1}{3}$.

En la representación plana de la Fig. 4, evidentemente que el principio de la plasticidad que corresponde a $\mu = 0,5$, tenemos una elipse coincidente con la de Von Mises, el fin de la elasticidad, con $\mu = 0,3$ es otro elipse un poco diferente. Ver Fig. 7. En la evolución damos también la elipse correspondiente a $\mu = 0,4$.

En la diagonal del primer cuadrante encontramos las elipses en las abscisas sucesivas $0,845R_e$, $0,913R_e$ y R_e , cuando μ pasa de $0,3$ a $0,4$ y $0,5$.

Mientras que en la diagonal del cuarto cuadrante se encuentran las elipses en las abscisas: $0,62R_e$, $0,598R_e$ y $0,577R_e$, cuando μ evoluciona como antes, dando así la evolución del límite de elasticidad al corte. Notaremos que en el primer cuadrante nos alejamos del centro, en el cuarto cuadrante nos acercamos. Mientras, en la Fig. 2, pasamos del escalón $0,3$ al escalón $0,5$, en la Fig. 7 pasamos del elipse $0,3$ (fin de la elasticidad) al elipse $0,5$ (principio de la plasticidad).

La dispersión de los resultados experimentales puede probablemente en gran parte encontrar explicación en este salto que se produce entre el fin del período elástico y el principio del período plástico. (Fig. 8)

La transformación de la Fig. 5 es aún más interesante. Se mantiene como una figura de revolución circular alrededor del eje hidrostático, o sea que los cortes perpendicular a dicho eje son siempre círculos. Para facilitar el entendimiento de la figura, proyectamos todo en un plano a 45° de σ_a y de σ_b y que pasa por el eje de σ_c , dicho plano contiene el eje hidrostático y el cilindro de la Fig. 5, aparece como dos paralelas a dicho eje.

En el criterio energético propio, cuando alcanzamos el límite de elasticidad, en vez de un cilindro, tenemos un elipsoide de revolución, y su proyección en el plano definido recién es una elipse con el eje mayor según el eje hidrostático. Los radios de la sección circular son entonces variables con la posición de la sección. Ver Fig. 9.

En el límite de elasticidad, $\mu = 0,3$ y el elipsoide corta el eje hidrostático en una distancia de $1,581R_e$ del centro ($\sigma_a = \sigma_b = \sigma_c = 0,913R_e$) y el semi eje menor vale $0,877R_e$. Cuando $\mu = 0,4$, dichos valores alcanzan $2,2326R_e$ ($\sigma_a = \sigma_b = \sigma_c = 1,29R_e$) y $0,845R_e$, y cuando $\mu = 0,5$, tenemos dos paralelas en una distancia $0,816R_e$ del centro.

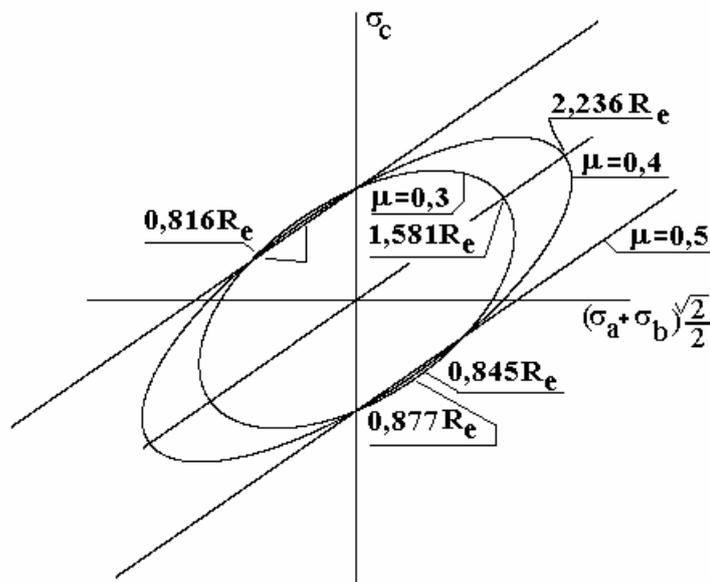
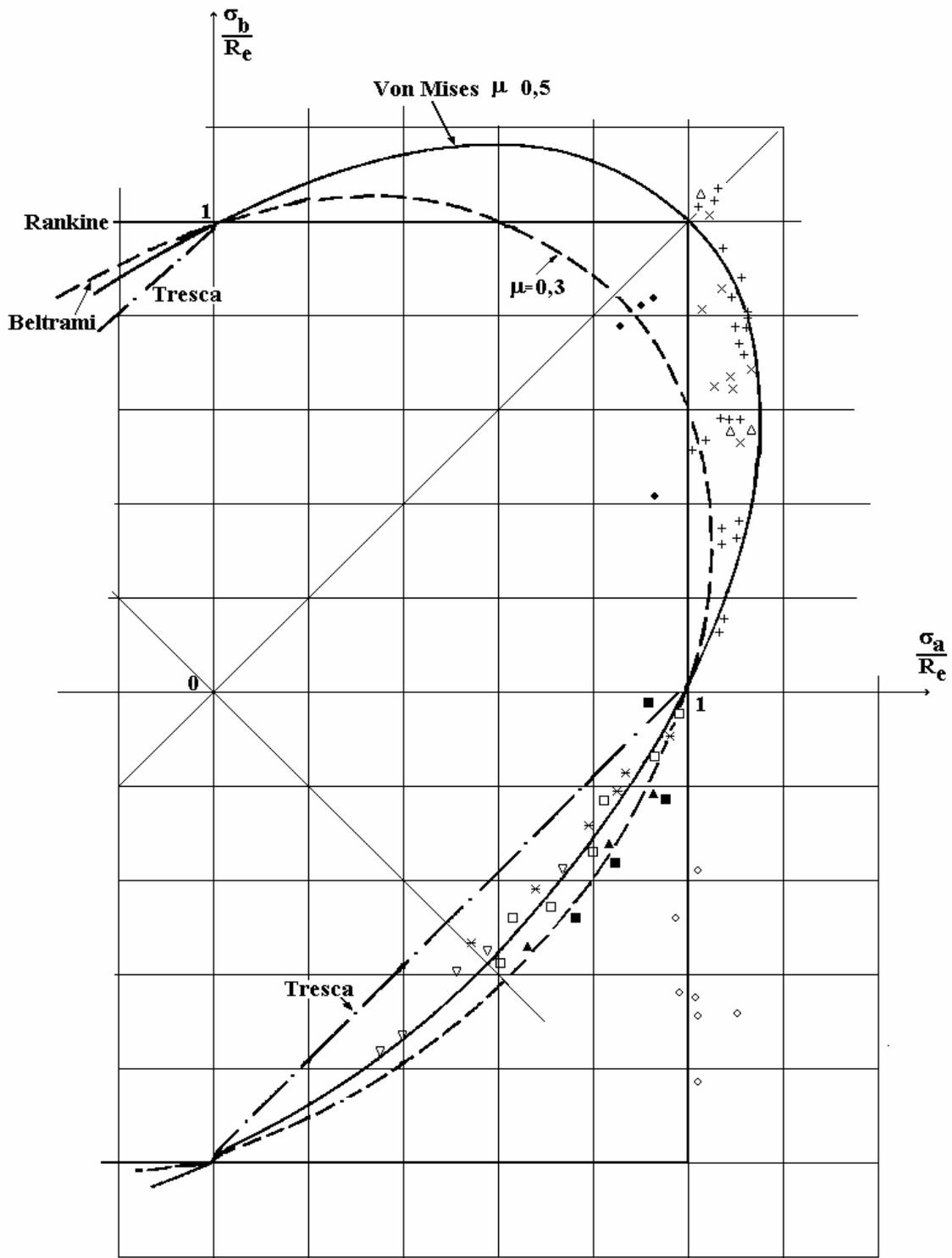


Fig. 9



Taylor y Quinney		Lode		Ross y Eichinger		Cook y Robertson	
Aluminio	□	Acero	+	Fundición	◆	Fundición	◇
Acero al carbono	■	Cobre	×	Acero	▽		
Acero dúctil	▲	Niquel	△				
Cobre	×						

Fig 8

Según el eje hidrostático no se alcanza el principio de la plasticidad... pero si el final de la elasticidad...

Debemos tener bien claro que entre el fin del período elástico y el principio del período plástico, **las tensiones varían**, pero las deformaciones **quedan fijas**. (La ley de comportamiento del material, Hooke en nuestro caso, ya no tiene validez.) No hay gasto de energía en este traspaso de un límite al otro. La energía elástica ya fue agotada, la energía plástica posible aún no ha llegado a utilizarse. El reajuste interno del material (paso de μ de 0,3 a 0,5) produce variación de las tensiones pero no de las deformaciones. Damos un ejemplo más adelante.

Una vez alcanzado el principio de la plasticidad, la ley de comportamiento del material ha cambiado. El cálculo plástico no entra en el alcance de estas notas, pero se basa en el equilibrio, la compatibilidad de las deformaciones y el hecho que no hay más cambio de volumen ($\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$). Ejemplo de ello se ve habitualmente en flexión plástica. En el caso de deformaciones libres y de un material que sigue la ley de la Fig. 1, tenemos el colapso.

5.1 CRITICAS AL CRITERIO ENERGÉTICO

La crítica habitual a este criterio se sintetiza en el libro de Fliess, Estabilidad, segundo curso, Kapelusz, Pág. 515. Retranscribimos lo encontrado:

“Los ensayos de Bridgman han demostrado la inexactitud de esta teoría: en efecto, en ella se supone que el comienzo de la fluencia es función de la energía total de deformación. Los ensayos efectuados por el citado autor, han permitido alcanzar presiones triaxiales hidrostáticas muy elevadas, con energías de deformación total mucho mayores que la correspondiente a fluencia en la sollicitación simple, sin que se observaran indicios del comienzo del escurrimiento plástico. Y la naturaleza nos da un ejemplo de la inexactitud de la teoría, pues si consideramos guijarros sumergidos en las fosas marinas más profundas, prácticamente puede admitirse que las tres tensiones principales son iguales y de elevado valor y sin embargo no sufren efectos algunos.”

En estado hidrostático, una vez alcanzado el límite de elasticidad, no hay más energía almacenable posible, ni elástica, ni plástica; o sea que, aún con presiones muy grandes, no se almacena más energía, no hay más deformaciones. No hay escurrimiento del material ya que no hay plasticidad. Los guijarros del fondo del mar, no están plastificados, pero probablemente que cuando los sacamos a la superficie los encontremos reducidos a polvo, se desagregarán. Lo mismo pasará en tracción, no hay plasticidad, se separan las moléculas sin plastificación.

Una vez alcanzado el límite de elasticidad ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0,913R_e$) las deformaciones alcanzaron su valor límite, no varían más, aún si las tensiones aumentan indefinidamente. El material absorbió W_e , y no va absorber nada más, ni elástica ni plásticamente. El gráfico σ - ε , según cualquier dirección principal en estado hidrostático, tendrá la forma indicada en la Fig. 10, donde no hay plasticidad. (Algunos autores consideran que en tracción hidrostática es conveniente limitar las tensiones al doble del límite de elasticidad. $\sigma_1 < 2R_e$, probablemente sea aconsejable limitarlas también en compresión...).

Queda bastante curioso que el ejemplo dado para refutar el criterio energético, sea de los guijarros... materiales frágiles, que no tienen porque responder a criterios de plasticidad ya que para ellos es otro criterio el que rige, como se ha visto al principio.

No obstante, se sabe que se considera que los materiales dúctiles, en estado "hidrostático", se comportan como los frágiles... o considerando a la inversa, que los frágiles se comportan como los dúctiles en este estado, es decir como lo indica la Fig. 10 aproximadamente.

5.2 EJEMPLOS

Consideremos, una barra sometida a una carga de tracción que produce una tensión constante, por ejemplo $\sigma_1 = 0,5R_e$, Fig. 11a. Si las otras dos tensiones son nulas, la ley de Hooke tridimensional nos da:

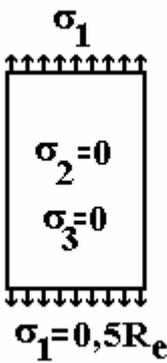


Fig. 11a

$$\varepsilon_1 = 0,5 \frac{R_e}{E}$$

$$\varepsilon_2 = -\mu \varepsilon_1 = -0,15 \frac{R_e}{E}$$

$$\varepsilon_3 = -\mu \varepsilon_1 = -0,15 \frac{R_e}{E}$$

donde hemos considerado $\mu = 0,3$.

Esta situación se encuentra representada por los segmentos **oa** de los gráficos adimensionales relativos a las direcciones principales, $\sigma/R_e - \varepsilon/\varepsilon_e$, (donde $\varepsilon_e = R_e/E$) (Fig. 12). La energía acumulada en esta etapa es:

$$W_{oa} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_1^2}{E} = 0,25 \frac{R_e^2}{2E}$$

Si aplicamos ahora una compresión p en la otra dirección, Fig 11b, se agregarán las deformaciones siguientes:

$$\varepsilon_1 = \mu \frac{p}{E} = 0,3 \frac{p}{E}, \quad \varepsilon_2 = \mu \frac{p}{E} = 0,3 \frac{p}{E}, \quad \varepsilon_3 = -\frac{p}{E}$$

Se sigue el trazo **ab** en los gráficos de la fig. 12, acumulándose la energía interna:

$$W_{ab} = \frac{\sigma_1 \mu p}{E} + \frac{p^2}{2E} = \frac{\mu p R_e}{2E} + \frac{p^2}{2E} \quad \text{que sumada a la}$$

anterior W_{oa} da la energía total acumulada:

$$W_{tot} = 0,25 \frac{R_e^2}{2E} + \mu \frac{p R_e}{2E} + \frac{p^2}{2E}$$

Sumando las deformaciones de las dos etapas obtenemos:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} R_e$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -p$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (0,5 R_e + 0,3 p)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} (-0,15 R_e + 0,3 p)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} (-0,15 R_e - p)$$

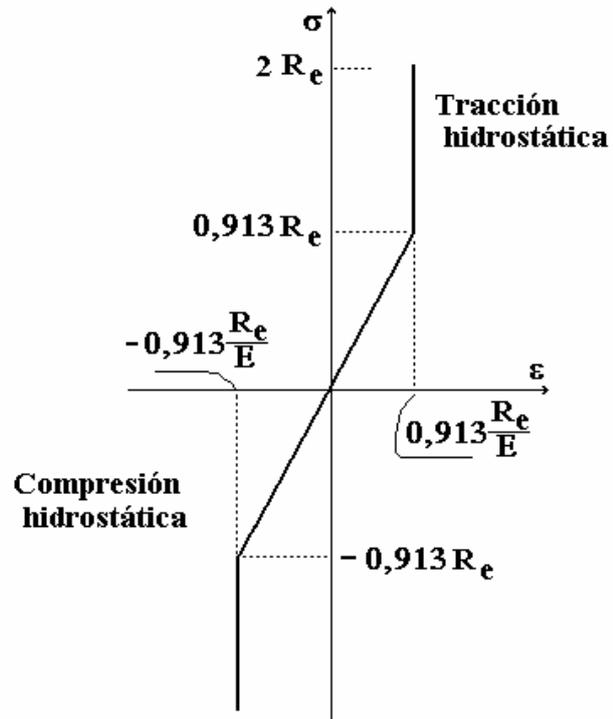


Fig. 10

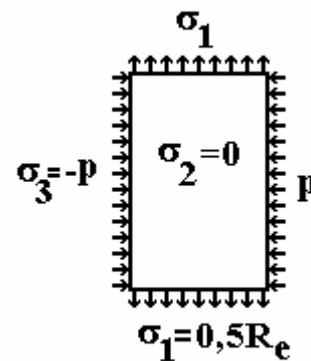


Fig. 11b

¿Cabe preguntarnos para qué valor de la presión p alcanzamos el fin de la elasticidad? Para ello igualamos la energía interna W con la máxima energía elástica W_e .

$$0,25 \frac{R_e^2}{2E} + \mu \frac{pR_e}{2E} + \frac{p^2}{2E} = \frac{R_e^2}{2E} \quad \text{o sea: } p^2 + \mu R_e p - 0,75 R_e^2 = 0$$

cuya solución en el final del período elástico con $\mu = 0,3$ es: $p = 0,7289R_e$ y entonces μp vale $0,2186R_e$. Llegamos así al punto b de los gráficos de la Fig. 12.

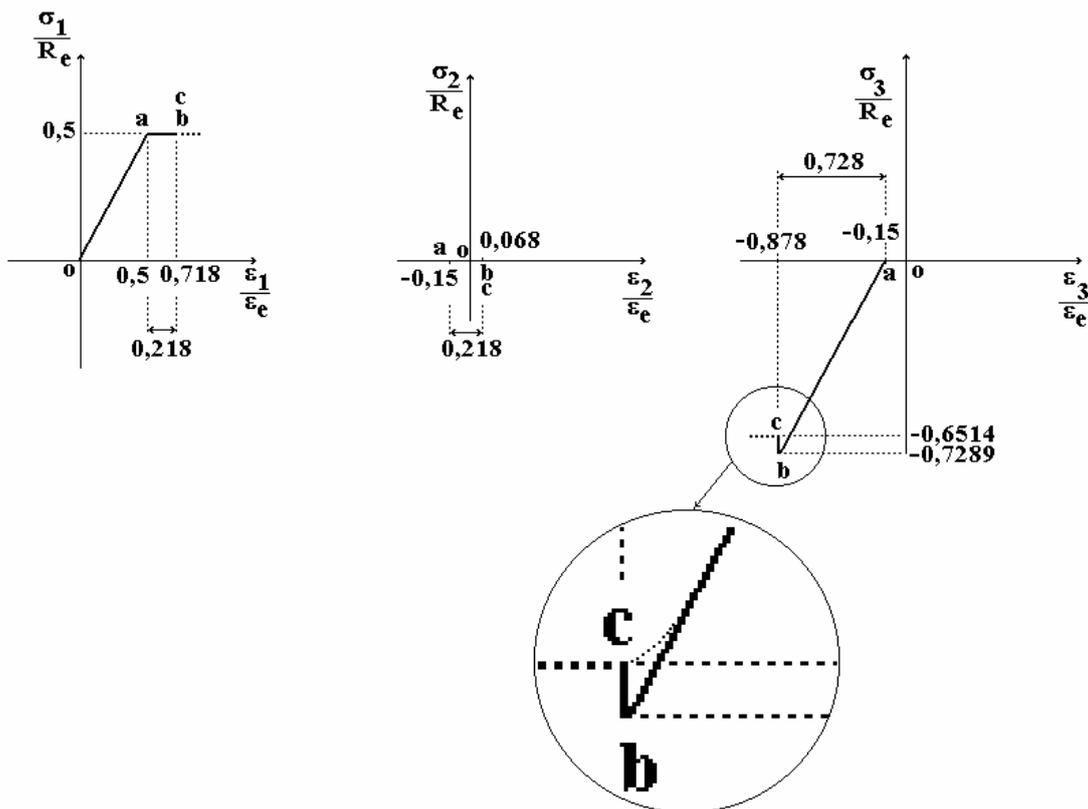


Fig. 12

El paso del final de la elasticidad al principio de la plasticidad, se obtiene realizando los cálculos con $\mu = 0,5$ y obtenemos entonces: $p = 0,6514R_e$. Por lo tanto los gráficos se modifican con los tramos **bc**: para σ_3 , con ϵ_3 constante, p disminuye en valor absoluto, (trazo **bc** del gráfico) para σ_1 , con la tensión constante ya que no puede variar, no hay cambio (**b** y **c** coinciden); y para σ_2 que es nulo, sin cambio (**b** y **c** también coinciden). O sea que la presión transversal p disminuye sola cuando pasamos del fin del período elástico al principio del período plástico. Una vez alcanzados los puntos **c**, si no hay restricción en las deformaciones, el sistema colapsa con tensiones constantes.

Vemos estos resultados en los gráficos de la Fig. 12, donde se detalla la zona relativa a la disminución de presión. Notaremos que, si la variación del coeficiente de Poisson empieza un poco antes del límite de elasticidad, como sugerido en línea de puntos en la Fig. 2, el diagrama detallado en la Fig. 12 muestra una posible evolución del σ_3 .

Notamos así que la diferencia entre el fin de la elasticidad y el principio de la plasticidad (puntos **b** y **c**) no es muy significativa en este ejemplo. Por el contrario en una situación “hidrostática”, sería muy relevante.

Probablemente la Fig. 2, realizada en función de σ , y con el salto en R_e , debería realizarse en un estado tridimensional de tensiones en función de W , y tener el salto en W_e . Notamos de hecho que en los gráficos anteriores, ninguna tensión alcanzó el valor R_e , en los puntos **c** donde comienza la plasticidad.

En el caso anterior, supusimos σ_1 constante, como le sería el caso de una carga colgada, cuyo valor no varía. Mientras que p es producido por un pistón que permite una variación de presión.

Si el elemento en estudio esta inmerso en una pieza en estado plano de tensiones, todas las tensiones varían proporcionalmente a las cargas y entonces proporcionalmente entre sí.

Consideremos de nuevo un elemento como el de la Fig. 11, con σ_1 positivo, $\sigma_2 = 0$ y σ_3 negativo, por ejemplo $\sigma_3 = -1,5\sigma_1$. La energía acumulada en este elemento es:

$$W = \frac{I_1^2}{2E} - \frac{I_2}{2G} = \frac{(\sigma_1 - 1,5\sigma_1)^2}{2E} - 2(1 + \mu) \frac{(-1,5\sigma_1^2)}{2E} = 0,25 \frac{\sigma_1^2}{2E} + 3 \frac{1 + \mu}{2E} \sigma_1^2 = (3,25 + 3\mu) \frac{\sigma_1^2}{2E}$$

El fin de la elasticidad ocurre cuando alcanzamos W_e o sea:

$$W = (3,25 + 3\mu) \frac{\sigma_1^2}{2E} = W_e = \frac{R_e^2}{2E}$$

lo que da:
$$\sigma_1 = \frac{R_e}{\sqrt{3,25 + 3\mu}}$$

Para el fin del período elástico, $\mu = 0,3$, obtenemos $\sigma_1 = 0,4909R_e$ y $\sigma_3 = -0,7363R_e$, y para el principio del período plástico, obtenemos $\sigma_1 = 0,4588R_e$ y $\sigma_3 = -0,6882R_e$. En este caso, tanto σ_1 como σ_3 varían entre el final de la elasticidad y el principio del período plástico. No así σ_2 que permanece nulo. Los gráficos de este caso pueden verse en la Fig. 13, donde el punto **a** indica el final de la elasticidad, el puntos **b** el principio de la plasticidad.

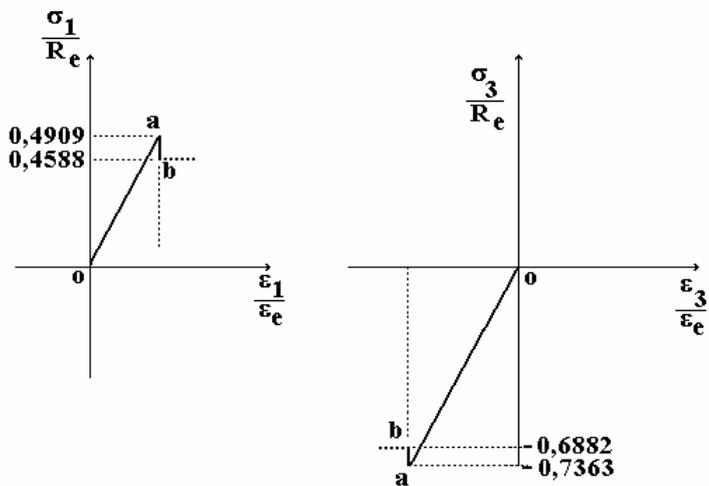


Fig. 13

Notaremos que después de llegar a la plasticidad, el comportamiento del elemento está condicionado por la compatibilidad con los elementos vecinos

5.3 LÍMITES LÓGICOS:

Debemos notar que aún en el caso hidrostático, la variación de las tensiones con el coeficiente de Poisson es muy lenta al principio. Si suponemos un estado tensional $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$, utilizando este criterio, obtenemos el valor de p en función del coeficiente de Poisson, el fin de la elasticidad para $\mu = 0,3$ y el principio de la plasticidad para $\mu = 0,5$, el cual no se alcanza en este caso. En la Fig. 14 vemos claramente la lenta variación de p para valores pequeños de μ , recién cuando el coeficiente de Poisson esta cerca de $0,5$, p tiende al infinito. Para $\mu = 0,3$ el valor de p es $0,913R_e$ y para $\mu = 0,45$ p alcanza un valor de $1,826 R_e$. Para obtener $p = 2R_e$ necesitamos que μ alcance $0,458$

A partir de este análisis del diagrama, reafirmamos que no es conveniente superar tensiones máximas doble del límite de elasticidad R_e .

6 DESARROLLOS SUBSIGUIENTES:

A partir de lo ya planteado, se comparará a continuación el criterio propio con los otros criterios existentes; quedará pendiente para posteriores trabajos el análisis de varias interpretaciones geométricas. El primero de los desarrollos siguiente es relativo al límite de elasticidad en compresión R'_e .

6.1 COMPRESIÓN

Algunos materiales tienen un límite de elasticidad diferente en tracción (R_e) que en compresión (R'_e). Por ello, probablemente se debe adecuar el criterio en la forma siguiente, sujeta a verificación experimental:

$$\text{Para } I_1 > 0 \quad \sqrt{\frac{I_1^2}{R_e^2} - \frac{I_2}{R''_e}} \leq \frac{I}{s} \quad \text{Para } I_1 < 0 \quad \sqrt{\frac{I_1^2}{R'_e{}^2} - \frac{I_2}{R''_e{}^2}} \leq \frac{I}{s}$$

Resulta evidente que para ser coherentes con el planteo energético realizado inicialmente, debemos admitir que la energía elástica almacenable en tracción es diferente de la almacenable en compresión... y por lo tanto el límite de elasticidad al corte será diferente, si I_1 tiende a cero por valores positivos o por valores negativos.

$$\begin{aligned} \text{Si } I_1 \rightarrow +0 \quad R''_e &\rightarrow R_e \sqrt{\frac{G}{E}} = R_e \sqrt{\frac{I}{2(1+\mu)}} \\ \text{Si } I_1 \rightarrow -0 \quad R''_e &\rightarrow R'_e \sqrt{\frac{G}{E}} = R'_e \sqrt{\frac{I}{2(1+\mu)}} \end{aligned}$$

Puede resultar extraño la existencia de dos tensiones de corte en el límite de elasticidad, pero ¿no existen acaso dos límites de elasticidad: uno en tracción y otro en compresión? De todas maneras en corte puro deberá utilizarse el menor de los dos. (¡O tal vez un valor medio!)

Por ejemplo en el estado plano degenerado visto anteriormente: $\sigma_x = \sigma$, $\sigma_y = \sigma_z = 0$, $\tau_{xy} = \tau$, $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, tendríamos:

$$\text{Si } \sigma > 0 \quad \sqrt{\left(\frac{\sigma}{R_e}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{R''_e}\right)^2} \leq 1, \quad \text{Si } \sigma < 0 \quad \sqrt{\left(\frac{\sigma}{R'_e}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{R''_e}\right)^2} \leq 1$$

Si graficamos estos límites en un sistema de ejes (σ, τ) obtenemos la Fig. 15, que es la evolución de la Fig. 6 y notaremos una discontinuidad al cruzar el eje vertical. Ésta no existía cuando R_e era igual a R'_e . De la misma manera que el coeficiente de Poisson de la Fig. 2 no salta bruscamente en la práctica sino por una curva no bien definida, el cambio brusco indicado aquí se hará progresivamente.

No importa como, en la práctica, en esta zona de corte puro se toma el límite menor, o el

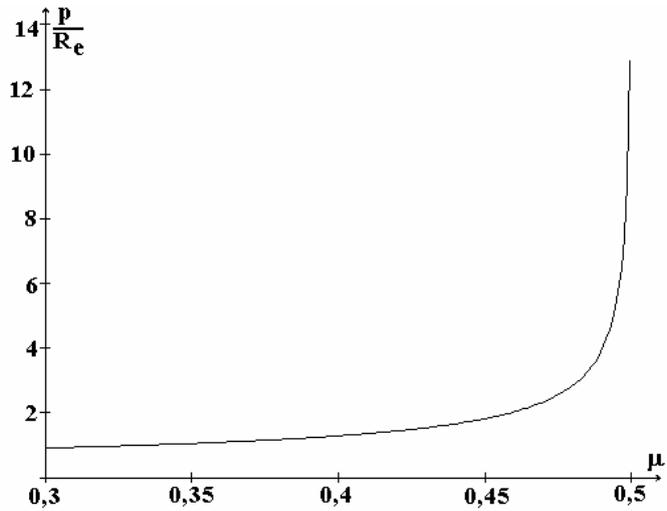


Fig. 14

promedio... (se necesitan datos experimentales para confirmar, por ejemplo torsión con tracción o con compresión, en un material con resistencia diferente en tracción y en compresión.)

6.2 COMPARACIÓN CON OTROS CRITERIOS:

Damos a continuación (Fig. 17 a 21) la comparación gráfica con otros criterios (Ver Apéndice), en el caso plano degenerado, todos presentan el mismo aspecto, una elipse que pasa por el límite a tracción, a compresión. El límite al corte, o está incluido en el trazado de la elipse o se deduce de ella. En el caso plano, tenemos varios casos con rectas o curvas, tratando de cumplimentar de la mejor manera posible con los límites a tracción y compresión. En el caso espacial, varios se cierran del lado de la tracción pero quedan abiertos del lado de la compresión. Analizamos tres casos del valor del coeficiente de Poisson (0,3, 0,4 y 0,5) ya que en la teoría presentada es importante la diferencia. Se notará que de un criterio a otro el límite al corte varía entre los límites presentados por el criterio propio.

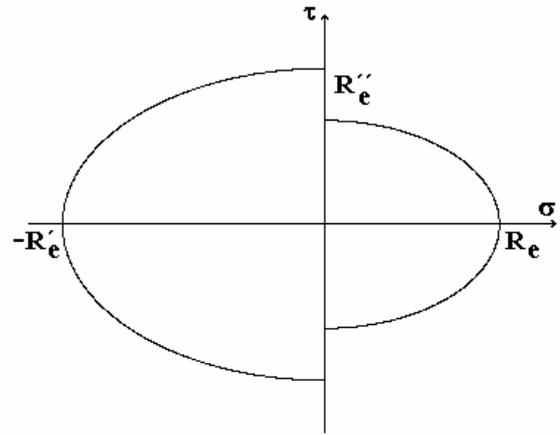


Fig. 15

Podemos presentar las curvas de variaciones del límite de elasticidad al corte según los diferentes criterios (Fig. 16) en función de la relación entre los límites elásticos en compresión y en tracción (R'/R) Para el criterio propio se toma el promedio de los límites en tracción y en compresión, tanto para el final de la elasticidad como para el principio de la plasticidad. Hemos agregado algunos resultados experimentales de Butty.

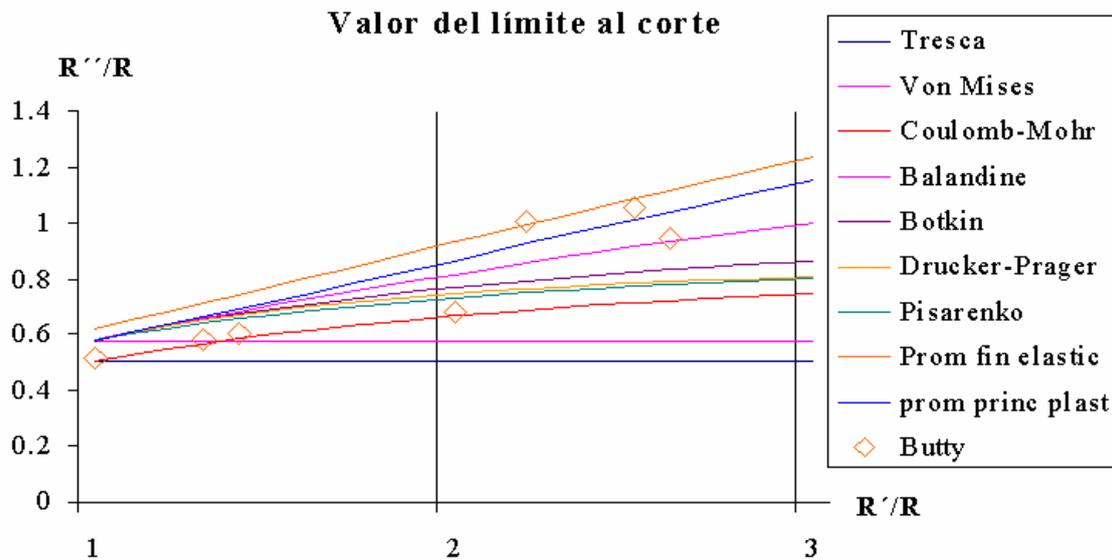


Fig. 16

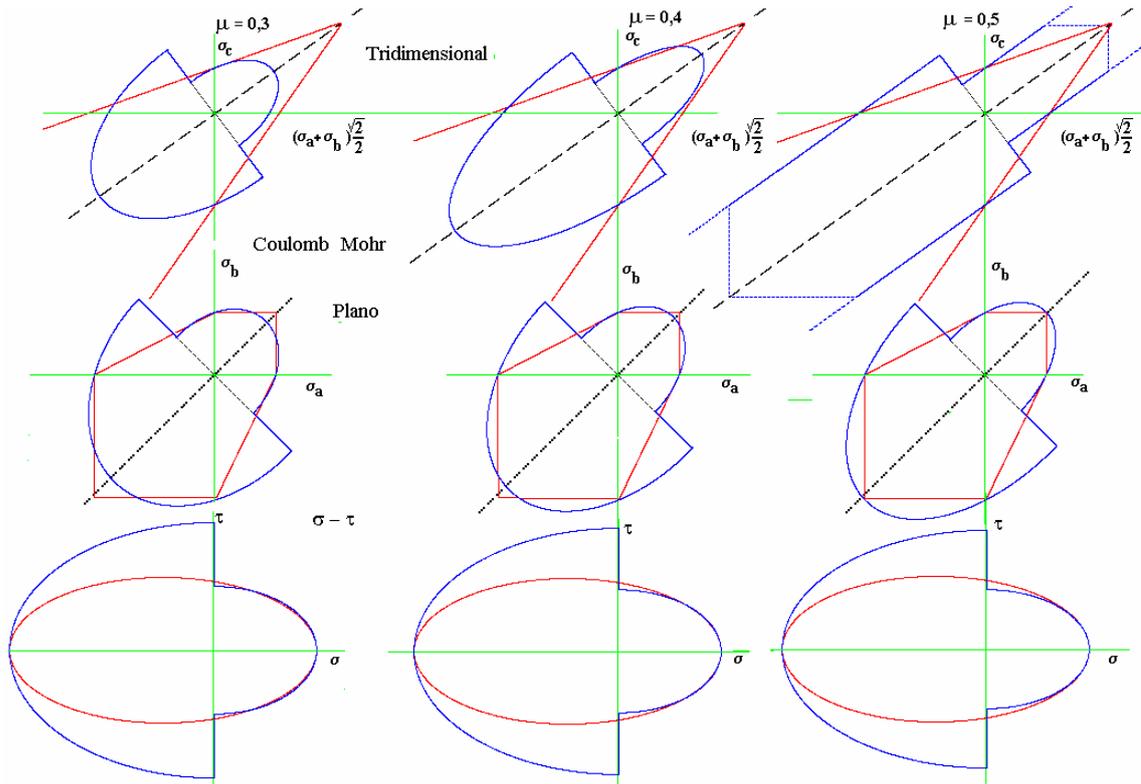


Fig. 17

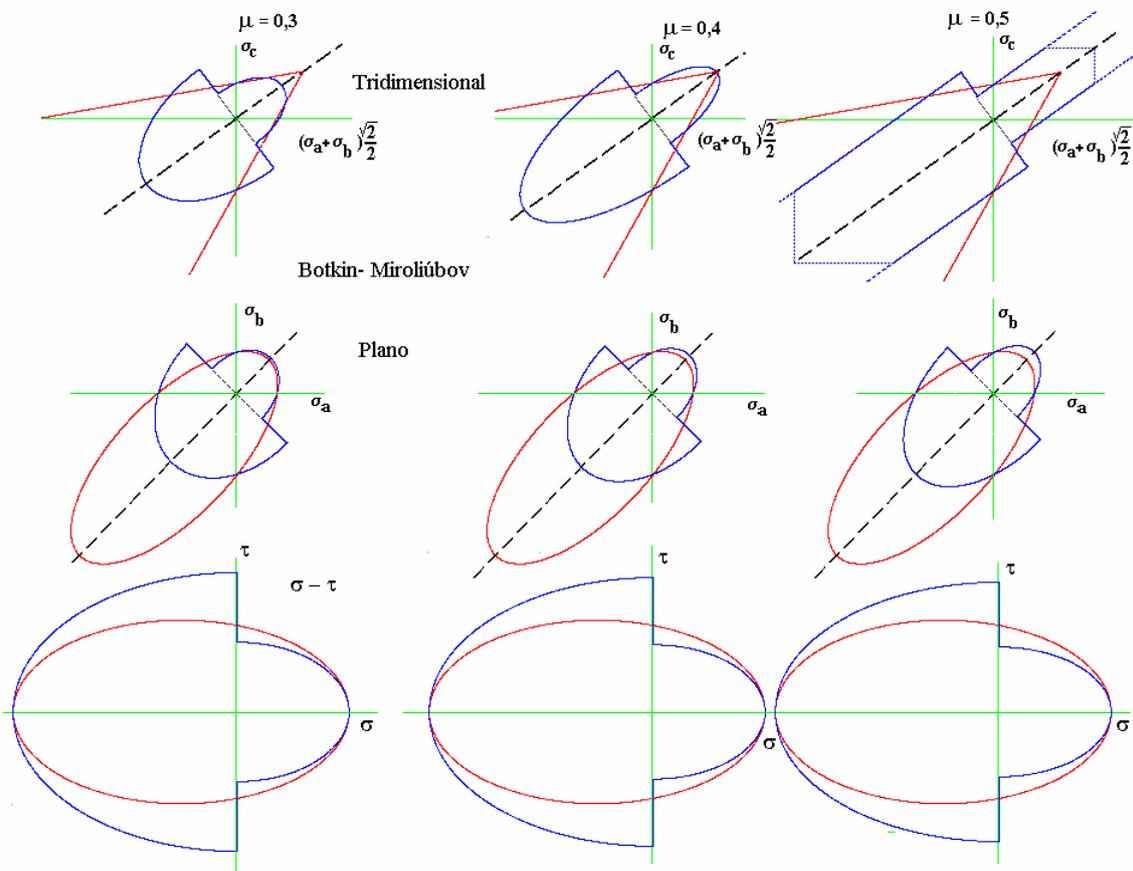


Fig. 18

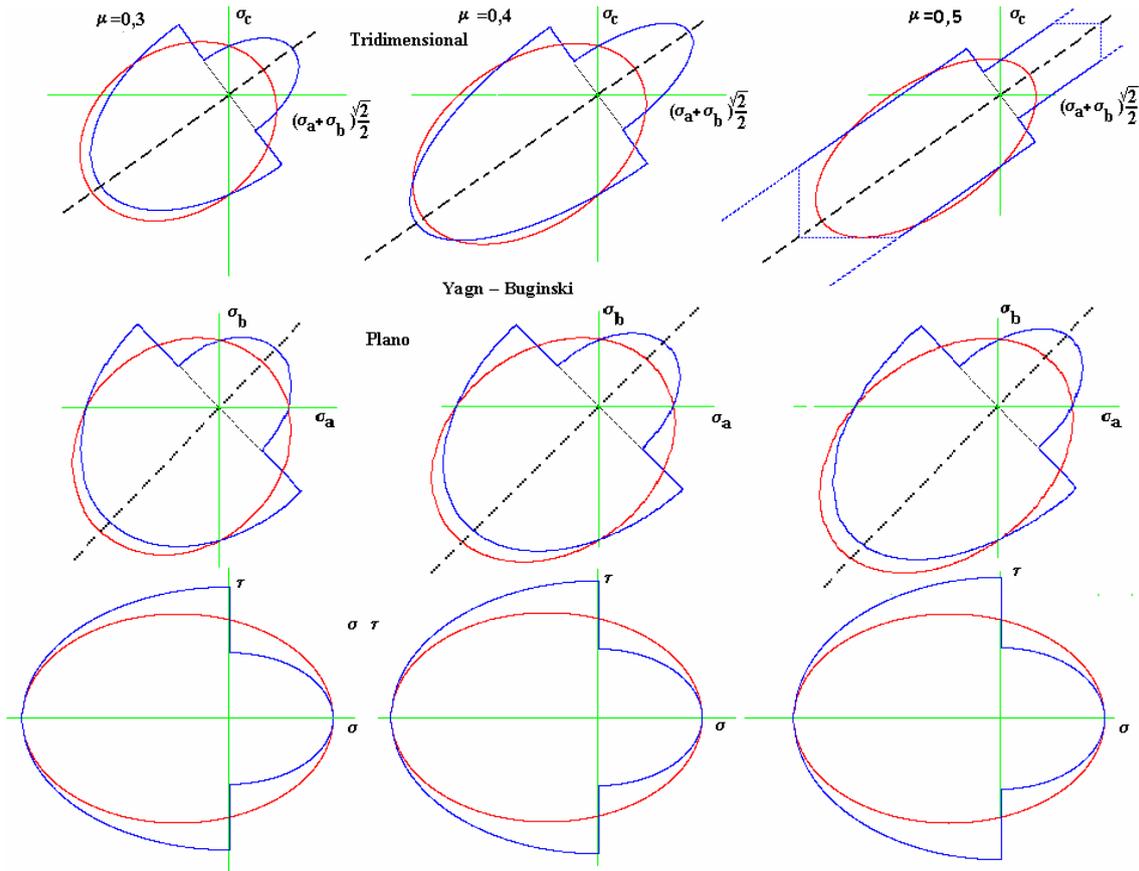


Fig. 19

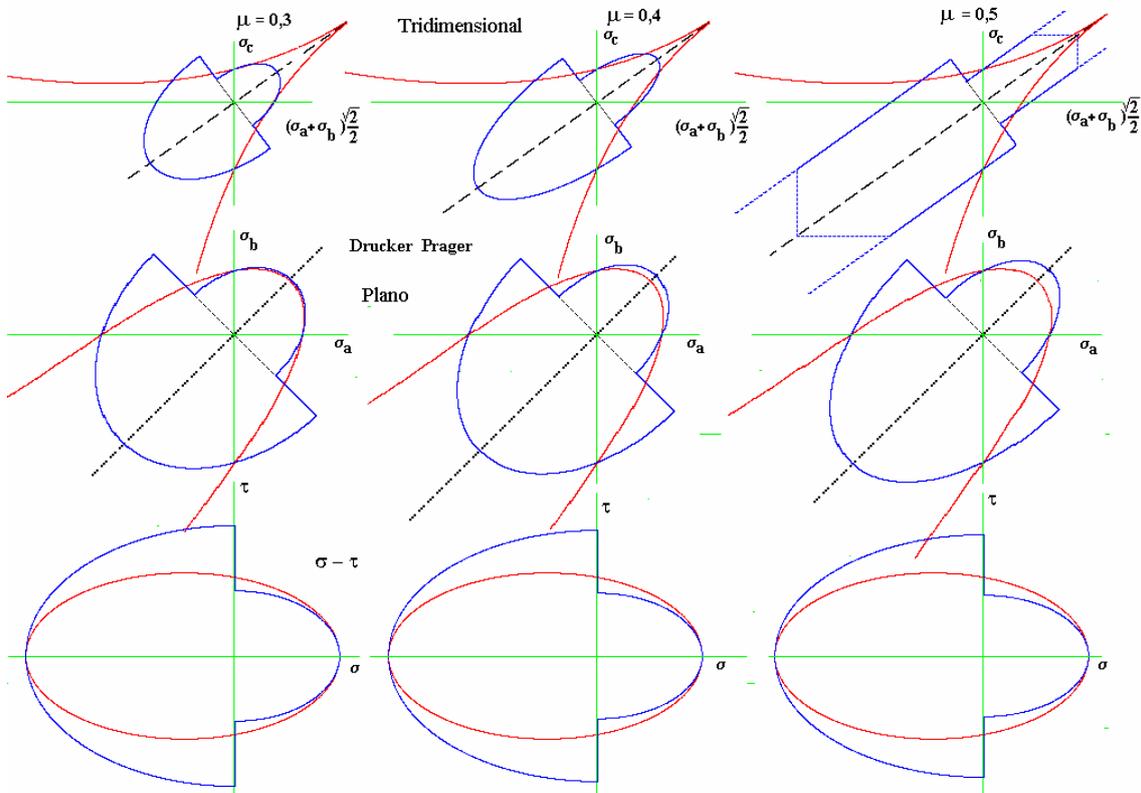


Fig. 20

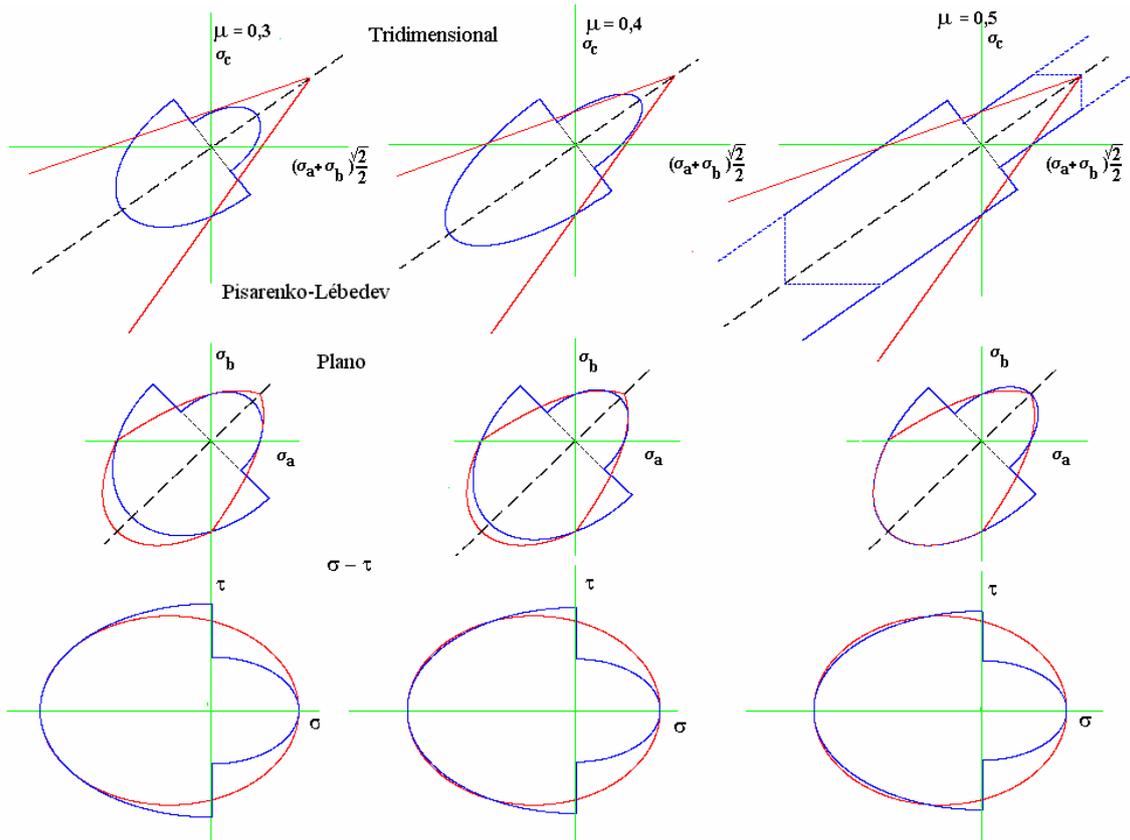


Fig. 21

7 RESUMEN FINAL DEL CRITERIO PROPIO DEL MATERIAL:

Recordemos:

Primer invariante del estado tensional:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

Segundo invariante del estado tensional:

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1$$

Consideramos prudente, para I_2 negativo, tomar como límite el principio de la plasticidad [$\mu = 0,5$] y para I_2 positivo el fin de la elasticidad [$\mu = \mu_0$ (0,3 para el acero)], o sea:

$$\text{Para } I_1 > 0 \quad \sqrt{\frac{I_1^2}{R_e^2} - \frac{I_2 \cdot 2(1 + \mu)}{R_e^2}} \leq \frac{1}{s}$$

$$\text{Para } I_1 < 0 \quad \sqrt{\frac{I_1^2}{R_e^2} - \frac{I_2 \cdot 2(1 + \mu)}{R_e^2}} \leq \frac{1}{s}$$

en todos los casos se verificará que : $-2R'_e < \sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1 < 2R_e$

Las representaciones gráficas de este criterio se dan en la Fig. 22

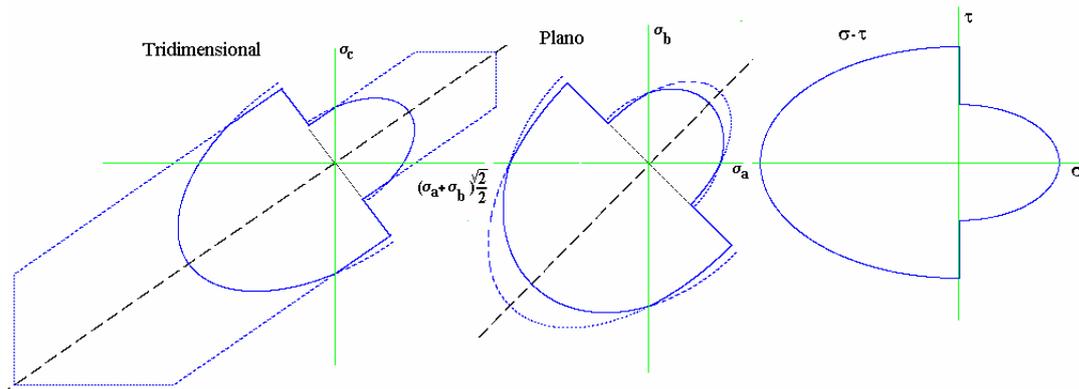
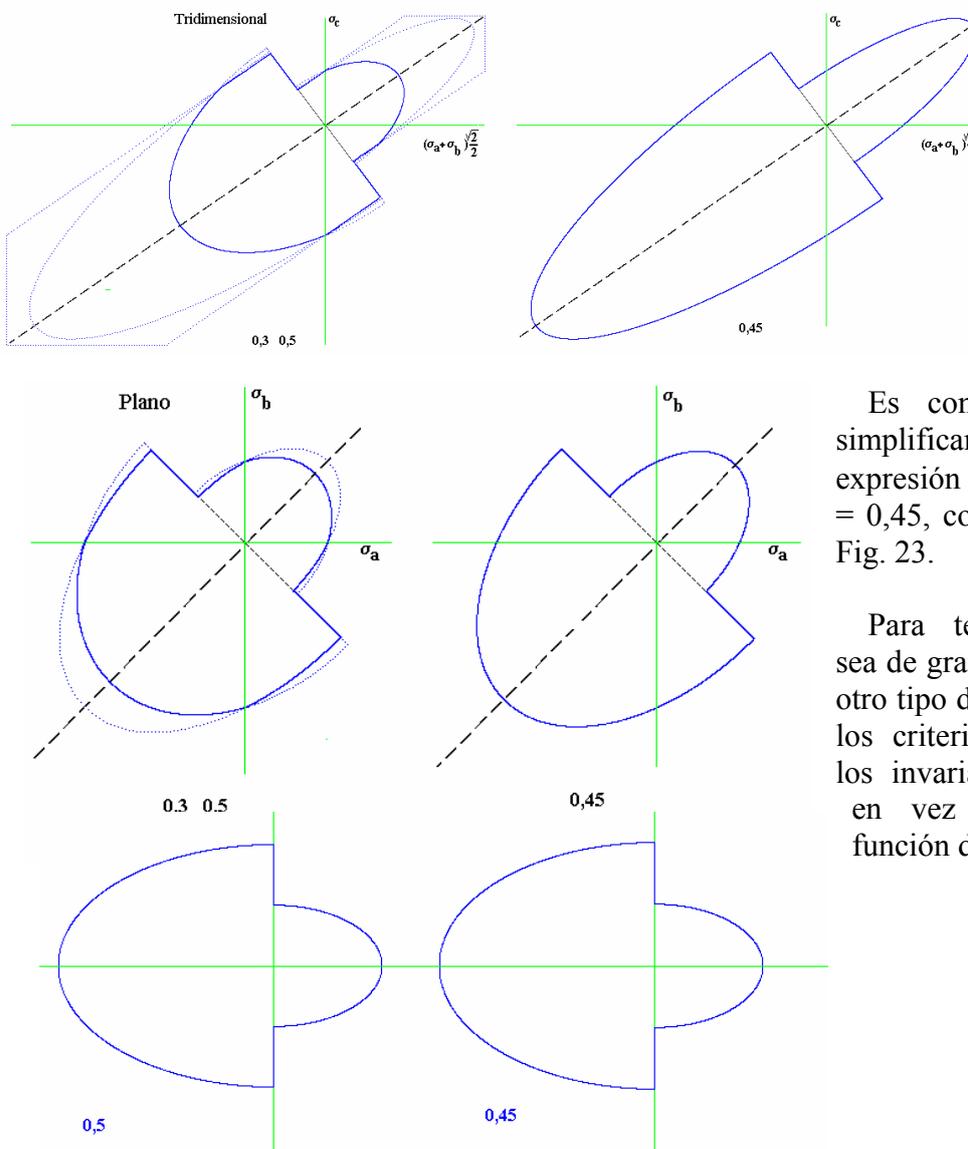


Fig 22

Vemos que limitando así las tensiones, estamos demasiado del lado de la seguridad sobre el eje hidrostático.



Es conveniente entonces simplificar con una sola expresión correspondiente a $\mu = 0,45$, como se indica en la Fig. 23.

Para terminar sugerimos sea de gran utilidad encontrar otro tipo de representación de los criterios, en función de los invariantes por ejemplo, en vez de realizarla en función de las tensiones.

Fig. 23

BIBLIOGRAFÍA:

Ch. Massonet, S. Cescotto: “*Mécanique des matériaux*” Ed. Sciences et letters, H. DESSAIN 1986

Enrique Fliess: “*Estabilidad*” Editorial Kapelusz. 1971 (Pag. 507-532)

G. S. Pisarenko, A. P. Yákovlev, V. V. Matvéev: “*Manual de resistencia de materiales*” Editorial MIR, Primera reimpression 1985.

Enrique Butty: “*Tratado de Elasticidad Teórico-Técnica*” Tomo I Buenos Aires Centro de estudiante de Ing. 1957 (Pag. 134-150)

Apéndice

Resumen de las expresiones de los Criterios

1) Criterio de la tensión normal máxima:

$$\sigma_1 \leq R \quad \text{o bien} \quad |\sigma_3| \leq R' \quad \text{Plano} \quad \sigma_x + \sigma_y + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} \leq 2R$$

$$\text{o bien} \quad \left| \sigma_x + \sigma_y - \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} \right| \leq 2R'$$

$$\text{Plano degenerado} \quad \sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq 2R \quad \text{o bien} \quad \left| \sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right| \leq 2R'$$

2) Criterio deformaciones lineales máxima:

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 - \sigma_3) \leq R \quad \text{abandonado}$$

3) Criterio de la tensión tangencial máxima:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq R \quad \text{Plano} \quad \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} \leq R$$

$$\text{Plano degenerado} \quad \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq R \quad R'' = 0,5 R$$

4) Criterio tensión octaedral:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq R \quad \text{o bien}$$

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \leq R \quad \text{o bien} \quad \sqrt{I_1^2 - 3I_2} \leq R \quad \text{o sea} \quad \frac{I_1^2}{R^2} - 3\frac{I_2}{R^2} \leq 1$$

$$\text{Plano} \quad \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 3\tau^2} \leq R$$

$$\text{Plano degenerado} \quad \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq R \quad \text{si } \sigma = 0 \quad R'' = 0,577 R, \quad R''^2 = R^2/3$$

5) Criterio de Coulomb-Mohr:

$$R'\sigma_1 - R\sigma_3 \leq RR' \quad \text{o bien} \quad (\sigma_1 + \sigma_3)(R' - R) + (\sigma_1 - \sigma_3)(R' + R) \leq 2RR'$$

$$\text{Plano} \quad (\sigma_x + \sigma_y)(R' - R) + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}(R' + R) \leq 2RR'$$

$$\text{Plano degenerado} \quad \sigma(R' - R) + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}(R' + R) \leq 2RR'$$

$$\text{si } \tau = 0 \quad -R' \leq \sigma \leq R \quad \text{si } \sigma = 0 \quad R'' = RR'/(R+R') \quad \text{o sea} \quad \frac{1}{R''} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$$

6) **Criterio de Yagn – Buginski:**

$$(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - R)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + R') - \frac{RR'}{R'^2} \cdot (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \leq 0 \quad \text{o bien}$$

$$(I_1 - R)(I_1 + R') - \frac{RR'}{R'^2} I_2 \leq 0 \quad \text{o sea} \quad \left(\frac{I_1}{R} - 1\right)\left(\frac{I_1}{R'} + 1\right) - \frac{I_2}{R'^2} \leq 0$$

$$\text{Plano:} \quad \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{R'} + 1\right)\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{R} - 1\right) - \frac{1}{R'^2} (\sigma_x\sigma_y - \tau^2) \leq 0$$

$$\text{Plano degenerado} \quad \left(\frac{\sigma}{R} - 1\right)\left(\frac{\sigma}{R'} + 1\right) + \frac{\tau^2}{R'^2} \leq 0 \quad \text{si } \tau = 0 \quad -R' < \sigma < R, \text{ si } \sigma = 0, \tau < R''$$

7) **Criterio de Balandin:** Igual al anterior con $R'^2 = \frac{RR'}{3}$

8) **Criterio de Botkin – Mirolíubov:**

$$(R' - R)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + (R' + R)\sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)} \leq 2RR'$$

$$\text{o también} \quad (R' - R)I_1 + (R' + R)\sqrt{I_1^2 - 3I_2} \leq 2RR'$$

$$\text{Plano} \quad (R' - R)(\sigma_x + \sigma_y) + (R' + R)\sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 3(\sigma_x\sigma_y - \tau^2)} \leq 2RR'$$

$$\text{Plano degenerado} \quad (R' - R)\sigma + (R' + R)\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq 2RR' \quad \text{si } \sigma = 0 \quad R' = \frac{2RR'}{\sqrt{3}(R + R')}$$

$$\text{si } \tau = 0 \quad -R' \leq \sigma \leq R \quad \text{o sea} \quad \frac{1}{R'} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)$$

9) **Criterio de Drucker-Prager:**

$$\left(\frac{R' + R}{R' + \sqrt{RR'}}\right)^2 \sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)} + 2\frac{\sqrt{RR'} - R}{R' + \sqrt{RR'}}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - \left(\frac{R' - \sqrt{RR'}}{R' + \sqrt{RR'}}\right)^2 \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{R'} \leq R$$

o también

$$(R' + R)^2 \sqrt{I_1^2 - 3I_2} + 2(R' - R)\sqrt{RR'} I_1 - (\sqrt{R'} - \sqrt{R})^2 I_1^2 \leq RR'(\sqrt{R'} + \sqrt{R})^2$$

$$\text{Plano:} \quad (R' + R)^2 \sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 3(\sigma_x\sigma_y - \tau^2)} + 2\sqrt{RR'}(R' - R)(\sigma_x + \sigma_y) - (\sqrt{R'} - \sqrt{R})^2 (\sigma_x + \sigma_y)^2 \leq RR'(\sqrt{R'} + \sqrt{R})^2$$

Plano degenerado:

$$(R'+R)^2 \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} + 2(R'-R)\sqrt{RR'}\sigma - (\sqrt{R'} - \sqrt{R})^2 \sigma^2 \leq RR'(\sqrt{R'} + \sqrt{R})^2$$

$$\text{Si } \tau = 0 \dots \pm (R'+R)^2 \sigma + 2(R'-R)\sqrt{RR'}\sigma - (\sqrt{R'} - \sqrt{R})^2 \sigma^2 \leq RR'(\sqrt{R'} + \sqrt{R})^2$$

Lo que da después $-R' < \sigma < R$

$$\text{Si } \sigma = 0 \quad (R'+R)^2 \sqrt{3}R' \leq RR'(\sqrt{R'} + \sqrt{R})^2 \quad \text{o sea } R'' = \frac{RR'(\sqrt{R'} + \sqrt{R})^2}{\sqrt{3}(R+R')^2}$$

10) Criterio de Pisarenko-Lébedev:

$$R\sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)} + (R'-R)\sigma_1 \leq RR'$$

o también:

$$R\sqrt{I_1^2 - 3I_2} + (R'-R)\sigma_1 \leq RR'$$

$$\text{Plano: } R\sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 3(\sigma_x\sigma_y - \tau^2)} + (R'-R)\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}\right) \leq RR'$$

$$\text{Plano degenerado: } R\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} + (R'-R)\left(\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right) \leq RR'$$

$$\text{Si } \tau = 0 \dots R\sqrt{\sigma^2} + (R'-R)\left(\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2}\right) \leq RR' \quad \text{o sea } -R' \leq \sigma \leq R$$

$$\text{Si } \sigma = 0 \quad R\sqrt{3}\tau + (R'-R)\tau \leq RR' \quad \text{o sea } R'' = \frac{RR'}{R\sqrt{3} + R' - R}$$

Notamos que los criterios pueden dividirse en expresiones con R y R' o bien expresiones con R, R' y R''. En el primer caso la tensión admisible al corte dependerá de R y R'.

Tenemos según los diversos criterios: con $f = R'/R$

$$R'' = 0,5 R \qquad R''/R = 0,5 \quad (\text{independiente de } f)$$

$$R'' = 0,577 R \qquad R''/R = 0,577 \quad (\text{independiente de } f)$$

$$R'' = RR'/(R+R') \quad \text{o sea} \quad \frac{1}{R''} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \qquad R''/R = f/(1+f)$$

$$R'' = \sqrt{\frac{RR'}{3}} \qquad R''/R = \sqrt{\frac{f}{3}}$$

$$R'' = \frac{2RR'}{\sqrt{3}(R+R')} \quad \text{o sea} \quad \frac{1}{R''} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \quad R''/R = \frac{2f}{\sqrt{3}(1+f)}$$

$$R'' = \frac{R(R'+\sqrt{RR'})^2}{\sqrt{3}(R+R')^2} = \frac{RR'(\sqrt{R'}+\sqrt{R})^2}{\sqrt{3}(R+R')^2} \quad R''/R = \frac{f(\sqrt{f}+1)^2}{\sqrt{3}(1+f)^2}$$

$$R'' = \frac{RR'}{R\sqrt{3}+R'-R} \quad R''/R = \frac{f}{\sqrt{3}+f-1}$$

Ver la Fig. 16 del texto donde estas fórmulas están graficadas.