

VALIDACIÓN COMPUTACIONAL DE MODELOS DE VIGAS DE MATERIALES COMPUESTOS CON SECCIONES DE PAREDES DELGADAS

Carlos A. Vera^a, Marcelo T. Piovan^{a,b}, y Víctor H. Cortínez^{a,b}

^aCentro de Investigaciones de Mecánica Teórica y Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional FRBB, 11 de Abril 461, B8000LMI, Bahía Blanca, Argentina, cvera@frbb.utn.edu.ar, mpiovan@frbb.utn.edu.ar, vcortine@frbb.utn.edu.ar, <http://www.frbb.utn.edu.ar>

^bCONICET, Argentina

Palabras Clave: vigas de paredes delgadas. Materiales compuestos.

Resumen. Diferentes tipos de estructuras esbeltas construidas con materiales compuestos reforzados por fibras se utilizan con mayor frecuencia en diferentes áreas de ingeniería, especialmente en las construcciones aerospaciales, mecánicas y civiles, debido a que exhiben excelentes propiedades de resistencia frente a su bajo peso, alta resistencia a la corrosión y baja expansión térmica entre otras. Entre los diferentes modelos estructurales, las teorías de vigas de paredes delgadas se presentan como una alternativa atractiva de análisis, pues permiten modelar muchos de los efectos no convencionales presentes en la mecánica de los materiales compuestos bajo la forma de un sistema de ecuaciones diferenciales relativamente sencillo. Existen varios aspectos que se pueden contemplar en un modelo unidimensional de vigas de paredes delgadas para representar con mayor detalle la mecánica de tales estructuras. Entre los más relevantes aspectos están la flexibilidad por corte y efectos de flexibilidad localizados tal como la deformabilidad en la misma sección.

El objetivo de este trabajo reside en efectuar una validación computacional de varios modelos unidimensionales de vigas de paredes delgadas construidas con materiales compuestos desarrollados por los autores. Se cotejarán las respuestas dinámicas de tres modelos unidimensionales con modelos computacionales de mayor jerarquía en dos o tres dimensiones. Para tal cometido se emplea el software comercial de elementos finitos Abaqus. Se establecen rangos paramétricos donde la respuesta de los modelos unidimensionales es tan buena como la de sus contrapartes de mayor jerarquía pero mayor costo de cálculo.

1 INTRODUCCION

Diferentes tipos de estructuras esbeltas construidas con materiales compuestos reforzados por fibras se utilizan con mayor frecuencia en diferentes áreas de ingeniería, especialmente en las ingeniarías aeroespacial, mecánica y civil, debido a que exhiben excelentes propiedades de resistencia frente a su bajo peso, alta resistencia a la corrosión y baja expansión térmica entre otras (Barbero, 1998). Entre los diferentes modelos estructurales, las teorías de vigas de paredes delgadas se presentan como una alternativa atractiva de análisis, pues permiten modelar muchos de los efectos no convencionales presentes en la mecánica de los materiales compuestos bajo la forma de un sistema de ecuaciones diferenciales relativamente sencillo.

La teoría de Vlasov (Vlasov, 1961) se ha utilizado satisfactoriamente en varias aplicaciones para el análisis de vigas de paredes delgadas construidas con materiales isotrópos. Bauld y Tzeng (1984) desarrollaron una extensión de la teoría de Vlasov para vigas construidas con materiales compuestos reforzados por fibras vidrio. Ghorbanpoor y Omidvar (1996) propusieron una forma aproximada simple para esta última teoría. Recientemente, Massa y Barbero (1998) desarrollaron un modelo para el análisis estático de vigas compuestas de paredes delgadas a partir de un enfoque de resistencia de materiales. Sin embargo los artículos mencionados no consideran la influencia del efecto de flexibilidad por corte en la dinámica de estos miembros. Este efecto puede revestir mucha importancia para predecir el comportamiento dinámico de las vigas compuestas de paredes delgadas. Song y Librescu (1993) desarrollaron un modelo teórico para vibraciones de vigas compuestas de paredes delgadas con secciones cerradas, que incorpora el efecto de corte debido a flexión solamente, además de considerar el alabeo secundario en adición al primario.

Recientemente, los autores (Piovan y Cortínez, 2007) han propuesto un modelo teórico para el análisis dinámico de vigas compuestas de paredes delgadas con secciones tanto abiertas como cerradas. Esta teoría incluye el efecto de la flexibilidad por corte en forma completa (es decir debido tanto a flexión como al alabeo no uniforme). Los valores numéricos obtenidos indican la importancia sustancial que tiene la inclusión de la flexibilidad por corte en ciertas situaciones. Este modelo es general en tanto que permite el análisis dinámico para vigas con secciones arbitrarias, aun cuando tales secciones son consideradas indeformables en su plano. Por otro lado los autores (Vera et al, 2006) desarrollan un modelo de vigas de paredes delgadas compuestas laminadas que contempla la flexibilidad por corte así como la deformabilidad en el plano de la sección aunque restringido a un perfil seccional H.

Si bien en varios trabajos se muestran las bondades de las formulaciones de vigas de paredes delgadas (Piovan y Cortínez, 2007; Vera et al., 2006; Kim et al., 2006), a conocimiento de los autores todavía no se ha hecho un estudio exhaustivo de los alcances y del dominio de utilidad de modelos unidimensionales de vigas de paredes delgadas, especialmente cuando se coteja su respuesta con modelos computacionales de mayor jerarquía como los son los modelos bidimensionales o tridimensionales de elementos finitos. Este es un aspecto no de importancia marginal debido a que los modelos unidimensionales de vigas de paredes delgadas ofrecen ventajas en su implementación y ejecución temporal frente a las contrapartes bidimensionales o tridimensionales, lo cual es fundamental cuando se deben acoplar esquemas de optimización o identificación de fisuras y/o fallas en los modelos estructurales de tales características.

En este trabajo se efectúa una validación computacional exhaustiva de modelos unidimensionales de vigas de paredes delgadas construidas con materiales compuestos laminados. Se comparan las respuestas dinámicas de vibraciones libres de los modelos unidimensionales con y sin flexibilidad seccional frente a los valores obtenidos con modelos de elementos finitos bidimensionales (Shell) calculados en el programa comercial Abaqus. Se

determinan los dominios paramétricos de relaciones geométricas y tipos de laminación donde la respuesta de los modelos unidimensionales es aceptable en relación al/los modelos computacionales de mayor jerarquía.

2 DESCRIPCIÓN DE LOS MODELOS UNIDIMENSIONALES

En este apartado se describen dos modelos unidimensionales de vigas de paredes delgadas. Ambos modelos originalmente fueron desarrollados para calcular diferentes aspectos de dinámica y de estática de estructuras esbeltas de materiales compuestos (ver Piovan y Cortínez, 2007; Vera et al., 2006), sin embargo en el presente trabajo son reducidos para tratar el caso específico de vibraciones libres de una viga con sección H. En la Figura 1 se puede ver la estructura analizada, la cual es común a los dos modelos unidimensionales.

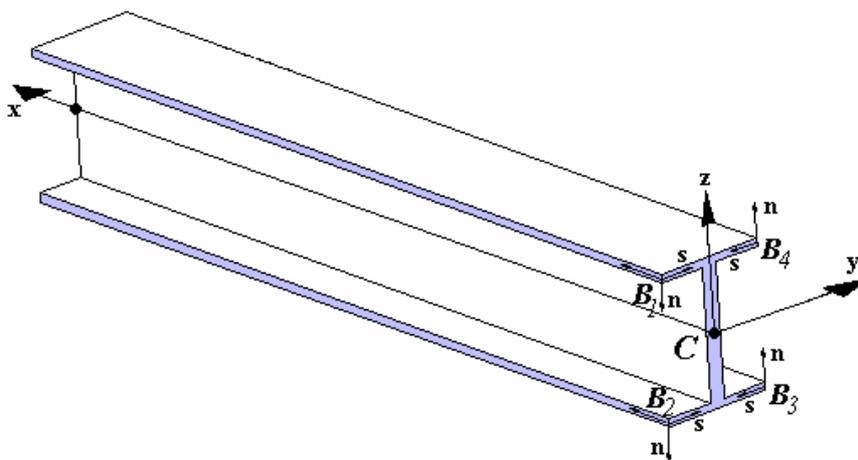


Figura 1: Viga con sección H

Los modelos unidimensionales reducidos a continuación se describen a partir de sus formulaciones variacionales y su implementación con el método de elementos finitos que corresponde a cada caso. La descripción de cada modelo es sucinta solo a efectos ilustrativos, mientras que el desarrollo y deducción de los mismos puede seguirse en las referencias correspondientes a cada caso (Piovan y Cortínez, 2007; Vera et al. 2006).

2.1 Breve descripción del modelo con sección no deformable

Este modelo fue desarrollado por los autores (Piovan y Cortínez, 2007) contemplando flexibilidad por corte completa, es decir la debida a flexión y la debida al alabeo por torsión no uniforme. El modelo original de vigas de paredes delgadas es más general y se desarrolló para poder calcular problemas de dinámica con o sin tensiones iniciales, estática e inestabilidad entre otros. En este trabajo se hace una reducción del caso general para lo cual se recurre a las siguientes hipótesis:

- La sección se considera indeformable en su propio plano. La sección es simétrica con perfil H.
- La viga posee dos clases de sistemas de referencia, uno global ($C:x,y,z$) ubicado en el centro geométrico C de la sección y otro local ($B_j:x,y,z$) ubicado en la línea media del espesor de la pared (según se ve en la Figura 1). Por el tipo de perfil seccional considerado se deben emplear más de un sistema de referencia local (Gjelsvik, 1981).
- La función de alabeo se define con respecto al centro geométrico C y supone formada por dos aportes: alabeo primario y alabeo secundario (o en el espesor).
- Cada segmento seccional se supone compuesto por laminados generales y la densidad

- es la misma para cada lámina de material compuesto.
- e) El modelo constitutivo de los laminados se deduce a partir de considerar no influyentes los aportes de las resultantes de tensión normal en la dirección de la línea media del espesor de pared (es decir $N_{SS}=0$ y $M_{SS}=0$).
- f) Se desprecian efectos de amortiguamiento estructural.

El principio de trabajo virtual para el modelo contemplando solamente el trabajo virtual de las deformaciones internas y de las fuerzas inerciales se puede escribir de la siguiente manera (Piovan y Cortínez, 2007; Piovan, 2003):

$$\begin{aligned}
& \int_L (Q_X \delta u'_{xc} - M_Y \delta \theta'_y - M_Z \delta \theta'_z - B \delta \theta'_x + T_{SV} \delta \phi'_x) dx + \\
& + \int_L [Q_Y \delta (u'_{yc} - \theta_z) + Q_Z \delta (u'_{zc} - \theta_y) + T_W \delta (\phi'_x - \theta'_x)] dx + \\
& + \int_L [\bar{M}_1 \delta u_{xc} + \bar{M}_2 \delta u_{yc} + \bar{M}_3 \delta \theta_z] dx + \\
& + \int_L [\bar{M}_4 \delta u_{zc} + \bar{M}_5 \delta \theta_y + \bar{M}_6 \delta \phi_x + \bar{M}_7 \delta \theta_x] dx = 0
\end{aligned} \tag{1}$$

Donde Q_X es la fuerza normal, M_Y y M_Z son los momentos flectores, Q_Y y Q_Z son fuerzas cortantes, B es el Bimomento, T_{SV} es el momento torsor por torsión pura y T_W es el momento de flexo-torsión. Por otro lado, u_{xc} es el desplazamiento axial del centro de referencia, u_{yc} y u_{zc} son los desplazamientos laterales, θ_y y θ_z son las rotaciones flexionales, ϕ_x es la rotación torsional y θ_x es una magnitud de alabeo. Los apóstrofes corresponden a derivación con respecto a la variable espacial x . Las \bar{M}_j , $j = 1, \dots, 7$ son fuerzas inerciales.

Las fuerzas internas y las fuerzas inerciales vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\begin{Bmatrix} Q_X \\ M_Y \\ M_Z \\ B \\ Q_Y \\ Q_Z \\ T_W \\ T_{SV} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^{11} & J_{12}^{11} & J_{13}^{11} & J_{14}^{11} & J_{15}^{16} & J_{16}^{16} & J_{17}^{16} & J_{18}^{16} \\ & J_{22}^{11} & J_{23}^{11} & J_{24}^{11} & J_{25}^{16} & J_{26}^{16} & J_{27}^{16} & J_{28}^{16} \\ & & J_{33}^{11} & J_{34}^{11} & J_{35}^{16} & J_{36}^{16} & J_{37}^{16} & J_{38}^{16} \\ & & & J_{44}^{11} & J_{45}^{16} & J_{46}^{16} & J_{47}^{16} & J_{48}^{16} \\ & & & & J_{55}^{66} & J_{56}^{66} & J_{57}^{66} & J_{58}^{66} \\ & & & & & J_{66}^{66} & J_{67}^{66} & J_{68}^{66} \\ & & & & & & J_{77}^{66} & J_{78}^{66} \\ & & & & & & & J_{88}^{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_{xc} \\ -\theta'_y \\ -\theta'_z \\ -\theta'_x \\ u'_{yc} - \theta_z \\ u'_{zc} - \theta_y \\ \phi'_x - \theta_x \\ \phi'_x \end{Bmatrix} \tag{2}$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \\ \bar{M}_3 \\ \bar{M}_4 \\ \bar{M}_5 \\ \bar{M}_6 \\ \bar{M}_7 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & J_{11}^p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & J_{33}^p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & J_{11}^p & 0 & 0 & 0 \\ & & & & J_{22}^p & 0 & 0 \\ & & & & & J_{22}^p + J_{33}^p & 0 \\ & & & & & & J_{44}^p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{xc} \\ \ddot{u}_{yc} \\ \ddot{\theta}_z \\ \ddot{u}_{zc} \\ \ddot{\theta}_y \\ \ddot{\phi}_x \\ \ddot{\theta}_x \end{Bmatrix} \tag{3}$$

Siendo:

$$J_{ij}^{kh} = \int_{S_p} [\bar{A}_{kh} (\bar{g}_i^{(a)} \bar{g}_j^{(a)}) + \bar{B}_{kh} (\bar{g}_i^{(a)} \bar{g}_j^{(c)} + \bar{g}_i^{(c)} \bar{g}_j^{(a)}) + \bar{D}_{kh} (\bar{g}_i^{(c)} \bar{g}_j^{(c)})] ds \tag{4}$$

$$J_{ij}^p = \int_{A_s} \rho \bar{g}_i^{(d)} \bar{g}_j^{(d)} ds dn$$

Donde, \bar{A}_{ij} , \bar{B}_{ij} y \bar{D}_{ij} son constantes elásticas modificadas (Piovan y Cortínez, 2007), en tanto que los vectores $\bar{g}^{(*)}$ vienen dados por:

$$\begin{aligned} \bar{g}^{(a)} &= \left\{ 1, Z(s), Y(s), \omega_p, \frac{dY}{ds}, \frac{dZ}{ds}, r(s) + \psi(s), \psi(s) \right\} \\ \bar{g}^{(c)} &= \left\{ 0, \frac{dY}{ds}, -\frac{dZ}{ds}, l(s), 0, 0, l, -2 \right\}, \quad \bar{g}^{(d)} = \left\{ 1, Z(s) + n \frac{dY}{ds}, Y(s) - n \frac{dZ}{ds}, \omega(s) \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

En la expresión (5), ω_p es la función de alabeo primario, mientras que $r(s)$, $l(s)$ y $\psi(s)$ son funciones características de la sección (Piovan y Cortínez, 2007). En el caso de la sección H, $\psi(s) = 0$ y $\omega_p = -Y Z$ (Vlasov, 1961). En la expresión (3) los puntos sobre las variables implican derivadas con respecto al tiempo. En la expresión (4) los dominios de integración S_p y A_s corresponden al perímetro de la línea media del espesor de pared y al área seccional respectivamente.

Para resolver el problema de vibraciones libres se emplea en (1) una discretización basada en el método de elementos finitos. Para ello se emplea un elemento finito desarrollado previamente por los autores (Piovan et al., 2001) que posee dos nodos y siete grados de libertad en cada nodo. El elemento posee integración consistente de los aportes asociados con la energía de deformación por corte. De manera que si se impone un movimiento armónico para cada variable cinemática y operando en la forma convencional se obtiene la siguiente expresión para hallar los autovalores:

$$([K] - \Omega^2 [M])\{Q\} = \{0\} \quad (6)$$

Donde $[K]$ es la matriz global de rigidez, $[M]$ es la matriz global de masa, $\{Q\}$ es el vector global de variables nodales, $\Omega = 2 \pi f$, siendo f la frecuencia medida en Hertz.

2.2 Breve descripción del modelo con deformabilidad del alma

En este modelo, la viga es constituida por el ensamble de tres placas laminadas según se puede apreciar en la Figura 2. La construcción del modelo básicamente supone compatibilizar los desplazamientos de las alas en la conexión con el alma de la sección siguiendo el patrón de la Figura 3. Se supone que los laminados son totalmente elásticos, pudiéndose realizar el estudio de cada laminado a través de la teoría de placas delgadas para materiales compuestos. Se toman las siguientes hipótesis constitutivas (Vera, 2006; Vera et al., 2006):

- a) Cada laminado verifica un estado plano de tensiones.
- b) Las alas tienen grados de libertad independientes (Según se aprecia en la Figura 3). Además la distorsión del alma se aproxima con un polinomio de tercer grado en términos de los desplazamientos de las alas.
- c) Se contemplan dos tipos de sistemas de referencia, uno global ubicado en C y tres locales ubicados en los centros geométricos de las placas (ver Figura 2.c).
- d) En cada ala se supondrá un movimiento extensional, un movimiento torsional de Saint Venant y un movimiento flexional como si se tratara de una viga Tipo Timoshenko.

La cinemática de cada segmento de la sección transversal será analizada de manera independiente, ensamblándolos entre sí a través de las correspondientes ecuaciones de compatibilidad geométrica.

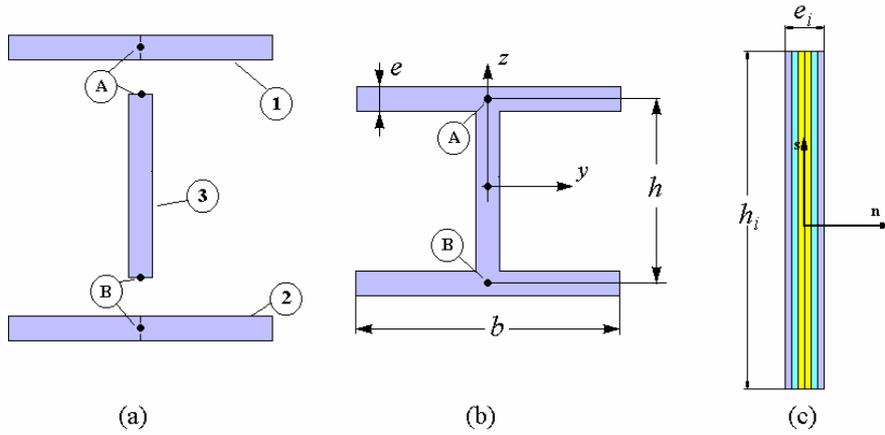


Figura 2: Ensamble de placas para formar la viga de perfil H.

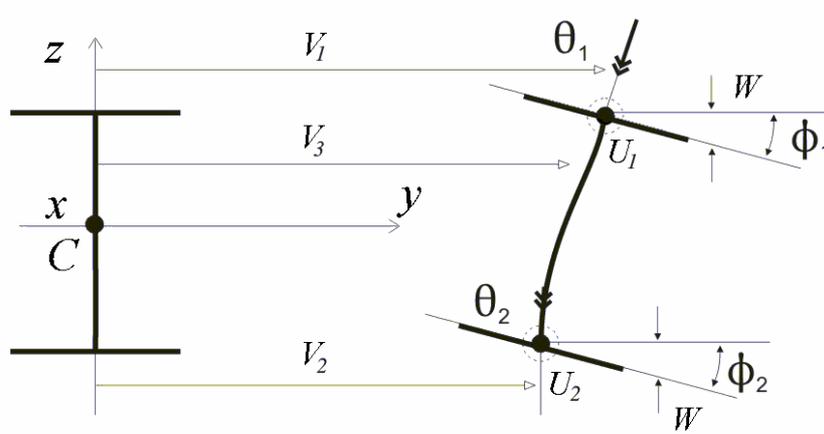


Figura 3: Descripción de los grados de libertad y la compatibilidad entre las alas y alma

Los autores (Vera et al. 2006) dedujeron el modelo e introdujeron un elemento finito tipo viga compuesto por dos nodos, cuya formulación se describe sucintamente a continuación.

Los desplazamientos generales en la sección vienen dados en términos de las variables nodales de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\{u_G\} = [A]\{q_e\} \quad (7)$$

Siendo $[A]$ la matriz de funciones de forma (Vera et al., 2006), mientras que $\{u_G\}$ y $\{q_e\}$ vienen dados por:

$$\begin{aligned} \{u_G\} &= \{U_1, V_1, \theta_1, \phi_1, W, U_2, V_2, \theta_2, \phi_2\}^T \\ \{q_e\} &= \{U_1^{(1)}, V_1^{(1)}, \theta_1^{(1)}, \phi_1^{(1)}, W^{(1)}, U_2^{(1)}, V_2^{(1)}, \theta_2^{(1)}, \phi_2^{(1)}, U_1^{(2)}, V_1^{(2)}, \theta_1^{(2)}, \phi_1^{(2)}, W^{(2)}, U_2^{(2)}, V_2^{(2)}, \theta_2^{(2)}, \phi_2^{(2)}\}^T \end{aligned} \quad (8)$$

Como se puede apreciar se trata de un elemento finito que posee 18 grados de libertad. Los desplazamientos en cada placa vienen dados en función de $\{u_G\}$ como:

$$\begin{aligned} u_{oi} &= U_i - \theta_i \cdot s; & v_{oi} &= V_i; & w_{oi} &= W + \phi_i \cdot s \quad \text{con } i = 1, 2 \\ \phi_{xi} &= \frac{U_2 - U_1}{h_3}; & \phi_{yi} &= \phi_i \quad \text{con } i = 1, 2 \end{aligned} \quad (9)$$

Por la teoría de láminas, se tiene que las funciones u_{oi} y v_{oi} son los desplazamientos

pertenecientes a la superficie media de la lámina, ϕ_{xi} y ϕ_{yi} son las rotaciones de la línea normal a la superficie media, respecto de los ejes y y x siendo positivas en la dirección contraria al giro de las agujas del reloj. Se considera que estos desplazamientos y rotaciones son independientes de la coordenada del espesor n .

Así pues, las deformaciones y aceleraciones en cada placa vienen dadas por las siguientes expresiones (Vera et al., 2006):

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_j\} &= [B_j] \{q_e\} \quad \text{con } j = 1, 2, 3 \\ \ddot{u}_{g(j)} &= [A_{g(j)}] \{\ddot{q}_e\} \quad \text{con } g(j) = \{u_{oi}, v_{oi}, w_{oi}, \phi_{xi}, \phi_{yi}\} \quad \text{con } i = 1, 2 \end{aligned} \quad (10)$$

Donde $[B_j]$ es una matriz operador diferencial y las $[A_{g(j)}]$ son matrices de 1×18 (Vera et al., 2006). De manera que las matrices de rigidez y de masa del elemento finito vienen dadas por:

$$\begin{aligned} [K^{(e)}] &= \sum_{j=1}^3 \left(\int_0^1 \int_{-h_j/2}^{h_j/2} [B_j]^T [C_j] [B_j] ds l_e d\bar{x} \right) \\ [M^{(e)}] &= \sum_{j=1}^3 l_e \int_0^1 \int_{-h_j/2}^{h_j/2} \left[e_j \rho_j \left([A_{u_{oj}}]^T [A_{u_{oj}}] + [A_{v_{oj}}]^T [A_{v_{oj}}] + [A_{w_{oj}}]^T [A_{w_{oj}}] \right) + \frac{e_i^3 \rho_i}{12} \left([A_{\phi_{xj}}]^T [A_{\phi_{xj}}] + [A_{\phi_{yj}}]^T [A_{\phi_{yj}}] \right) \right] ds dx \end{aligned} \quad (11)$$

Así pues, ensamblando las matrices elementales se obtiene una forma similar a la expresión (6) con la cual se pueden calcular los autovalores.

3 ESTUDIOS NUMERICOS

Con el fin de validar y caracterizar los modelos unidimensionales mencionados se empleará como cota de comparación los resultados obtenidos mediante modelos computacionales de mayor jerarquía. En tal sentido se emplean modelos de elementos finitos tipo cáscara del programa comercial Abaqus (Abaqus, 1999). Específicamente se ha empleado el elemento SHELL S4 y modelos de más de 1000 elementos para obtener los autovalores. En la Tabla 1 se muestran las propiedades elásticas del material compuesto que se emplea en este estudio, junto con el rango de varias relaciones geométricas. Se considerará que cada segmento posee el mismo espesor. Téngase presente que en la Tabla 1, h , b y e corresponden a la altura del alma, ancho del ala y espesor de pared de la sección, respectivamente (según se observa en la Figura 2). En tanto que con L se identifica la longitud de la viga.

$E_{11} = 144 \text{ Gpa}, E_{22} = 9.65 \text{ GPa}, G_{12} = 4.14 \text{ Gpa}, G_{23} = 3.00 \text{ Gpa}$ $\nu_{12} = 0.30, \rho = 1389 \text{ Kg/m}^3.$
$e/h \in [0.025, 0.1], \quad b/h \in [0.5, 1.0], \quad h/L \in [0.025, 0.15], \quad h = 0.6 \text{ m}$

Tabla 1: Propiedades elásticas y relaciones geométricas para el estudio.

En las Tablas 2 a 4 se muestran los primeros ocho autovalores calculados con Abaqus, con el modelo sin deformabilidad seccional (SDS), con el modelo con deformabilidad seccional (CDS) y las respectivas diferencias relativas al modelo de mayor jerarquía, para un caso de viga con empotramiento en ambos extremos. En estas tres Tablas se ha empleado la relación $b/h=0.5$ y cada segmento posee laminación $\{0/90/90/0\}$, en tanto que se han empleado las

relaciones $h/L=0.025$, $h/L=0.05$, y $h/L=0.1$ en las Tabla 2, Tabla 3 y Tabla 4 respectivamente. Para los modelos SDS y CDS se han empleado discretizaciones de 40 y 50 elementos finitos correspondientes a cada formulación. Nótese que se indica para cada modelo unidimensional las diferencias porcentuales con respecto de la solución del modelo de Abaqus, las cuales se calculan mediante las siguientes expresiones:

$$\Delta_{SDS} = \left| 1 - \frac{f_{SDS}}{f_{Abaqus}} \right| 100, \quad \Delta_{CDS} = \left| 1 - \frac{f_{CDS}}{f_{Abaqus}} \right| 100 \quad (12)$$

e/h	Modelo	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
0.025	Abaqus	2,44	3,20	6,69	8,37	10,18	13,00	15,94	21,18
	SDS	2,81	3,60	7,69	9,50	10,33	14,94	18,14	24,43
	Δ_{SDS}	15,20	12,61	14,99	13,47	1,50	14,94	13,77	15,32
	CDS	2,82	3,61	7,71	9,53	10,35	14,96	18,26	24,30
	Δ_{CDS}	15,57	12,81	15,25	13,86	1,67	15,08	14,55	14,73
0.05	Abaqus	2,46	3,96	6,75	9,53	10,19	13,15	17,31	21,54
	SDS	2,83	4,30	7,74	10,34	10,54	15,03	19,33	24,57
	Δ_{SDS}	14,95	8,66	14,65	8,45	3,42	14,30	11,67	14,05
	CDS	2,83	4,31	7,77	10,35	10,58	15,11	19,46	24,73
	Δ_{CDS}	15,04	8,84	15,11	8,60	3,83	14,90	12,42	14,81

Tabla 2: Autovalores para viga H biempotrada. $h/L=0.025$, $b/h=0.5$

e/h	Modelo	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
0.025	Abaqus	9,61	11,75	25,54	31,29	33,45	45,87	59,40	62,34
	SDS	11,05	13,38	29,63	33,86	35,52	56,19	67,04	75,68
	Δ_{SDS}	14,94	13,85	16,02	8,20	6,19	22,49	12,87	21,40
	CDS	11,03	13,40	29,05	33,88	35,65	50,86	65,50	67,43
	Δ_{CDS}	14,78	14,04	13,74	8,28	6,58	10,88	10,27	8,16
0.05	Abaqus	9,71	12,67	26,16	32,66	33,54	49,46	61,08	74,74
	SDS	11,11	14,18	29,80	33,86	36,64	56,48	68,30	75,69
	Δ_{SDS}	14,43	11,89	13,90	3,68	9,25	14,19	11,82	1,27
	CDS	11,12	14,21	29,75	33,89	36,80	55,67	68,73	75,72
	Δ_{CDS}	14,52	12,15	13,72	3,77	9,72	12,56	12,52	1,31

Tabla 3: Autovalores para viga H biempotrada. $h/L=0.05$, $b/h=0.5$

e/h	Modelo	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
0.025	Abaqus	38,30	48,19	66,82	77,12	86,16	86,85	87,70	101,59
	SDS	41,40	49,37	88,83	104,30	124,07	180,58	185,88	220,83
	Δ_{SDS}	8,08	2,45	32,94	35,25	44,00	107,93	111,95	117,38
	CDS	39,43	49,46	68,22	75,17	79,88	84,85	88,59	88,83
	Δ_{CDS}	2,95	2,64	2,10	2,53	7,29	2,30	1,01	12,56
0.05	Abaqus	40,31	49,19	87,63	94,32	121,81	137,83	164,19	166,52
	SDS	41,61	50,20	88,84	104,75	125,21	180,60	186,55	222,09
	Δ_{SDS}	3,22	2,04	1,38	11,06	2,79	31,03	13,62	33,37
	CDS	41,23	50,32	88,85	96,59	125,65	136,01	153,23	165,57
	Δ_{CDS}	2,28	2,30	1,39	2,41	3,15	1,32	6,68	0,57

Tabla 4: Autovalores para viga H biempotrada. $h/L=0.1$, $b/h=0.5$

Una forma simple para estimar el grado de representatividad de los modelos unidimensionales de vigas de paredes delgadas de materiales compuestos en comparación con un homónimo modelo construido con elementos finitos cáscara, se puede viabilizar a partir de evaluar el siguiente índice de error:

$$\Lambda_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta_{M_i} \quad \text{con } M \rightarrow SDS \text{ o } M \rightarrow CDS \quad (13)$$

Donde N corresponde al número de los primeros autovalores considerados para correlacionar. Básicamente tal índice es un promedio de los errores que corresponden a cada modelo unidimensional hasta la N -ésima frecuencia analizada. Así pues, por ejemplo Λ_3 o Λ_6 significan promediar los errores de las primeras tres o primeras seis frecuencias respectivamente. Téngase presente que para la resolución aproximada de algunos problemas de dinámica bajo la acción de cargas móviles (Wang, 1997; Kadivar y Mohebpour, 1998) u otros que puedan analizarse según una concepción lineal, se suelen emplear entre tres y diez modos normales en el método de superposición modal (Meirovitch, 1997).

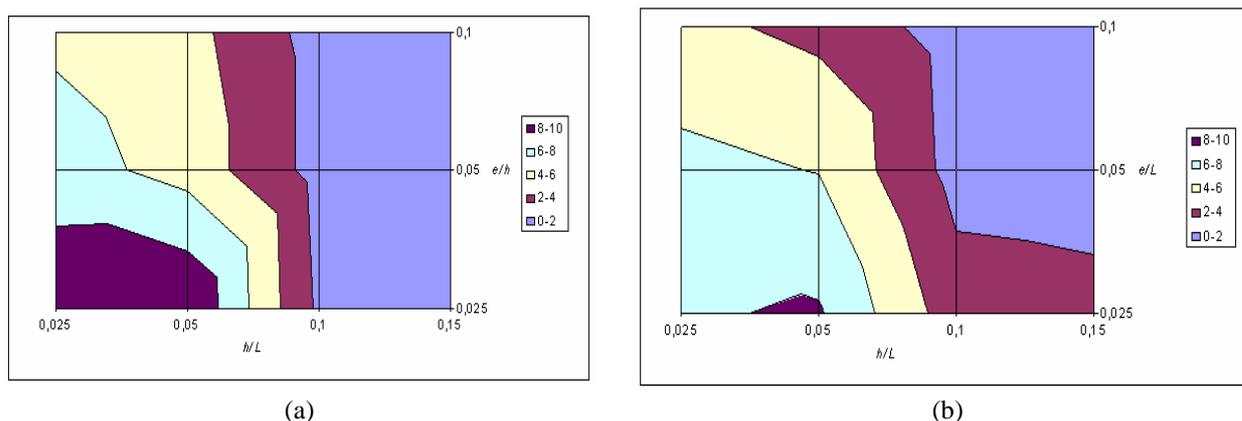


Figura 4: Variación del índice de error Λ_3 para una viga cantilever con $b/h = 0.5$. (a) CDS. (b) SDS.

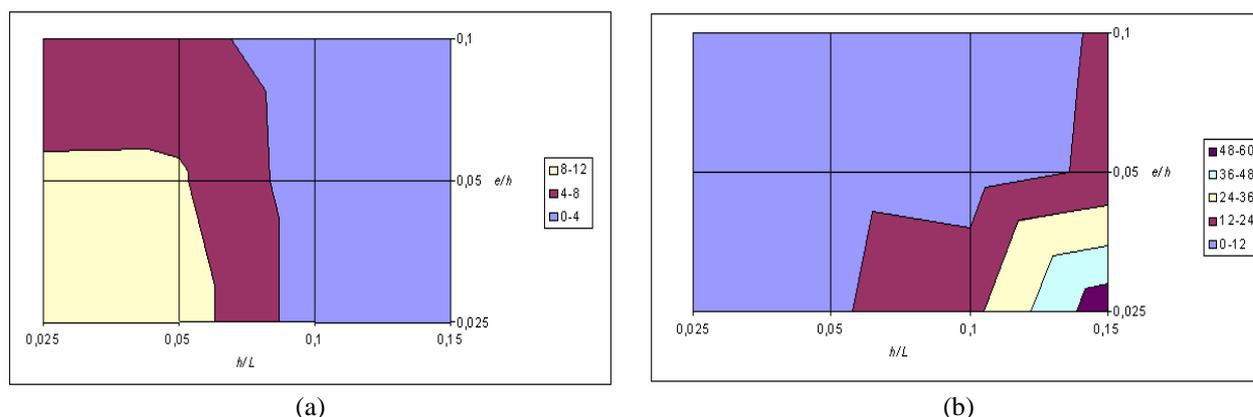


Figura 5: Variación del índice de error Λ_6 para una viga cantilever con $b/h = 0.5$. (a) CDS. (b) SDS.

Así pues, en las Figuras 4 a 7 se muestran las zonas de variación del índice de error (13) en el rango de parámetros mencionado en la Tabla 1, para una viga empotrada libre con laminación tipo cross-ply $\{0/90/90/0\}$. En cada una de las mencionadas Figuras se muestran

los índices de error correspondientes a cada modelo unidimensional. En las Figuras 4 y 6 se muestran las variaciones del índice Λ_3 con respecto a h/L y e/h , para relaciones $b/h=0.5$ y $b/h=0.75$, respectivamente. En tanto que en las Figuras 5 y 7 se muestran las variaciones del índice Λ_8 con respecto a h/L y e/h , para relaciones $b/h=0.5$ y $b/h=0.75$, respectivamente.

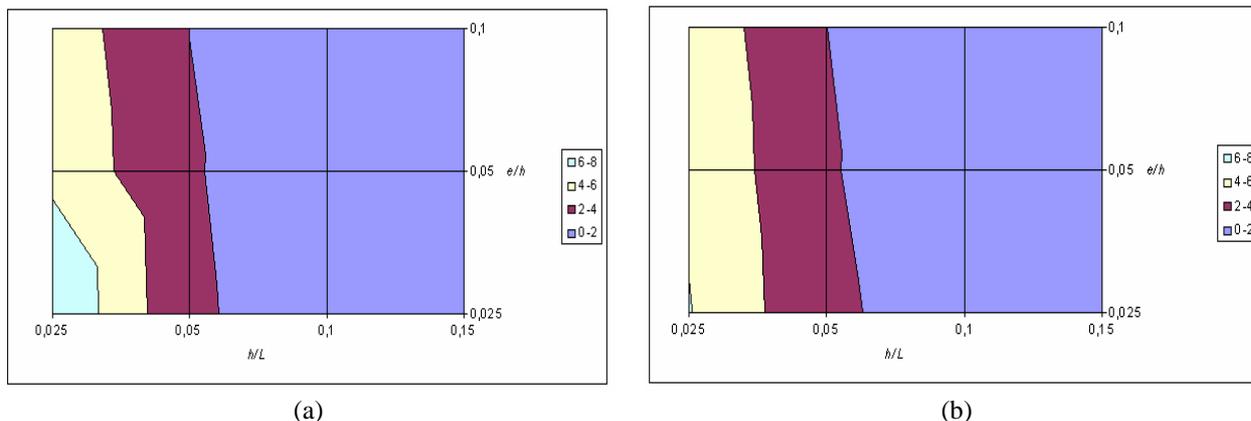


Figura 6: Variación del índice de error Λ_3 para una viga cantilever con $b/h = 0.75$. (a) CDS. (b) SDS.

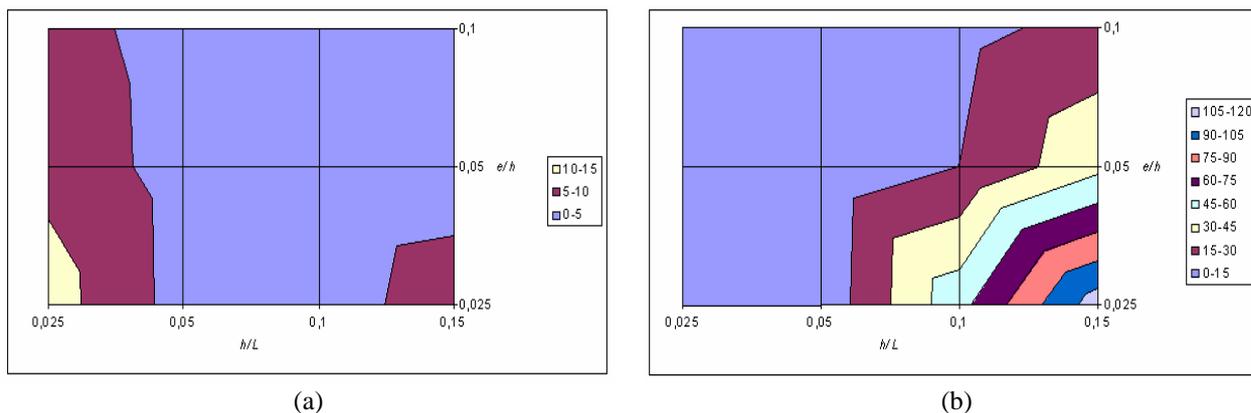


Figura 7: Variación del índice de error Λ_8 para una viga cantilever con $b/h = 0.75$. (a) CDS. (b) SDS.

Nótese, a partir de una detenida observación sobre las figuras precedentes que en el caso del modelo SDS aparecen errores muy grandes cuando $h/L \rightarrow 0.15$, $b/h \rightarrow 0.75$ y $e/h \rightarrow 0.025$. Esto se debe a que no se puede mantener la hipótesis más fuerte que se hace sobre la sección transversal, es decir la indeformabilidad de la misma en el plano seccional. En tanto que el modelo CDS posee mejores características de representación en casi toda la gama de parámetros considerados.

En las Figuras 8 y 9 se muestran respectivamente las variaciones de los índices Λ_3 y Λ_8 para un viga biempotrada con laminación $\{0/90/90/0\}$. Nótese que el modelo SDS es prácticamente inutilizable en la medida que $h/L \rightarrow 0.15$, $b/h \rightarrow 0.75$ y $e/h \rightarrow 0.025$, dado que aparecen errores muy notorios (obsérvese especialmente la Figura 9.b). Por otro lado el modelo CDS mantiene las cotas del índice de error ligeramente mayores a los casos con condición de borde empotrada-libre.

Se han efectuado comparaciones de los modelos unidimensionales empleando otros tipos de laminaciones tales como $\{0/0/0/0\}$ y $\{0/-45/+45/90/90/+45/-45/0\}$. En estos casos los índices de error han sido similares o con ligeras variaciones a los mostrados en las Figuras 4

a 9 en las diferentes condiciones de borde.

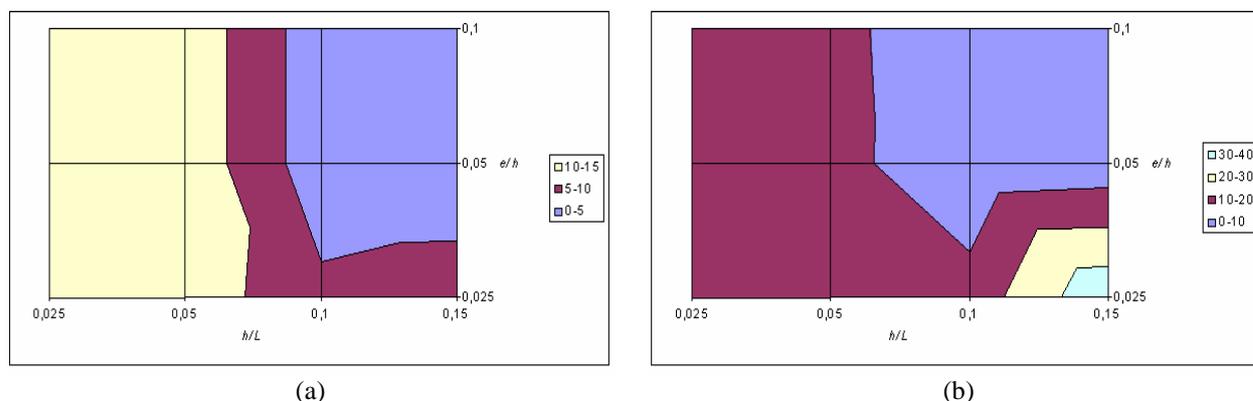


Figura 8: Variación del índice de error Λ_3 para una viga biempotrada con $b/h = 0.5$. (a) CDS. (b) SDS.

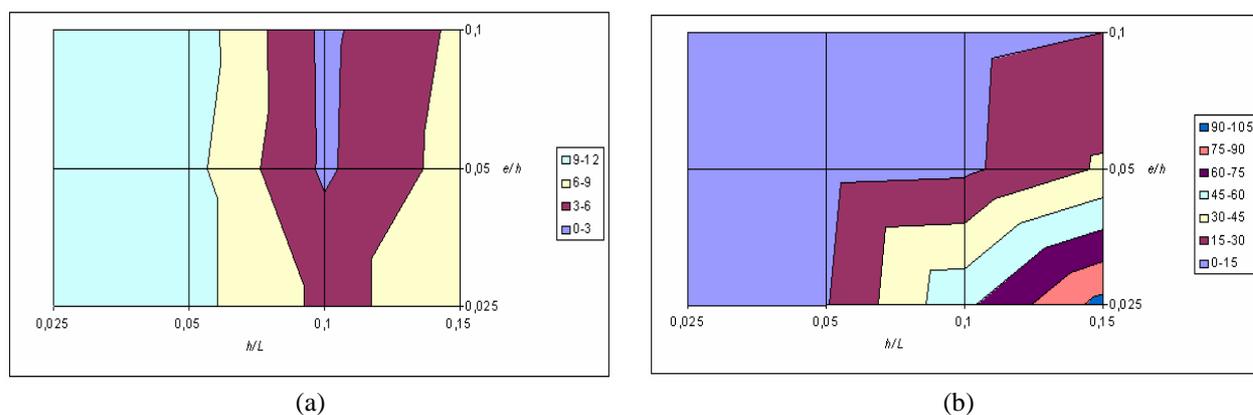


Figura 9: Variación del índice de error Λ_8 para una viga biempotrada con $b/h = 0.5$. (a) CDS. (b) SDS.

Se ha podido observar que las hipótesis convencionales efectuadas en la modelación de vigas de paredes delgadas (Vlasov, 1961; Gjelsvik, 1981) son fuertemente condicionales a aspectos de relaciones geométricas como lo son las relaciones de esbeltez (h/L o b/L) y las relaciones de espesor (e/h). Normalmente, se considera que una viga puede modelarse o suponerse de paredes delgadas siempre que se cumpla $h/L \leq 0.1$ y $e/h \leq 0.1$, imponiéndose a su vez la hipótesis de indeformabilidad seccional. Tal hipótesis se puede sustentar con un grado de aproximación bueno (según los resultados presentados en este trabajo), estimada en que el índice de error $\Lambda_8 \leq 10$, cuando $h/L \leq 0.05$ y $e/h \geq 0.05$. En otras circunstancias la hipótesis de sección indeformable es fuertemente condicionante al menos para problemas de dinámica.

4 CONCLUSIONES

En este trabajo se ha efectuado una validación computacional extensiva de dos modelos unidimensionales para analizar la dinámica de vigas abiertas de paredes delgadas con perfil H. Uno de los modelos unidimensionales contempla la flexibilidad del alma de la sección. Se han comparado los valores de frecuencias obtenidos con los modelos unidimensionales y la plataforma de cálculo por elementos finitos Abaqus, donde se han empleado modelos bidimensionales. Las comparaciones se han efectuado en un rango paramétrico suficientemente amplio en las relaciones de esbeltez, relaciones de altura de alma y ancho de

alas y relaciones de espesor a altura, como para poder establecer el dominio de validez de las teorías unidimensionales. Como se ha podido observar ambos modelos unidimensionales correlacionan muy bien (en las primeras cinco frecuencias) con el modelo computacional de cáscaras de Abaqus cuando la viga es muy esbelta y el espesor de pared relativamente grueso. Sin embargo en la medida que el espesor de pared sea más fino y las relaciones de esbeltez h/L o b/L o b/h aumenten el modelo unidimensional con sección rígida en su plano no correlaciona bien con los modelos computacionales de mayor jerarquía. En cambio el modelo unidimensional que contempla la flexibilidad seccional mantiene una buena correlación, en algunos casos aun hasta el décimo autovalor. En términos generales puede decirse que el modelo unidimensional con sección rígida en su plano posee buena respuesta para vigas H con esbeltez pequeña hasta media (es decir h/L o b/L menor a 0.12) y con espesores de pared más bien gruesos (es decir e/h entre 0.05 y 0.15)

5 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo recibido por la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Tecnológica Nacional y del CONICET.

REFERENCES

- Abaqus standard user's manual, v. 5.6. Pawtucket (RI): Hibbit Karlsson and Sorensen, Abaqus, 1999.
- Barbero, E.J., *Introduction to composite materials design*. Taylor and Francis, 1998.
- Bauld, N.R. and Tzeng, L.S., A Vlasov theory for fiber-reinforced beams with thin-walled open cross sections. *International Journal of Solids and Structures*, 20(3):277-297, 1984.
- Ghorbanpoor, A. and Omidvar, B., Simplified analysis of thin-walled composite members. *Journal of Structural Engineering* 122(11):1379-1383, 1996.
- Gjelsvik, A., *Theory of Thin Walled Beams*. John Wiley and Sons Inc, 1981.
- Kadivar, M.H. y Mohebpour, S.R., Forced vibration of unsymmetric laminated composite beams under the action of moving loads. *Composites Science and Technology*, 58(10) 1675-1684, 1998.
- Kim, N.I, Shin, D.G. and Kim, M-Y., Exact solutions for thin-walled open-section composite beams with arbitrary lamination subjected to torsional moment. *Thin-Walled Structures*, 44:638-654, 2006.
- Massa, J.C. and Barbero E.J., A strength of materials formulation for thin-walled composite beams with torsion. *Journal of Composite Materials* 32(17):1560-1594, 1998.
- Meirovitch, L., *Principles and Techniques of Vibrations*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1997.
- Piovan, M.T., Estudio Teórico y Computacional sobre la Mecánica de Vigas Curvas de Materiales Compuestos, con Paredes delgadas, considerando efectos no convencionales, Tesis Doctoral, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, 2003.
- Piovan, M.T., and Cortínez, V.H., Mechanics of shear deformable Thin-Walled beams made of composite materials. *Thin-Walled Structures*, 45(1):37-72, 2007.
- Piovan, M.T., Cortínez, V.H. y Rossi, R.E., Estática y dinámica de vigas Anisótropas de paredes delgadas deformables por corte. *Mecánica Computacional*, 20:258-265, 2001.
- Song, O. and Librescu L., Free vibration of anisotropic composite thin-walled beams of closed cross-section contour. *Journal of Sound and Vibration* 167(1): 129-147, 1993.
- Vera, C.A., Análisis dinámico de vigas compuestas laminadas de sección I. Consideración de la deformación del alma". Tesis de Magíster. Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, 2006.

- Vera, C.A., Cortínez, V.H., and Ercoli, L., Análisis dinámico de vigas compuestas laminadas de sección I. Consideración de la deformabilidad del alma. *Mecánica Computacional*, 25:1717-1734, 2006.
- Vlasov V.Z., *Thin Walled Elastic Beams*. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translation. 1961.
- Wang R.T., Vibration of Multispan Timoshenko beams to a moving force. *Journal of Sound and Vibration* 207(5) 731-742, 1997.