

## ANÁLISIS DE LA CONCENTRACIÓN DE TENSIONES EN PLACAS ORTÓTROPAS CON ORIFICIO CIRCULAR SOMETIDAS SIMULTÁNEAMENTE A CARGAS NORMALES Y TANGENCIALES.

A. Susca<sup>a,b</sup>, D. V. Bambill<sup>a,b</sup>, Carlos A. Rossit<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> Departamento de Ingeniería, Instituto de Mecánica Aplicada, Universidad Nacional del Sur,  
Av Alem 1253 (B8000CPB), Bahía Blanca, Argentina.

<sup>b</sup> Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).  
email: asusca@uns.edu.ar, dbambill@criba.edu.ar, carossit@criba.edu.ar.

**Keywords:** estado plano de tensiones, concentración de tensiones, ortotropía, orificio circular, placa, carga tangencial, carga normal.

**Abstract.** En el proyecto estructural la concentración de tensiones generalmente juega un importante rol que debe ser tenido en cuenta por el ingeniero de diseño.

El presente trabajo trata sobre el efecto que un pequeño orificio circular produce en la distribución de tensiones de una placa de material ortótropo sometida a cargas en su plano medio.

Se estudia una placa rectangular solicitada por cargas normales y tangenciales a sus bordes externos, considerando distintas orientaciones de las direcciones elásticas principales del material ortótropo con respecto a los lados de la placa.

Se determina la magnitud de las tensiones extremas en el contorno del orificio así como su ubicación, para distintas relaciones entre los valores de las cargas.

Este es un tema de interés en ingeniería de minas y metalurgia.

## 1 INTRODUCCIÓN.

El estudio de la concentración de tensiones que un orificio pequeño produce en un medio elástico ha despertado enorme interés en el campo de la mecánica de sólidos.

Merece destacarse el problema resuelto por Kirsch en 1898, en que la presencia de un pequeño agujero circular en una placa rectangular isótropa sometida a esfuerzo uniforme en la dirección de uno de sus lados produce un factor de concentración de tensiones (SCF por sus siglas en inglés) igual a tres. Si en cambio, el esfuerzo uniforme se produce según las dos direcciones preponderantes, dicho SCF es igual a dos, [Timoshenko et al., 1951](#), [Laura y Maurizi, 1979](#).

En razón del desarrollo que ha alcanzado la utilización de materiales compuestos, el interés en las investigaciones se ha volcado al caso de materiales ortótropos y anisótropos donde la bibliografía es aún reducida. El tema tiene importancia en campos tecnológicos tan disímiles como la ingeniería de minas, estudiando la influencia de perforación de túneles en medios rocosos ([Kyung-Ho Park y Yong-Jin Kim, 2006](#)) o en metalurgia debido a perforaciones en chapas metálicas, a las que el proceso de laminado induce características ortótropas.

En el caso de que dicho elemento metálico forme parte de alguna maquinaria con movimiento alternativo, la concentración de tensiones puede resultar decisiva en la falla por fatiga.

Entre los estudios referidos a materiales no isótropos deben consignarse los resultados obtenidos por [Lekhnitskii, 1968](#), para una placa infinita anisótropa con orificio circular. Entre otros trabajos recientes sobre materiales ortótropos compuestos pueden mencionarse los de [Ukadgaonker y Rao, 2000](#), [Troyani et al., 2003](#), [Maiz et al., 2004](#), [Bambill et al., 2005](#) y [Susca et al., 2006](#), referidos a esfuerzos axiales en el plano.

En el presente trabajo se analiza el factor de concentración de tensiones que un orificio circular pequeño provoca en una placa cuadrada de material ortótropo, sometida a un estado de carga en su borde externo en el que se combinan esfuerzos normales  $N_x$ ,  $N_y$  y esfuerzos de corte  $N_{xy}$ .

Con respecto a los materiales ortótropos (aquellos materiales que tienen tres planos de simetría elástica perpendiculares entre sí en cada punto), es sabido que es enorme la variabilidad de los parámetros elásticos que caracterizan su comportamiento mecánico.

Como ejemplo, se indican en la Tabla 1 las propiedades de algunos materiales compuestos de comportamiento ortótropo:

MATERIAL	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G$ (GPa)	$\nu_1$
T300/5208 Carbón/Epoxi	181	10,3	7,17	0,28
ASA/3501-6 Carbón/Epoxi	142	10,3	7,2	0,27
E-glass/Epoxi	39	8,6	3,8	0,28
S-glass/Epoxi	43	8,9	4,5	0,27
Kevlar 149/Epoxi	87	5,5	2,2	0,34

Tabla 1: Propiedades de materiales compuestos.

donde:

$E_1, E_2$  son los módulos de Young del material en las direcciones principales elásticas 1 y 2 respectivamente;

$G$  es el módulo de elasticidad transversal, que caracteriza la variación angular entre las direcciones principales 1 y 2.

$\nu_1 = \nu_{12}$  es el módulo de Poisson que caracteriza la disminución de longitud en la dirección 2 durante la tracción en dirección 1, y análogamente  $\nu_2 = \nu_{21}$  es el módulo de Poisson que caracteriza la disminución de longitud en la dirección 1 durante la tracción en dirección 2.

La siguiente relación entre los módulos de Young y los módulos de Poisson existe debido a la simetría presente en los materiales ortótropos:

$$E_1 \cdot \nu_2 = E_2 \cdot \nu_1$$

Por consiguiente para realizar el estudio de las tensiones de una placa ortótropa sujeta a un estado plano de tensiones es suficiente conocer sólo estas cuatro constantes:  $E_1, E_2, G$  y  $\nu_1$ .

En este estudio se consideran materiales ortótropos genéricos, evaluando la incidencia de la relación entre las constantes elásticas sobre los valores del factor de concentración de tensiones, SFC., de manera de indicar una tendencia de comportamiento ya que, como lo determinan Domínguez et al., 2006, no conviene extrapolar resultados de un tipo de material a otro.

## 2 PLANTEO DEL PROBLEMA.

Se analiza la concentración de tensiones que un orificio circular provoca en una placa cuadrada de espesor  $h$  constituida por un material ortótropo de comportamiento lineal, sometida a un estado de carga aplicado en su borde externo con esfuerzos de tracción y corte en su plano (Figura 1). La placa se considera de grandes dimensiones con respecto al tamaño del agujero.

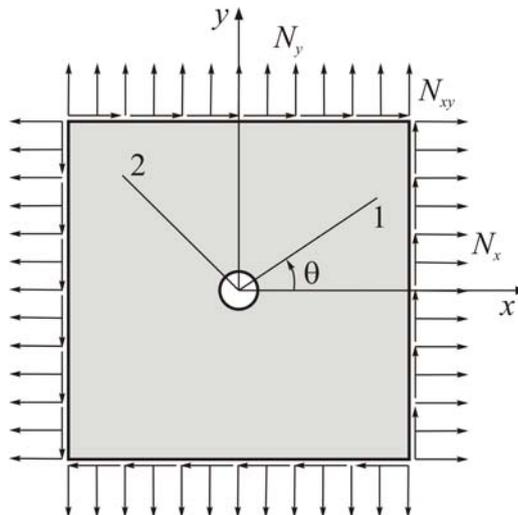


Figura 1: Esquema del sistema analizado.

Con  $\theta$  se indica el ángulo que las direcciones principales elásticas forman con las direcciones coordenadas paralelas a los bordes de la placa  $x$  e  $y$ .

Debido a la configuración del esquema de carga elegido ( $N_x = N_y$ ), con el modelo propuesto puede representarse cualquier combinación de esfuerzos axiales en direcciones giradas  $45^\circ$  con respecto a los ejes  $x, y$ .

Las diagonales de la placa de la figura 1, constituyen ejes de simetría para el problema de

tensiones en análisis. Consecuentemente, se han considerado orientaciones para los ejes principales de elasticidad variando entre  $-45^\circ$  y  $+45^\circ$ .

### 3 RESOLUCIÓN CON ELEMENTOS FINITOS

En la resolución del problema se utilizó el método de Elementos Finitos, recurriéndose al módulo de análisis lineal del software comercial **ALGOR**.

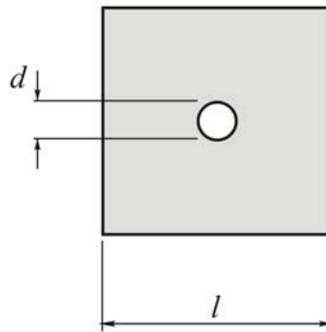


Figura 2: dimensiones relativas del modelo.

El mallado en elementos finitos se realizó con elementos cuadrangulares de 4 nodos con 2 grados de libertad por nodo, los corrimientos en las direcciones coordenadas. El elemento utilizado es conforme.

En trabajos anteriores ([Bambill et al, 2005](#)) se comprobó que  $d/l = 0,03$ , Figura 2 es la relación límite, por debajo de la cual no se observan cambios significativos en los valores del factor de concentración de tensiones y en la distribución de las tensiones.

El mallado utilizado posee 92404 elementos y un número de nodos de 92960. El mallado en una amplia zona alrededor del agujero se obtuvo por intersección de coronas circulares con centro coincidente con el del agujero y líneas radiales, lo que resultó en elementos cuadrangulares con muy poca distorsión. En el borde del agujero, zona de interés para este estudio, se colocaron 400 elementos que permiten obtener valores de tensión cada  $0,9^\circ$  sobre el borde circular. En la Figura 3 se muestra un esquema del mallado sobre un cuarto de placa:

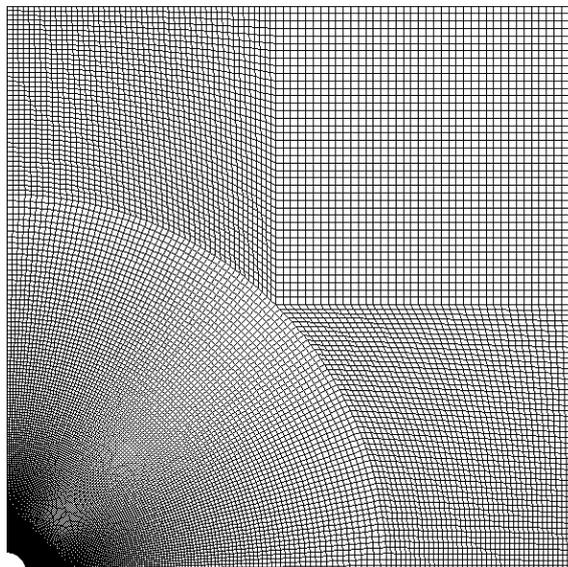


Figura 3: esquema del mallado.

El esfuerzo de corte se impuso en el modelo como las cargas nodales equivalentes sobre los nodos del borde externo.

Los movimientos de cuerpo rígido de la placa fueron anulados restringiéndolos en un nodo ubicado sobre el punto medio del borde externo izquierdo.

#### 4 RESULTADOS OBTENIDOS.

Se consideraron cuatro casos de relaciones entre los esfuerzos axiales y de corte:

- a)  $N_x = N_y = N_{xy}$ .
- b)  $N_x = N_y = N_{xy}/2$ .
- c)  $N_x = N_y = 2N_{xy}$ .

y finalmente:

- d)  $N_x = N_y = 0; N_{xy}$

El caso “d” fue resuelto por [Lekhnitskii, 1968](#), y se adoptó para verificar la exactitud del modelo utilizado en el presente trabajo.

En las tablas 2 a 10 se han adoptado valores de  $E_1 / E_2$  variando entre 2 y 10 para valores de  $G/E_2 = 0,1, 0,2$  y  $0,3$ ,  $\nu_1$  se adoptó igual  $0,3$ .

Los resultados presentados corresponden a:

$K_+$  : factor concentración de tensiones máximo :  $K_+ = \frac{\sigma_{m\acute{a}x}}{\sigma_n}$  donde  $\sigma_n$  es la tensión máxima

que existiría en el punto si no existiera el orificio.

$\beta_1$  es el ángulo medido en sentido antihorario a partir del eje  $x$  que indica la ubicación del punto de máxima concentración de tensiones en el contorno del orificio.

Asimismo, se presentan los valores de los factores de concentración de tensiones mínimos dados por la relación.

$$K_- = \frac{\sigma_{m\acute{i}n}}{\sigma_n}$$

y su ubicación  $\beta_2$ , medida de forma similar a  $\beta_1$ .

Este parámetro  $K$  es de interés en el caso de cargas cíclicas.

$E_1/E_2$	$\theta^\circ$	$G/E_2 = 0,1$		$\nu_1 = 0,3$	
		$K_+$	$\beta_1$	$K_-$	$\beta_2$
2	-45,00	4,36	135,00	-1,43	45,00
	-22,50	3,90	152,10	-1,53	55,80
	0,00	3,51	99,90	-1,23	66,60
	22,50	5,13	117,00	-0,94	42,30
	45,00	5,76	135,00	-0,71	45,00
3	-45,00	4,33	135,00	-1,75	45,00
	-22,50	3,87	152,10	-1,87	57,60
	0,00	4,09	98,10	-1,48	71,10
	22,50	6,02	116,10	-0,87	44,10
	45,00	6,77	135,00	-0,59	45,00
4	-45,00	4,31	135,00	-2,01	45,00
	-22,50	3,85	152,10	-2,16	58,50
	0,00	4,57	98,10	-1,72	73,80
	22,50	6,77	116,10	-0,83	45,00
	45,00	7,60	45,00	-0,51	45,00
5	-45,00	4,29	135,00	-2,23	45,00
	-22,50	3,84	152,10	-2,41	58,50
	0,00	5,01	97,20	-1,94	74,70
	22,50	7,42	116,10	-0,81	45,90
	45,00	8,32	135,00	-0,45	45,00
6	-45,00	4,29	135,00	-2,44	45,00
	-22,50	3,83	152,10	-2,64	59,40
	0,00	5,40	97,20	-2,15	75,60
	22,50	7,98	116,10	-0,91	90,00
	45,00	8,97	135,00	-0,42	45,00
7	-45,00	4,28	135,00	-2,62	45,00
	-22,50	3,83	152,10	-2,84	59,40
	0,00	5,74	96,30	-2,34	76,50
	22,50	8,51	115,20	-1,03	91,80
	45,00	9,55	135,00	-0,38	45,00
8	-45,00	4,27	135,00	-2,79	45,00
	-22,50	3,82	152,10	-3,03	59,40
	0,00	6,07	96,30	-2,52	76,50
	22,50	8,99	115,20	-1,14	87,30
	45,00	10,08	135,00	-0,36	45,00
9	-45,00	4,26	135,00	-2,95	45,00
	-22,50	3,81	152,10	-3,19	59,40
	0,00	6,36	96,30	-2,68	77,40
	22,50	9,43	115,20	-1,24	86,40
	45,00	10,56	135,00	-0,34	45,00
10	-45,00	4,26	135,00	-3,09	45,00
	-22,50	3,81	152,10	-3,35	60,30
	0,00	6,63	96,30	-2,84	77,40
	22,50	9,85	115,20	-1,35	94,50
	45,00	11,02	135,00	-0,32	45,00

Tabla 2: Resultados numéricos para  $N_x = N_y = N_{xy}$

$E_1/E_2$	$\theta^\circ$	$G/E_2 = 0,2$		$\nu_1 = 0,3$	
		$K_+$	$\beta_1$	$K_-$	$\beta_2$
2	-45,00	3,49	135,00	-1,43	45,00
	-22,50	3,17	147,60	-1,39	54,00
	0,00	2,93	106,20	-1,12	59,40
	22,50	4,07	29,70	-0,86	46,80
	45,00	4,53	135,00	-0,71	45,00
3	-45,00	3,45	135,00	-1,75	45,00
	-22,50	3,13	148,50	-1,68	56,70
	0,00	3,30	102,60	-1,27	66,60
	22,50	4,71	117,90	-0,79	50,40
	45,00	5,26	135,00	-0,58	45,00
4	-45,00	3,43	135,00	-2,02	45,00
	-22,50	3,10	148,50	-1,94	57,60
	0,00	3,63	100,80	-1,44	69,30
	22,50	5,24	117,90	-0,76	54,00
	45,00	5,87	135,00	-0,50	45,00
5	-45,00	3,42	135,00	-2,25	45,00
	-22,50	3,08	149,40	-2,17	58,50
	0,00	3,92	99,90	-1,59	72,00
	22,50	5,71	117,00	-0,74	58,50
	45,00	6,40	135,00	-0,45	45,00
6	-45,00	3,40	135,00	-2,46	45,00
	-22,50	3,07	149,40	-2,38	58,50
	0,00	4,19	99,00	-1,75	72,90
	22,50	6,13	117,00	-0,74	71,10
	45,00	6,87	135,00	-0,41	45,00
7	-45,00	3,39	135,00	-2,65	45,00
	-22,50	3,05	149,40	-2,57	59,40
	0,00	4,45	99,00	-1,90	73,80
	22,50	6,51	117,00	-0,78	81,00
	45,00	7,30	135,00	-0,38	45,00
8	-45,00	3,38	135,00	-2,83	45,00
	-22,50	3,05	149,40	-2,74	59,40
	0,00	4,68	99,00	-2,04	74,70
	22,50	6,87	116,10	-0,83	84,60
	45,00	7,71	135,00	-0,36	45,00
9	-45,00	3,37	135,00	-3,00	45,00
	-22,50	3,04	149,40	-2,90	60,30
	0,00	4,91	98,10	-2,17	75,60
	22,50	7,21	116,10	-0,88	87,30
	45,00	8,08	135,00	-0,34	45,00
10	-45,00	3,37	135,00	-3,15	45,00
	-22,50	3,03	149,40	-3,06	60,30
	0,00	5,11	98,10	-2,30	75,60
	22,50	7,52	116,10	-0,94	89,10
	45,00	8,43	135,00	-0,32	45,00

Tabla 3: Resultados numéricos para  $N_x = N_y = N_{xy}$

		$G/E_2 = 0,3$		$\nu_1 = 0.30$	
$E_1/E_2$	$\theta^\circ$	$K_+$	$\beta_1$	$K_-$	$\beta_2$
2	-45,00	3,13	135,00	-1,43	45,00
	-22,50	2,91	143,10	-1,35	53,10
	0,00	2,85	113,40	-1,09	56,70
	22,50	3,67	121,50	-0,83	49,50
	45,00	4,01	135,00	-0,71	45,00
3	-45,00	3,08	135,00	-1,75	45,00
	-22,50	2,84	144,00	-1,63	55,80
	0,00	3,08	107,10	-1,22	63,00
	22,50	4,17	119,70	-0,77	54,00
	45,00	4,62	135,00	-0,58	45,00
4	-45,00	3,05	135,00	-2,02	45,00
	-22,50	2,81	144,90	-1,87	56,70
	0,00	3,32	104,40	-1,35	67,50
	22,50	4,61	118,80	-0,74	58,50
	45,00	5,12	135,00	-0,50	45,00
5	-45,00	3,03	135,00	-2,26	45,00
	-22,50	2,79	144,90	-2,09	57,60
	0,00	3,54	102,60	-1,48	69,30
	22,50	4,99	117,90	-0,74	63,00
	45,00	5,56	135,00	-0,45	45,00
6	-45,00	3,02	135,00	-2,47	45,00
	-22,50	2,76	145,80	-2,28	58,50
	0,00	3,75	101,70	-1,61	71,10
	22,50	5,34	117,90	-0,74	67,50
	45,00	5,95	135,00	-0,41	45,00
7	-45,00	3,01	135,00	-2,66	45,00
	-22,50	2,75	145,80	-2,46	59,40
	0,00	3,95	100,80	-1,73	72,90
	22,50	5,65	117,90	-0,75	72,90
	45,00	6,31	135,00	-0,38	45,00
8	-45,00	3,00	135,00	-2,84	45,00
	-22,50	2,74	145,80	-2,63	59,40
	0,00	4,14	100,80	-1,85	73,80
	22,50	5,95	117,00	-0,77	77,40
	45,00	6,65	135,00	-0,35	45,00
9	-45,00	2,99	135,00	-3,01	45,00
	-22,50	2,73	145,80	-2,79	59,40
	0,00	4,32	100,00	-1,97	74,70
	22,50	6,23	117,00	-0,80	81,00
	45,00	6,97	135,00	-0,34	45,00
10	-45,00	2,98	135,00	-3,17	45,00
	-22,50	2,72	145,80	-2,94	60,30
	0,00	4,49	99,90	-2,09	74,70
	22,50	6,48	117,00	-0,83	83,70
	45,00	7,25	135,00	-0,32	45,00

Tabla 4: Resultados numéricos para  $N_x = N_y = N_{xy}$ .

A continuación se exponen una serie de gráficos que muestran la variación del factor de concentración de tensiones para los diferentes materiales ortótropos genéricos considerando distintas orientaciones de los ejes elásticos principales.

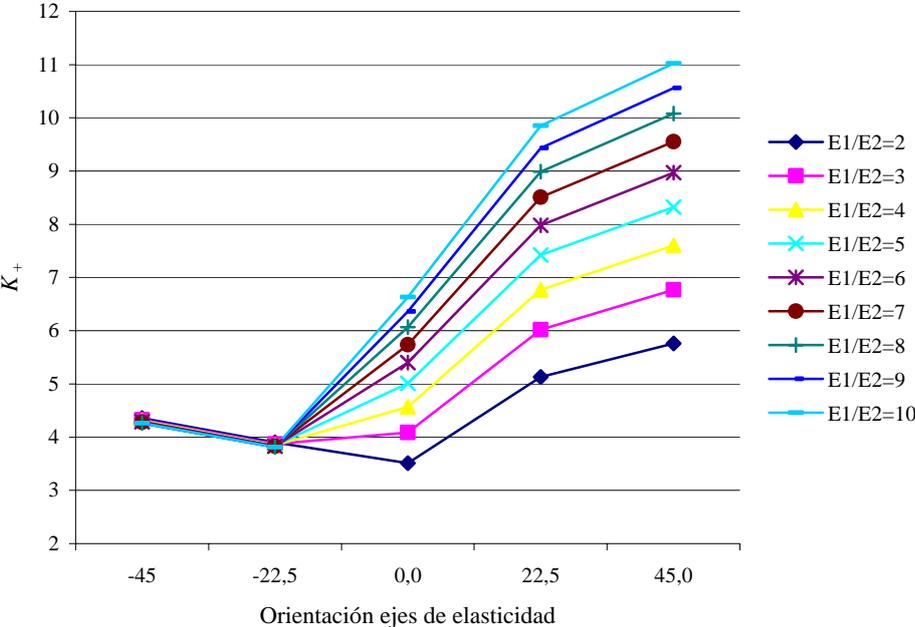


Figura 4:  $K_+$  versus orientación de los ejes de elasticidad para  $G/E_2=0,1$  para el caso  $N_x=N_y=N_{xy}$ .

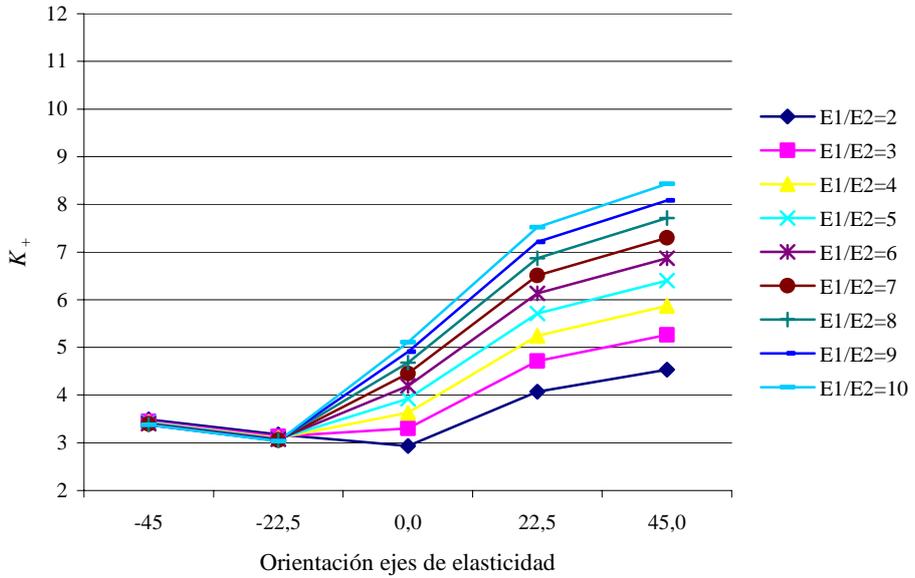


Figura 5:  $K_+$  versus orientación de los ejes de elasticidad para  $G/E_2=0,2$  para el caso  $N_x=N_y=N_{xy}$ .

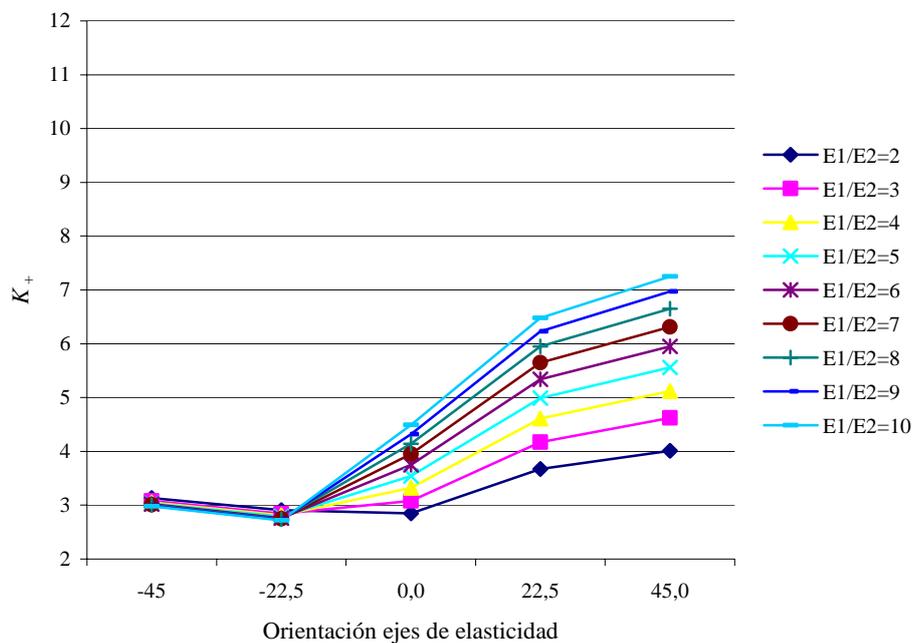


Figura 6:  $K_+$  versus orientación de los ejes de elasticidad para  $G/E_2=0,3$  para el caso  $N_x=N_y=N_{xy}$ .

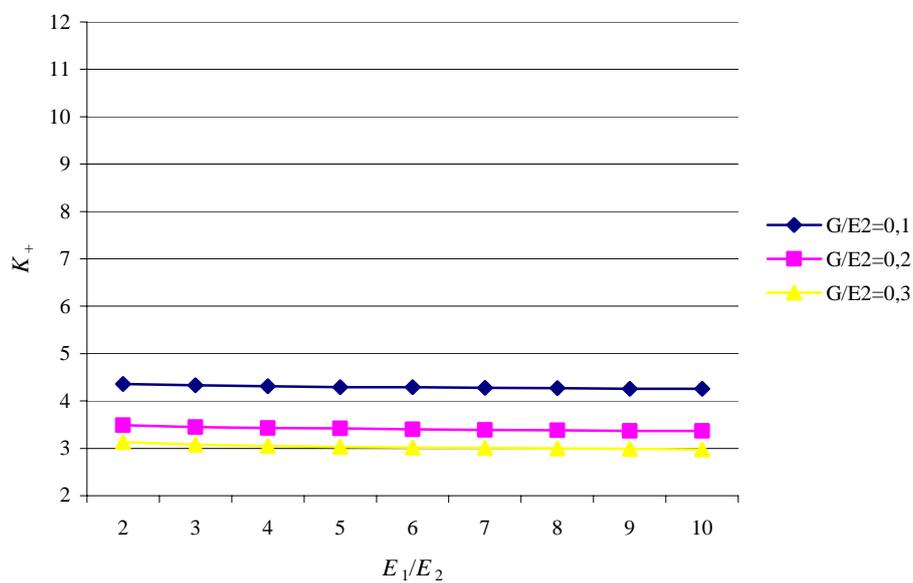


Figura 7:  $K_+$  versus  $E_1/E_2$  para una orientación de los ejes de elasticidad de  $-45^\circ$ , caso  $N_x=N_y=N_{xy}$ .

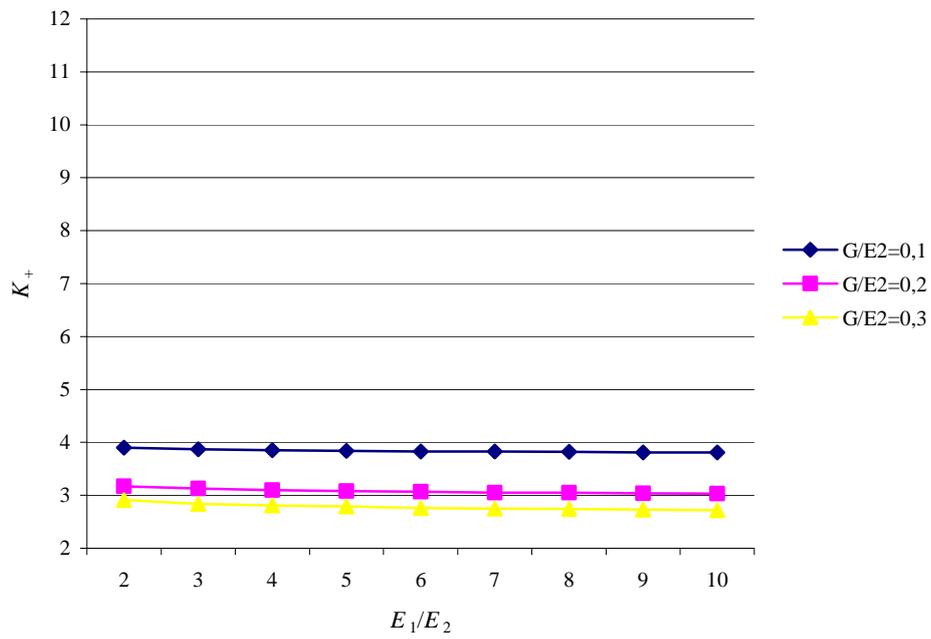


Figura 8:  $K_+$  versus  $E_1/E_2$  para una orientación de los ejes de elasticidad de  $-22,5^\circ$ , caso  $N_x=N_y=N_{xy}$ .

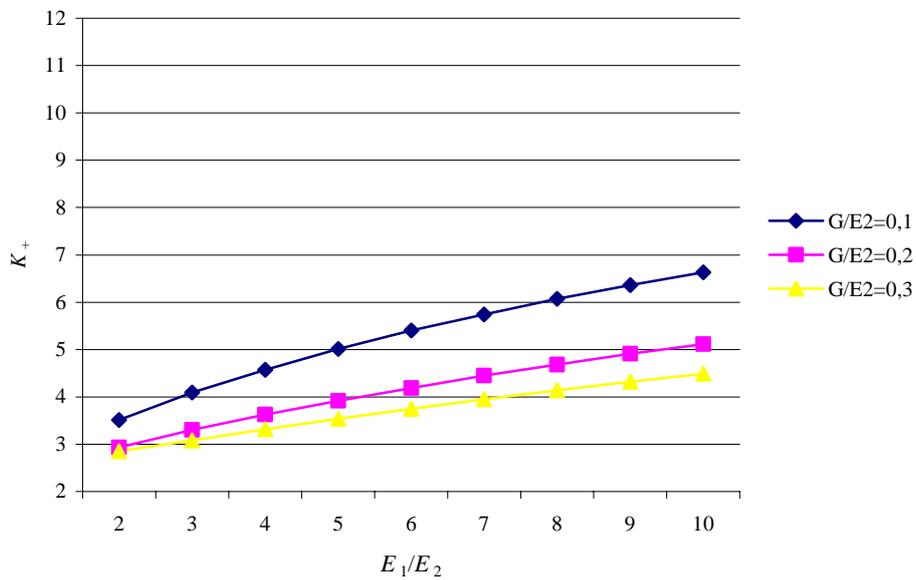


Figura 9:  $K_+$  versus  $E_1/E_2$  para una orientación de los ejes de elasticidad de  $0^\circ$ , caso  $N_x=N_y=N_{xy}$ .

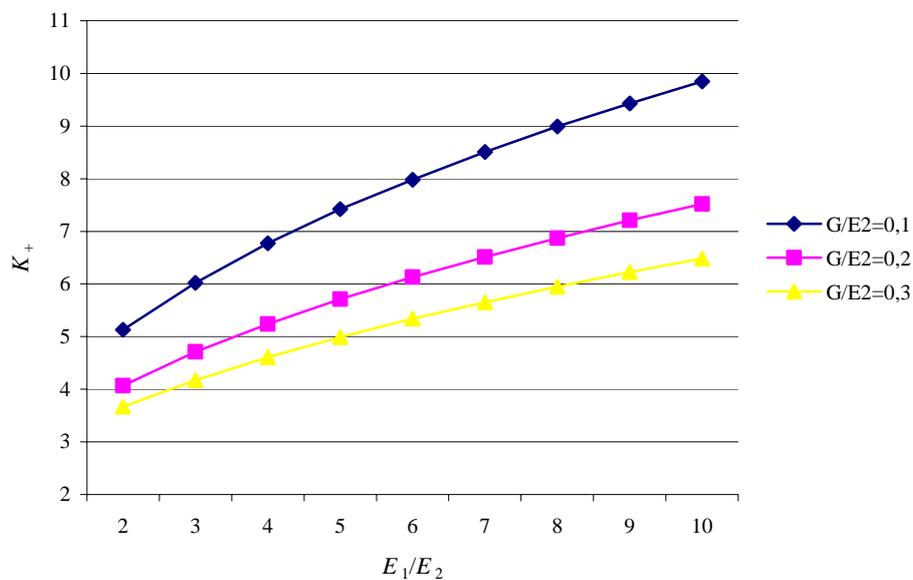


Figura 10:  $K_+$  versus  $E_1/E_2$  para una orientación de los ejes de elasticidad de  $22,5^\circ$ , caso  $N_x=N_y=N_{xy}$ .

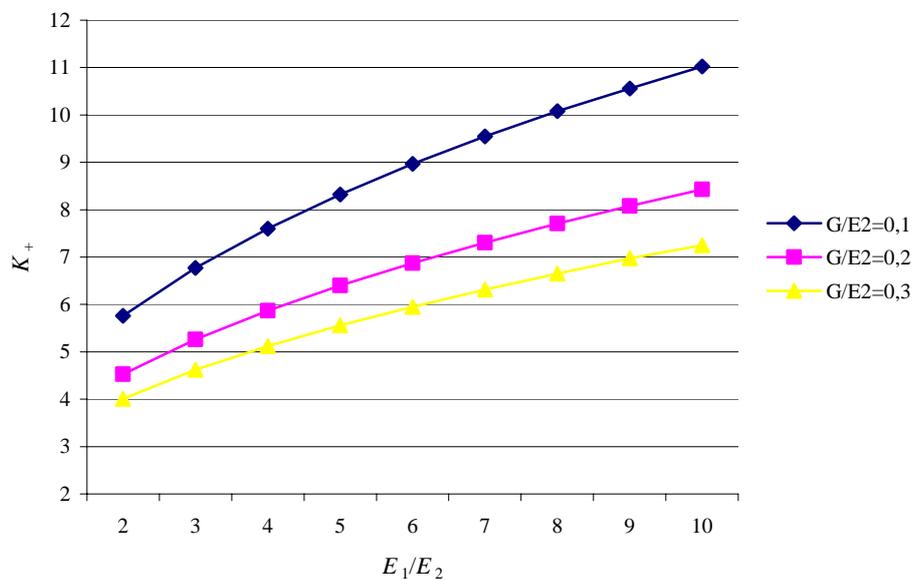


Figura 11:  $K_+$  versus  $E_1/E_2$  para una orientación de los ejes de elasticidad de  $45^\circ$ , caso  $N_x=N_y=N_{xy}$ .

		$G/E_2 = 0,1$		$\nu_1 = 0,3$	
$E_1/E_2$	$\theta^\circ$	$K_+$	$\beta_1$	$K_-$	$\beta_2$
2	-45,00	4,12	135,00	0,47	56,70
	-22,50	3,75	153,90	-0,30	46,80
	0,00	3,49	97,20	-0,40	58,50
	22,50	4,80	116,10	-0,14	59,40
	45,00	5,28	135,00	0,50	74,70
3	-45,00	4,13	135,00	0,48	59,40
	-22,50	3,77	153,90	-0,42	50,40
	0,00	4,06	95,40	-0,53	64,80
	22,50	5,61	115,20	-0,17	66,60
	45,00	6,18	135,00	0,47	80,10
4	-45,00	4,13	135,00	0,47	60,30
	-22,50	3,78	153,90	-0,55	52,20
	0,00	4,54	95,40	-0,65	68,40
	22,50	6,28	115,20	-0,20	75,60
	45,00	6,94	135,00	0,44	82,80
5	-45,00	4,14	135,00	0,47	60,30
	-22,50	3,79	153,90	-0,65	53,10
	0,00	4,95	95,40	-0,78	71,10
	22,50	6,87	115,20	-0,25	82,80
	45,00	7,57	135,00	0,42	84,60
6	-45,00	4,14	135,00	0,47	60,30
	-22,50	3,79	153,90	-0,76	54,00
	0,00	5,32	94,50	-0,91	72,00
	22,50	7,39	115,20	-0,32	86,40
	45,00	8,16	135,00	0,40	86,40
7	-45,00	4,15	135,00	0,47	61,20
	-22,50	3,81	153,90	-0,85	54,00
	0,00	5,66	94,50	-1,02	72,90
	22,50	7,85	115,20	-0,39	89,10
	45,00	8,66	135,00	0,39	88,20
8	-45,00	4,15	135,00	0,47	61,20
	-22,50	3,81	153,90	-0,94	54,90
	0,00	5,97	94,50	-1,13	73,80
	22,50	8,30	114,30	-0,47	90,90
	45,00	9,15	135,00	0,38	90,00
9	-45,00	4,15	135,00	0,47	61,20
	-22,50	3,81	153,90	-1,02	54,90
	0,00	6,25	94,50	-1,23	73,80
	22,50	8,70	114,30	-0,55	91,80
	45,00	9,58	135,00	0,37	90,90
10	-45,00	4,15	135,00	0,47	61,20
	-22,50	3,81	153,90	-1,09	54,90
	0,00	6,51	94,50	-1,34	74,70
	22,50	9,08	114,30	-0,62	92,70
	45,00	9,99	135,00	0,36	92,70

Tabla 5: Resultados numéricos para  $N_x = N_y = \frac{N_{xy}}{2}$ .

		$G/E_2 = 0,2$		$\nu_1 = 0,3$	
$E_1/E_2$	$\theta^\circ$	$K_+$	$\beta_1$	$K_-$	$\beta_2$
2	-45,00	3,25	135,00	0,08	45,00
	-22,50	2,99	150,30	-0,20	47,70
	0,00	2,75	101,70	-0,26	54,90
	22,50	3,69	117,90	-0,02	58,50
	45,00	4,06	135,00	0,44	45,00
3	-45,00	3,26	135,00	0,01	45,00
	-22,50	2,99	151,20	-0,34	50,40
	0,00	3,09	99,00	-0,35	60,30
	22,50	4,24	117,00	-0,04	64,80
	45,00	4,67	135,00	0,54	66,60
4	-45,00	3,26	135,00	-0,06	45,00
	-22,50	2,99	151,20	-0,44	52,20
	0,00	3,39	98,10	-0,44	64,80
	22,50	4,70	116,10	-0,06	69,30
	45,00	5,20	135,00	0,54	73,80
5	-45,00	3,27	135,00	-0,12	45,00
	-22,50	2,99	151,20	-0,55	54,00
	0,00	3,67	97,20	-0,53	67,50
	22,50	5,10	116,10	-0,09	72,90
	45,00	5,65	135,00	0,54	77,40
6	-45,00	3,27	135,00	-0,17	45,00
	-22,50	2,99	152,10	-0,64	54,00
	0,00	3,91	97,20	-0,61	69,30
	22,50	5,47	116,10	-0,13	76,50
	45,00	6,05	135,00	0,52	80,10
7	-45,00	3,27	135,00	-0,22	45,00
	-22,50	2,99	152,10	-0,73	54,90
	0,00	4,13	96,30	-0,70	70,20
	22,50	5,80	116,10	-0,16	80,10
	45,00	6,43	135,00	0,52	81,90
8	-45,00	3,27	135,00	-0,26	45,00
	-22,50	2,99	152,10	-0,80	55,80
	0,00	4,35	96,30	-0,78	71,10
	22,50	6,10	115,20	-0,19	82,80
	45,00	6,77	135,00	0,51	83,70
9	-45,00	3,27	135,00	-0,31	45,00
	-22,50	2,99	152,10	-0,87	55,80
	0,00	4,54	96,30	-0,85	72,00
	22,50	6,40	115,20	-0,23	84,60
	45,00	7,08	135,00	0,50	84,60
10	-45,00	3,27	135,00	-0,35	45,00
	-22,50	2,99	152,10	-0,96	56,70
	0,00	4,72	96,30	-0,93	72,90
	22,50	6,66	115,20	-0,26	86,40
	45,00	7,38	135,00	0,50	86,40

Tabla 6: Resultados numéricos para  $N_x = N_y = \frac{N_{xy}}{2}$ .

		$G/E_2 = 0,3$		$\nu_1 = 0,3$	
$E_1/E_2$	$\theta^\circ$	$K_+$	$\beta_1$	$K_-$	$\beta_2$
2	-45,00	2,89	135,00	-0,09	45,00
	-22,50	2,69	146,70	-0,19	48,60
	0,00	2,56	108,90	-0,17	54,00
	22,50	3,26	120,60	-0,01	63,00
	45,00	3,53	135,00	0,33	45,00
3	-45,00	2,89	135,00	-0,21	45,00
	-22,50	2,68	147,60	-0,33	51,30
	0,00	2,78	103,50	-0,26	59,40
	22,50	3,68	118,80	-0,01	69,30
	45,00	4,04	135,00	0,44	45,00
4	-45,00	2,89	135,00	-0,32	45,00
	-22,50	2,68	148,50	-0,44	53,10
	0,00	2,99	101,70	-0,35	63,00
	22,50	4,04	117,90	-0,02	72,90
	45,00	4,45	135,00	0,52	45,00
5	-45,00	2,89	135,00	-0,40	45,00
	-22,50	2,67	148,50	-0,55	54,90
	0,00	3,19	99,90	-0,42	65,70
	22,50	4,36	117,00	-0,04	74,70
	45,00	4,81	135,00	0,55	65,70
6	-45,00	2,89	135,00	-0,48	45,00
	-22,50	2,67	149,40	-0,64	54,90
	0,00	3,37	99,90	-0,50	67,50
	22,50	4,65	117,00	-0,05	77,40
	45,00	5,13	135,00	0,56	71,10
7	-45,00	2,88	135,00	-0,56	45,00
	-22,50	2,66	149,40	-0,73	55,80
	0,00	3,55	99,00	-0,57	69,30
	22,50	4,90	117,00	-0,06	79,20
	45,00	5,43	135,00	0,56	74,70
8	-45,00	2,88	135,00	-0,62	45,00
	-22,50	2,66	149,40	-0,81	56,70
	0,00	3,70	98,10	-0,64	70,20
	22,50	5,15	116,10	-0,08	78,30
	45,00	5,70	135,00	0,56	76,50
9	-45,00	2,88	135,00	-0,70	45,00
	-22,50	2,66	149,40	-0,90	56,70
	0,00	3,86	98,10	-0,71	71,10
	22,50	5,39	116,10	-0,12	81,00
	45,00	5,96	135,00	0,56	78,30
10	-45,00	2,88	135,00	-0,75	45,00
	-22,50	2,66	149,40	-0,96	57,60
	0,00	4,00	98,10	-0,77	72,00
	22,50	5,60	116,10	-0,14	81,90
	45,00	6,20	135,00	0,55	81,00

Tabla 7: Resultados numéricos para  $N_x = N_y = \frac{N_{xy}}{2}$ .

$E_1/E_2$	$\theta^\circ$	$G/E_2 = 0,1$		$\nu_1 = 0,3$	
		$K_+$	$\beta_1$	$K_-$	$\beta_2$
2	-45,00	4,60	135,00	-3,35	45,00
	-22,50	4,08	150,30	-3,07	58,50
	0,00	3,69	102,60	-2,18	71,10
	22,50	5,52	117,90	-2,04	36,00
	45,00	6,24	135,00	-2,17	45,00
3	-45,00	4,52	135,00	-4,01	45,00
	-22,50	4,01	150,30	-3,67	60,30
	0,00	4,31	100,80	-2,58	74,70
	22,50	6,50	117,00	-1,93	36,00
	45,00	7,35	135,00	-2,02	45,00
4	-45,00	4,48	135,00	-4,54	45,00
	-22,50	3,95	150,30	-4,18	60,30
	0,00	4,85	99,90	-2,96	75,60
	22,50	7,32	117,00	-1,87	36,00
	45,00	8,26	135,00	-1,95	45,00
5	-45,00	4,45	135,00	-5,01	45,00
	-22,50	3,93	150,30	-4,62	61,20
	0,00	5,33	99,00	-3,30	7,40
	22,50	8,02	116,10	-1,82	36,90
	45,00	9,07	135,00	-1,89	45,00
6	-45,00	4,42	135,00	-5,43	45,00
	-22,50	3,90	152,10	-5,02	61,20
	0,00	5,74	98,10	-3,60	77,40
	22,50	8,66	116,10	-1,78	36,90
	45,00	9,78	135,00	-1,84	45,00
7	-45,00	4,41	135,00	-5,81	45,00
	-22,50	3,89	151,20	-5,38	61,20
	0,00	6,13	98,10	-3,88	78,30
	22,50	9,24	116,10	-1,76	36,90
	45,00	10,42	135,00	-1,81	45,00
8	-45,00	4,39	135,00	-6,15	45,00
	-22,50	3,88	151,20	-5,69	61,20
	0,00	6,48	98,10	-4,13	78,30
	22,50	9,77	116,10	-1,86	94,50
	45,00	11,00	135,00	-1,78	45,00
9	-45,00	4,37	135,00	-6,47	45,00
	-22,50	3,87	151,20	-6,00	62,10
	0,00	6,81	98,10	-4,36	78,30
	22,50	10,26	116,10	-2,00	94,50
	45,00	11,54	135,00	-1,76	45,00
10	-45,00	4,36	135,00	-6,76	45,00
	-22,50	3,86	151,20	-6,27	62,10
	0,00	7,09	97,20	-4,60	79,20
	22,50	10,71	116,10	-2,14	84,60
	45,00	12,05	135,00	-1,74	45,00

Tabla 8: Resultados numéricos para  $N_x = N_y = 2N_{xy}$ .

		$G/E_2 = 0,2$		$\nu_1 = 0,3$	
$E_1/E_2$	$\theta^\circ$	$K_+$	$\beta_1$	$K_-$	$\beta_2$
2	-45,00	3,73	135,00	-2,94	45,00
	-22,50	3,38	145,80	-2,69	56,70
	0,00	3,21	108,90	-2,01	63,90
	22,50	4,49	120,60	-1,82	41,40
	45,00	5,01	135,00	-1,88	45,00
3	-45,00	3,65	135,00	-3,50	45,00
	-22,50	3,30	146,70	-3,17	58,50
	0,00	3,60	105,30	-2,27	69,30
	22,50	5,21	118,80	-1,70	42,30
	45,00	5,84	135,00	-1,74	45,00
4	-45,00	3,60	135,00	-3,97	45,00
	-22,50	3,25	146,70	-3,60	59,40
	0,00	3,97	102,60	-2,52	72,00
	22,50	5,82	117,90	-1,63	43,20
	45,00	6,54	135,00	-1,64	45,00
5	-45,00	3,56	135,00	-4,39	45,00
	-22,50	3,20	146,70	-3,96	60,30
	0,00	4,31	101,70	-2,76	73,80
	22,50	6,35	117,90	-1,59	43,20
	45,00	7,15	135,00	-1,59	45,00
6	-45,00	3,54	135,00	-4,75	45,00
	-22,50	3,17	146,70	-4,31	60,30
	0,00	4,62	100,80	-2,99	75,60
	22,50	6,83	117,90	-1,74	44,10
	45,00	7,69	135,00	-1,54	45,00
7	-45,00	3,52	135,00	-5,09	45,00
	-22,50	3,15	146,70	-4,62	61,20
	0,00	4,90	100,80	-3,21	76,50
	22,50	7,27	117,00	-1,53	45,00
	45,00	8,19	135,00	-1,52	45,00
8	-45,00	3,50	135,00	-5,41	45,00
	-22,50	3,14	146,70	-4,90	61,20
	0,00	5,18	99,90	-3,43	76,50
	22,50	7,68	117,00	-1,51	45,00
	45,00	8,65	135,00	-1,49	45,00
9	-45,00	3,49	135,00	-5,69	45,00
	-22,50	3,12	147,60	-5,18	61,20
	0,00	5,43	99,90	-3,62	77,40
	22,50	8,07	117,00	-1,56	89,10
	45,00	9,08	135,00	-1,47	45,00
10	-45,00	3,48	135,00	-5,97	45,00
	-22,50	3,11	147,60	-5,43	61,20
	0,00	5,67	99,00	-3,81	77,40
	22,50	8,43	117,00	-1,64	90,90
	45,00	9,48	135,00	-1,44	45,00

Tabla 9: Resultados numéricos para  $N_x = N_y = 2N_{xy}$

		$G/E_2 = 0,3$		$\nu_1 = 0,3$	
$E_1/E_2$	$\theta^\circ$	$K_+$	$\beta_1$	$K_-$	$\beta_2$
2	-45,00	3,36	135,00	-2,76	45,00
	-22,50	3,14	141,30	-2,55	54,90
	0,00	3,19	116,10	-2,02	58,50
	22,50	4,09	123,30	-1,76	45,90
	45,00	4,49	135,00	-1,75	45,00
3	-45,00	3,27	135,00	-3,29	45,00
	-22,50	3,04	141,30	-2,98	56,70
	0,00	3,43	109,80	-2,20	65,70
	22,50	4,69	120,60	-1,64	47,70
	45,00	5,20	135,00	-1,61	45,00
4	-45,00	3,21	135,00	-3,73	45,00
	-22,50	2,97	142,20	-3,36	58,50
	0,00	3,70	106,20	-2,39	69,30
	22,50	5,20	119,70	-1,58	49,50
	45,00	5,79	135,00	-1,52	45,00
5	-45,00	3,18	135,00	-4,11	45,00
	-22,50	2,93	142,20	-3,70	59,40
	0,00	3,96	104,40	-2,59	72,00
	22,50	5,64	118,80	-1,54	51,30
	45,00	6,31	135,00	-1,47	45,00
6	-45,00	3,16	135,00	-4,45	45,00
	-22,50	2,90	142,20	-4,01	59,40
	0,00	4,22	103,50	-2,78	72,90
	22,50	6,05	118,80	-1,51	53,10
	45,00	6,78	135,00	-1,41	45,00
7	-45,00	3,14	135,00	-4,78	45,00
	-22,50	2,88	142,20	-4,29	60,30
	0,00	4,44	102,60	-2,96	74,70
	22,50	6,43	117,90	-1,49	54,90
	45,00	7,20	135,00	-1,39	45,00
8	-45,00	3,12	135,00	-5,06	45,00
	-22,50	2,86	142,20	-4,55	60,30
	0,00	4,67	101,70	-3,14	75,60
	22,50	6,78	117,90	-1,64	76,50
	45,00	7,60	135,00	-1,36	45,00
9	-45,00	3,10	135,00	-5,33	45,00
	-22,50	2,84	143,10	-4,80	61,20
	0,00	4,87	101,70	-3,32	75,60
	22,50	7,10	117,90	-1,51	82,80
	45,00	7,97	135,00	-1,34	45,00
10	-45,00	3,09	135,00	-5,59	45,00
	-22,50	2,82	143,10	-5,04	61,20
	0,00	5,08	100,80	-3,48	76,50
	22,50	7,40	117,90	-1,55	85,50
	45,00	8,31	135,00	-1,31	45,00

Tabla 10: Resultados numéricos para

### Solución de Lekhnitskii:

Cuando los ejes de elasticidad coinciden con los ejes coordenados ( $\theta = 0$ ), la expresión de la tensión normal tangencial al contorno es la siguiente:

$$\sigma_{\alpha} = -\tau \frac{E_{\alpha}}{2E_1} (1+k+n)n \operatorname{sen}(2\alpha) \quad (1)$$

donde:

$\tau = \frac{N_{xy}}{h}$  es el valor de la tensión tangencial aplicada.

$$k = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \quad (2)$$

$$n = \sqrt{2\left(\frac{E_1}{E_2} - \nu_1\right) + \frac{E_1}{G}} \quad (3)$$

$\alpha$ , es el ángulo polar medido desde el semieje "x" positivo en sentido antihorario;  
 $E_{\alpha}$  es el módulo de Young en la dirección tangente al borde del orificio.

En función de las constantes elásticas en las direcciones principales se puede expresar  $E_{\alpha}$  como:

$$E_{\alpha} = \left[ \frac{\operatorname{sen}^4(\alpha)}{E_1} + \left( \frac{1}{G} - \frac{2\nu_1}{E_1} \right) \operatorname{sen}^2(\alpha) \cos^2(\alpha) + \frac{\cos^4(\alpha)}{E_2} \right]^{-1} \quad (4)$$

Para un material ortótropo con valores de las constantes elásticas:

$$E_1 = 1,2 \cdot 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$E_2 = 0,6 \cdot 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$G = 0,07 \cdot 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$\nu_1 = 0,071$$

Utilizando la ecuación (1) y calculando el valor de  $K_+ = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n}$  con  $\sigma_n = \frac{N_{xy}}{h}$  se obtuvo el valor:

$$K_+ = 4,13$$

Mientras que calculando con el modelo de elementos finitos construido para este trabajo, se determinó prácticamente el mismo valor del factor SCF:  $K_+ = 4,14$ .

## 5 DISCUSION DE RESULTADOS.

De las tablas y gráficos precedentes se desprende la marcada influencia que tienen las relaciones entre las constantes elásticas y el factor de concentración de tensiones.

Si bien es difícil establecer parámetros de comportamiento para este tipo de materiales, la variedad de casos resueltos permite extraer algunas conclusiones:

En general puede observarse que la magnitud del factor se incrementa con valores crecientes de  $E_1/E_2$  y decrece a medida que crece  $G/E_2$ .

En cuanto a la relación de las direcciones principales de elasticidad con las direcciones coordenadas de carga, se concluye que los valores máximos se dan cuando  $\theta = 45^\circ$  y generalmente en una ubicación  $\beta_1 = 135^\circ$  sobre el contorno del orificio.

Un hecho de interés que merece ser puntualizado es la aparición de tensiones de compresión por acción de los esfuerzos de corte.

En particular en el caso “b”,  $N_x = N_y = N_{xy}/2$ , ocurre que algunas de las tensiones máximas son de compresión, es decir existe una inversión en el signo de las tensiones máximas con respecto a los esfuerzos axiales en el plano. Esto reviste importancia en la estabilidad del equilibrio de placas delgadas.

## 6 AGRADECIMIENTOS.

El presente trabajo ha sido auspiciado por la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur, por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) y por la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (ANPCYT).

## REFERENCIAS

- ALGOR12, *Professional Mech/VE*, Algor Inc., Pittsburg, PA. EE. UU., 2001.
- Bambill D. V., Susca A., Laura P. A. A., Maiz S., Concentración de tensiones en placa ortótropa sometida a esfuerzo biaxial, *Mecánica Computacional*, Vol. XXIV:1093-1103, 2005.
- Domínguez P. N., Santos R. D., Robles S. I., Ortega N. F., Concentración de tensiones en piezas de materiales compuestos, *Mecánica Computacional*, Vol. XXV:537-548, 2006.
- Kyung-Ho Park y Yong-Jin Kim. Analytical solution for a circular opening in an elastic-brittle-plastic rock. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*,43:616-622, 2006.
- Laura P. A. A., Maurizi M. J., *Introducción a la mecánica de sólidos*, EUDEBA, Buenos Aires, 1979.
- Lekhnitskii S. G., *Anisotropic Plates*, Gordon and Breach Publishers, New York, 1968.
- Maiz S., Rossi R. E. , Laura P. A. A., Bambill D. V., Efectos de la ortotropía sobre el factor de concentración de tensiones: extensión del problema de Kirsch, *Mecánica Computacional*, Vol. XXIII:673-692, 2004.
- Susca A., Bambill D. V., Laura P. A. A., Rossi Raúl E., Factor de concentración de tensiones en el entorno de un orificio rectangular presente en una placa ortótropa, *Mecánica Computacional*, Vol. XXV: 411-427, 2006.
- Timoshenko S., Goodier J. N., *Theory of elasticity*, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York, N. Y.,1951.
- Troyani N., Sterlacci G., Gomes C., Simultaneous considerations of length and boundary conditions on theoretical stress concentration factors, *International journal of fatigue*, 25:353-355, 2003.
- Ukadgaonker V. G. y Rao D. K. N., A general solution for stress around holes in symmetric laminated under in plane loading. *Composite Structures*, 49:339-354, 2000.