

UN ELEMENTO DE LÁMINA SIN GRADOS DE LIBERTAD ROTACIONALES PARA EL ANÁLISIS DE CÁSCARAS CON QUIEBRES Y RAMIFICADAS

Fernando G. Flores*

*Universidad Nacional de Córdoba
Departamento de Estructuras
Casilla de Correo 916
5000 Córdoba - Argentina

y
CONICET

e-mail: fflores@efn.uncor.edu
web page: <http://www.efn.uncor.edu>

Palabras Clave: Elementos Finitos, Láminas, sin rotaciones, ramificadas, grandes deformaciones.

Resumen. *El presente trabajo extiende las capacidades de los elementos de lámina sin rotaciones (BST, EBST), desarrollados para el análisis de superficies suaves, al estudio de superficies con quiebres y ramificadas. Se realiza una redefinición de la curvatura en función del cambio de ángulo entre las normales al elemento, lo cual permite por un lado tratar cambios de ángulos arbitrariamente grandes entre elementos adyacentes y por otro introducir quiebres. Luego se generaliza esta idea al caso de láminas ramificadas. Se introduce la idea de rotación promedio de la arista en función de las rigideces relativas de los elementos adyacentes. Se presentan varios ejemplos en régimen lineal y no lineal que muestran que la formulación conduce a los resultados correctos.*

1. INTRODUCCIÓN

El desarrollo de técnicas numéricas para resolver problemas de láminas utilizando únicamente los desplazamientos como incógnitas ha estado principalmente centrado en el método de diferencias finitas (ver por ejemplo las Referencias¹⁻³). Sin embargo la idea de desarrollar elementos finitos de láminas y vigas sin grados de libertad de rotación no es nueva^{4,5} y se han realizado distintos intentos desde los comienzos del método.⁶⁻¹⁰ Pero solo en la última década se ha logrado obtener elementos de lámina sin rotaciones confiables para aplicaciones industriales.^{11,13-15} Todas las aproximaciones tienen en común la utilización de una vecindad (parcela) de elementos a los fines de definir la interpolación de la geometría y los desplazamientos. El aspecto distintivo principal entre las distintas propuestas es la forma en que se aproximan las curvaturas y la formulación teórica utilizada. Uno de los principales aspectos que queda por resolver en forma satisfactoria es el tratamiento de superficies que no son suaves o que ramifican. La solución de estos aspectos es imprescindible si se pretende utilizar este tipo de elementos en el modelado de problemas aeronáuticos o en estructuras de ingeniería civil, entre otros. En particular el caso de láminas ramificadas (esto es cuando en una arista concurren 3 o más superficies) es el que presenta el mayor desafío.

En este trabajo se abordan problemas tri-dimensionales con especial énfasis en láminas no suaves y ramificadas. Es por un lado una extensión al análisis de láminas ramificadas de desarrollos previos sobre elementos de láminas tridimensionales sin grados de libertad,^{13,15} y por otro lado, una extensión a tres dimensiones de un elemento unidimensional para láminas de revolución capaz de tratar quiebres y ramificaciones.¹⁶

2. ELEMENTO BST CON QUIEBRES

Una de las características fundamentales de los elementos sin grados de libertad rotacionales es que son *no conformes*. Para introducir en forma discreta la continuidad del giro entre elementos y para la evaluación de las curvaturas (1) se recurre a una parcela de elementos que incluye al elemento en consideración y a los elementos adyacentes. La parcela de elementos a partir de la cual se evalúa la curvatura en un elemento se muestra en la Figura 1.a. En ella se indica la numeración local de los nudos, de los elementos que rodean al elemento en cuestión (**M**) y de los lados. En la Figura 1.b se indica la misma parcela sobre un dominio plano normalizado (elemento maestro). Notar la numeración asignada:

- los nudos del elemento principal van de 1 a 3, el nudo 4 es el opuesto al 1, el 5 al 2 y el 6 al 3.
- el lado i es el lado opuesto al nudo i en el elemento principal y el elemento i es el adyacente al mismo lado
- las conectividades en cada elemento adyacente i empiezan por el nudo extra ($i + 3$).

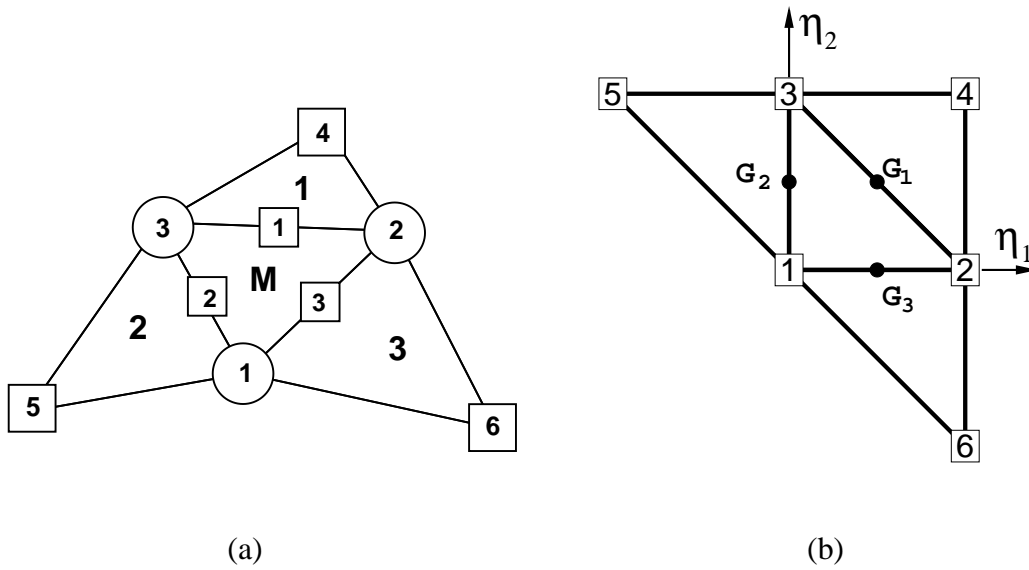


Figura 1: Parcela de elementos triangulares de tres nudos incluyendo el triángulo central (M) y tres elementos adyacentes (1, 2 y 3)

2.1. Evaluación de las curvaturas en el elemento BST

El cálculo de las curvaturas de la superficie media φ definidas por

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\varphi'_{\alpha} \cdot \mathbf{t}'_{\beta} + \varphi'_{\beta} \cdot \mathbf{t}'_{\alpha}) = -\varphi'_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{t} \quad (1)$$

en el elemento BST,¹³ donde se supone que los cuatro elementos de la parcela pertenecen a una superficie suave, resulta de la integral promedio (2.a) y de su correspondiente modificación a partir del teorema de la divergencia (2.b)

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{12} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} = \frac{-1}{{}^oA} \int_{{}^oA} \begin{bmatrix} \varphi'_{11} \cdot \mathbf{t} \\ \varphi'_{22} \cdot \mathbf{t} \\ 2\varphi'_{12} \cdot \mathbf{t} \end{bmatrix} d {}^oA \quad (2a)$$

$$= \frac{-1}{{}^oA} \int_{{}^o\Gamma} \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \\ n_2 & n_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi'_{11} \cdot \mathbf{t}^{(M)} \\ \varphi'_{22} \cdot \mathbf{t}^{(M)} \end{bmatrix} d {}^o\Gamma \quad (2b)$$

donde oA es el área original del elemento y ${}^o\Gamma$ el contorno del mismo con normal $\mathbf{n} = (n_1, n_2)^T$. Las direcciones 1 y 2 son direcciones cartesianas arbitrariamente elegidas sobre la superficie original y $\mathbf{t}^{(M)}$ es la normal al plano del elemento. Con un superíndice entre paréntesis indicaremos, cuando sea necesario, a qué elemento de la parcela se refiere el parámetro geométrico correspondiente. Así $\mathbf{t}^{(M)}$ es la normal al elemento central y $\mathbf{t}^{(i)}$ es la normal al elemento adyacente opuesto al nudo i del elemento central. La geometría se interpola en cada elemento en

forma independiente a partir de sus tres nudos:

$$\varphi = \sum_{I=1}^3 L^I(\eta_1, \eta_2) \varphi^I \quad (3)$$

Evaluando la integral de contorno (2.b) a la mitad de cada lado se tiene (con ${}^o l_i$ la longitud original de cada lado e indicando con un subíndice i valores asociados al lado)

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{12} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} = \frac{-1}{{}^o A} \sum_{i=1}^3 {}^o l_i \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \\ n_2 & n_1 \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \varphi'_{1} \cdot \mathbf{t}^{(M)} \\ \varphi'_{2} \cdot \mathbf{t}^{(M)} \end{bmatrix}_i \quad (4)$$

En el BST original se evalúan los gradientes en la mitad de cada lado como el promedio de los gradientes en los elementos adyacentes al lado^{12,13}

$$\begin{bmatrix} \varphi'_{1} \\ \varphi'_{2} \end{bmatrix}_i = \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} \varphi'_{1}^{(i)} \\ \varphi'_{2}^{(i)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi'_{1}^{(M)} \\ \varphi'_{2}^{(M)} \end{bmatrix} \right\} \quad (5)$$

a su vez debe notarse que

- en el plano del elemento principal $\begin{bmatrix} \varphi'_{1}^{(M)} \cdot \mathbf{t}^{(M)} \\ \varphi'_{2}^{(M)} \cdot \mathbf{t}^{(M)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
- en el elemento adyacente $\begin{bmatrix} \varphi'_{1}^{(i)}, \varphi'_{2}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi'_{1}^{(i)}, \varphi'_{2}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -n_1 & -n_2 \\ n_2 & -n_1 \end{bmatrix}_i$ y $\varphi'_{s}^{(i)} \cdot \mathbf{t}^{(M)} = 0$, por lo cual

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{12} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{2 {}^o A} \sum_{i=1}^3 {}^o l_i \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \\ n_2 & n_1 \end{bmatrix}_i [n_1, n_2]_i \left(\varphi'_{n}^{(i)} \cdot \mathbf{t}^{(M)} \right) \quad (6)$$

Si se introducen las derivadas de las funciones de forma L^i del triángulo lineal¹⁷

$$\begin{bmatrix} L'_{1} \\ L'_{2} \end{bmatrix} = -\frac{{}^o l_i}{2 {}^o A} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}_i = -\frac{1}{{}^o h_i} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}_i \quad (7)$$

con ${}^o h_i$ la distancia del nudo i al lado opuesto. La expresión (6) puede reescribirse como

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{12} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} = 2 {}^o A \sum_{i=1}^3 \frac{1}{{}^o l_i} \begin{bmatrix} (L'_{1})^2 \\ (L'_{2})^2 \\ -2L'_{1}L'_{2} \end{bmatrix} \left(\varphi'_{n}^{(i)} \cdot \mathbf{t}^{(M)} \right) \quad (8)$$

Esta última expresión (8) o en función de las dos componentes del gradiente (4) son las que se utilizan en el elemento BST para cálculo de las curvaturas en el análisis de superficies suaves.

Para el tratamiento de quiebres y ramificaciones, donde el ángulo entre las normales a dos elementos adyacentes puede ser grande, resulta necesario modificar la definición (8), utilizando efectivamente el ángulo entre normales y no su seno. Con este objetivo si $2\gamma_i$ es el ángulo entre la normal al elemento y la normal al elemento adyacente la proyección $\varphi_n^{(i)} \cdot \mathbf{t}^{(M)}$ puede interpretarse alternativamente como

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(i)} \cdot \mathbf{t}^{(M)} &= \left(\rho_i \lambda^{(i)}\right)^{-1} \sin(\mathbf{n}^{(i)}, \mathbf{t}^{(M)}) = \left(\rho_i \lambda^{(i)}\right)^{-1} \sin 2\gamma_i \\ &\cong \left(\rho_i \lambda^{(i)}\right)^{-1} 2\gamma_i \equiv \left(\rho_i \lambda^{(M)}\right)^{-1} 2\gamma_i \end{aligned} \quad (9)$$

donde $\lambda^{(i)}$ es el estiramiento de la lámina en la dirección normal a la lámina (espesor relativo), ρ_i es el estiramiento de la lámina a lo largo de la arista i (común a ambos elementos) y $\mathbf{n}^{(i)}$ es la normal al lado i en el plano del elemento adyacente (i) en la configuración deformada. Reemplazando (9) en (8) se tiene una nueva definición numérica de la curvatura del elemento

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{12} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} = 2 \text{ }^o A \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\text{}^o l_i} \begin{bmatrix} (L_{i1}^i)^2 \\ (L_{i2}^i)^2 \\ -2L_{i1}^i L_{i2}^i \end{bmatrix} \left(\rho_i \lambda^{(M)}\right)^{-1} 2\gamma_i \quad (10)$$

Esta redefinición de la curvatura del elemento será utilizada para el tratamiento de superficies no suaves. La correspondiente variación, necesaria para la evaluación de la forma débil de las ecuaciones de equilibrio es

$$\delta \begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{12} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} = 2 \text{ }^o A \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\text{}^o l_i} \begin{bmatrix} (L_{i1}^i)^2 \\ (L_{i2}^i)^2 \\ -2L_{i1}^i L_{i2}^i \end{bmatrix} \delta \left(\frac{2\gamma_i}{\rho_i \lambda^{(M)}} \right) \quad (11)$$

A continuación se verá como evaluar (10) y (11) para el caso de quiebres y ramificaciones. En particular lo que interesa es la definición y cómputo, y su correspondiente variación, de $\left(\rho_i \lambda^{(M)}\right)^{-1} 2\gamma_i$ sobre cada lado i del elemento de referencia.

2.2. Tratamiento de quiebres

A partir de los desarrollos del elemento de lámina bidimensional,¹⁶ en esta sección se busca establecer como formular con el elemento BST los casos donde hay una discontinuidad marcada en la normal (quiebre o pliegue) en la superficie original.

Sea entonces que en la configuración inicial exista un ángulo no nulo ${}^o \phi_i$ entre las normales a dos elementos adyacentes. En cada elemento, en el lado común, es posible definir un triedro local con: la normal al elemento ${}^o \mathbf{t}$, el lado común ${}^o \mathbf{s}$ y la normal al lado en el plano del elemento ${}^o \mathbf{n} = {}^o \mathbf{s} \times {}^o \mathbf{t}$, de tal forma que

$$\cos \phi_i = \mathbf{t}^{(M)} \cdot \mathbf{t}^{(i)} = -\mathbf{n}_i^{(M)} \cdot \mathbf{n}^{(i)} \quad (12a)$$

$$\sin \phi_i = \mathbf{t}^{(M)} \cdot \mathbf{n}^{(i)} = \mathbf{n}_i^{(M)} \cdot \mathbf{t}^{(i)} \quad (12b)$$

Recordar que el superíndice indica el elemento y el subíndice el lado, sin embargo en los parámetros evaluados en el elemento i se suprime el subíndice i para aliviar la notación. Así $\mathbf{n}^{(i)}$ por ejemplo es la normal, sobre el plano tangente del elemento i , al lado común con el elemento principal. Notar que: a) $\mathbf{s}_i^{(M)} \equiv \mathbf{s}_i$ y $\mathbf{s}^{(i)}$ tienen dirección coincidente pero sentidos opuestos en cada elemento; b) con la definición anterior el ángulo ϕ_i se mide alrededor del lado común \mathbf{s}_i en sentido antihorario de $\mathbf{t}^{(M)}$ a $\mathbf{t}^{(i)}$; c) el ángulo inicial ϕ_i (12) entre los vectores normales a los elementos es el mismo que entre los vectores normales al lado común sobre los planos de cada elemento (entre $\mathbf{n}_i^{(M)}$ y $-\mathbf{n}^{(i)}$).

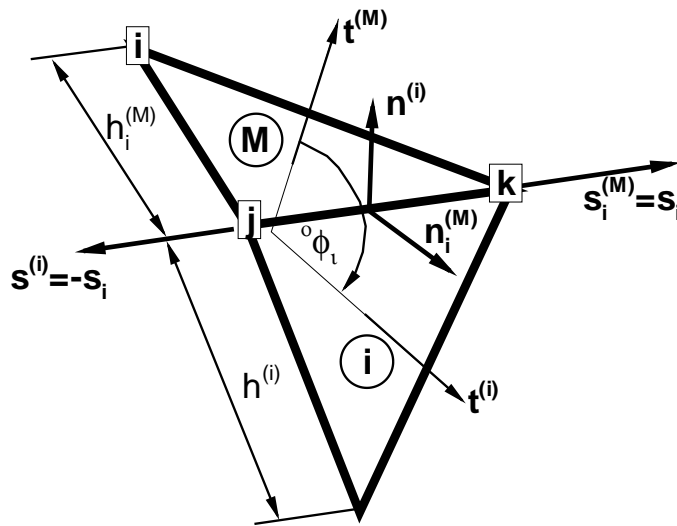


Figura 2: Quiebre entre dos elementos

En la configuración deformada, usando la aproximación lineal sobre cada triángulo (3), se tienen los gradientes (es decir los planos tangentes de cada elemento) definidos sobre un sistema arbitrario local (x_1, x_2) para cada elemento:

$$\left[\varphi_{r_1}^{(M)}, \varphi_{r_2}^{(M)} \right] \quad \text{y} \quad \left[\varphi_{r_1}^{(i)}, \varphi_{r_2}^{(i)} \right] \quad (13)$$

cuyas normales son:

$$\mathbf{t}^{(M)} = \lambda^{(M)} \varphi_{r_1}^{(M)} \times \varphi_{r_2}^{(M)} \quad \mathbf{t}^{(i)} = \lambda^{(i)} \varphi_{r_1}^{(i)} \times \varphi_{r_2}^{(i)} \quad (14)$$

Existiendo un lado común

$$\varphi_{r_s} = \rho_i \mathbf{s}_i = \varphi_{r_s}^{(M)} = -\varphi_{r_s}^{(i)} \quad (15)$$

lo cual permite definir los versores normales al lado en cada plano

$$\mathbf{n}_i^{(M)} = \frac{1}{\rho_i} \varphi_{r_s}^{(M)} \times \mathbf{t}^{(M)} = \mathbf{s}_i \times \mathbf{t}^{(M)} \quad (16a)$$

$$\mathbf{n}_i^{(i)} = \frac{1}{\rho_i} \varphi_{r_s}^{(i)} \times \mathbf{t}^{(i)} = -\mathbf{s}_i \times \mathbf{t}^{(i)} \quad (16b)$$

Notar que en la configuración original las normales al contorno son equivalentes al gradiente en dichas direcciones ${}^o\mathbf{n} = {}^o\varphi_{r_s}$, no así en la configuración deformada.

En la configuración deformada los vectores normales $\mathbf{t}^{(M)}$ y $\mathbf{t}^{(i)}$ (e igualmente $\mathbf{n}_i^{(M)}$ y $\mathbf{n}_i^{(i)}$) formarán un ángulo ϕ_i .

$$\cos \phi_i = \mathbf{t}^{(M)} \cdot \mathbf{t}^{(i)} = -\mathbf{n}_i^{(M)} \cdot \mathbf{n}_i^{(i)} \quad (17a)$$

$$\sin \phi_i = \mathbf{t}^{(M)} \cdot \mathbf{n}_i^{(i)} = \mathbf{n}_i^{(M)} \cdot \mathbf{t}^{(i)} \quad (17b)$$

que representa un cambio respecto a la configuración original:

$$\Delta\phi_i = \phi_i - {}^o\phi_i \quad (18)$$

El cambio de ángulo puede interpretarse como la rotación relativa de las normales a los elementos (en su centro) alrededor de la arista común s , la cual a su vez cambia de dirección en el espacio. En la Figura 3 se muestran tales cambios, allí se ha utilizado para mayor claridad como punto de vista la dirección s_i tanto en la configuración original como en la deformada. Puesto que se supone que los elementos están “empotrados” entre sí a lo largo del lado, las secciones normales giran solidariamente en el lado común. El ángulo entre las normales elementales (asociadas al centro de cada elemento) cambiará durante el movimiento pero el ángulo entre los gradientes normales al lado en el lado mismo (denotados por $\bar{\varphi}_{r_n}^{(M)}$ y $\bar{\varphi}_{r_n}^{(i)}$ en la figura) debe mantenerse a lo largo de todo el proceso. Al respecto en la Figura 3 se ha introducido, además de las configuraciones original y deformada, una configuración de referencia indeformada, rotada respecto a la original un ángulo $\bar{\beta}_i$ definido como la rotación de la arista s_i .

Para que los gradientes normales a los lados $\bar{\varphi}_{r_n}^{(M)}$ y $\bar{\varphi}_{r_n}^{(i)}$ mantengan el ángulo original ${}^o\phi_i$ puede asociarse a cada elemento una rotación $\gamma^{(i)}$ de su normal relativa a la rotación de la arista $\bar{\beta}_i$, con la condición

$$\Delta\phi_i = \gamma_i^{(M)} + \gamma^{(i)} \quad (19)$$

Una posibilidad (basada en consideraciones de equilibrio de momentos normales a la arista) es distribuir el cambio de ángulo entre elementos $\Delta\phi_i$ en forma inversamente proporcional a la rigidez flexional de cada elemento

$$R = \frac{Et^3}{(1 - \nu^2)h} \quad (20)$$

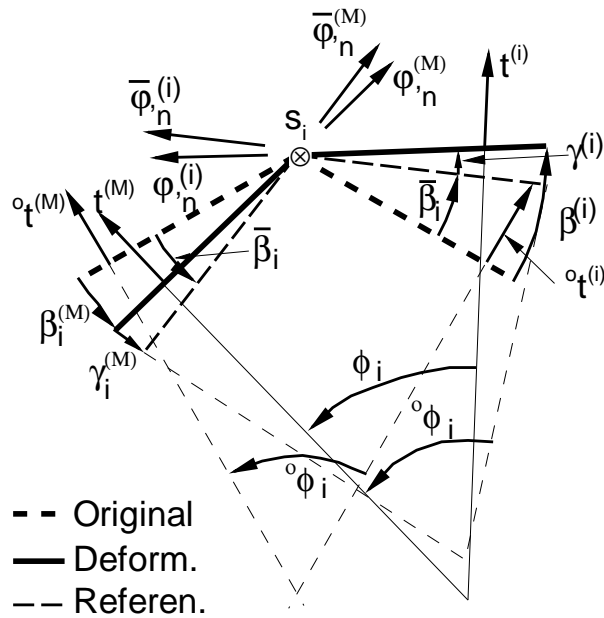


Figura 3: .

con E el módulo de elasticidad, ν la relación de Poisson, t el espesor de la lámina y h la altura del elemento triangular (respecto a la arista común, ver además Figura 2) de cada elemento adyacente de tal forma que satisfagan la relación

$$\left[\frac{Et^3}{(1-\nu^2)h} \right]^{(M)} \gamma_i^{(M)} = \left[\frac{Et^3}{(1-\nu^2)h} \right]^{(i)} \gamma_i^{(i)} \quad (21)$$

$$R_i^{(M)} \gamma_i^{(M)} = R_i^{(i)} \gamma_i^{(i)} \quad (22)$$

De donde puede obtenerse

$$\gamma_i^{(M)} = \frac{R_i^{(i)}}{R_i^{(M)} + R_i^{(i)}} \Delta\phi_i = r_i^{(M)} \Delta\phi_i \quad (23a)$$

$$\gamma_i^{(i)} = \frac{R_i^{(M)}}{R_i^{(M)} + R_i^{(i)}} \Delta\phi_i = r_i^{(i)} \Delta\phi_i \quad (23b)$$

Por otro lado si, suponiendo por un instante fija la dirección del lado s_i , denominamos:

- $\beta_i^{(M)}$ al ángulo girado por el elemento (M) , ángulo entre $t^{(M)}$ y ${}^o t^{(M)}$ (desde ${}^o t^{(M)}$ a $t^{(M)}$ medido en sentido antihorario alrededor de s_i)

- $\beta^{(i)}$ al ángulo girado por el elemento adyacente al lado i , ángulo entre $\mathbf{t}^{(i)}$ y $\mathbf{t}^{(i)}$ (desde ${}^o\mathbf{t}^{(i)}$ a $\mathbf{t}^{(i)}$ medido en sentido horario alrededor de $\mathbf{s}^{(i)}$, equivalente a medirlo antihorario alrededor de \mathbf{s}_i)

(notar que ambos ángulos se miden sobre el mismo eje) el ángulo $\Delta\phi$ puede verse también como la diferencia entre los ángulos rotados por los elementos alrededor del lado (usando como referencia la dirección \mathbf{s}_i)

$$\Delta\phi_i = \beta^{(i)} - \beta_i^{(M)} \quad (24)$$

en tanto que es posible definir el ángulo girado por el lado intersección como el promedio ponderado de los giros

$$\bar{\beta}_i = r_i^{(M)}\beta_i^{(M)} + r^{(i)}\beta^{(i)} \quad (25)$$

Con esta definición el lado (arista) rota $\bar{\beta}_i$ en tanto que el elemento de referencia rota $-\gamma_i^{(M)}$ respecto al lado ($\gamma_i^{(M)} = \bar{\beta}_i - \beta_i^{(M)}$) y el elemento adyacente rota $+\gamma^{(i)}$ respecto al lado. La definición de los ángulos $\beta_i^{(M)}$ y $\beta^{(i)}$ es conceptual pues la dirección \mathbf{s}_i no se mantiene fija en el espacio, por lo cual no es posible medir $\beta_i^{(M)}$ y $\beta^{(i)}$ en forma separada, de hecho lo que se evalúa es (17) y con el se calculan $\gamma_i^{(M)}$ y $\gamma^{(i)}$. Sin embargo las variaciones de $\beta_i^{(M)}$ y $\beta^{(i)}$ sí pueden calcularse sin problemas.

Si en la curvatura redefinida (10) se utiliza esta definición de los ángulos $\gamma_i^{(M)}$, se tiene:

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{12} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} = 4A \sum_{i=1}^3 \frac{1}{l_i} \begin{bmatrix} (L_{11}^i)^2 \\ (L_{12}^i)^2 \\ -2L_{11}^i L_{12}^i \end{bmatrix} \gamma_i^{(M)} \quad (26)$$

Observar que en realidad son cambios de curvatura porque con esta definición las curvaturas medidas en la configuración original son cero. Esto no es una desventaja, pues en la implementación se utiliza el cambio de curvatura para la evaluación de las deformaciones.

Para evaluar las variaciones de las componentes del tensor de curvaturas debe calcularse:

$$\delta \left(\frac{\gamma_i^{(M)}}{\lambda^{(M)} \rho_i} \right) = \frac{1}{\lambda^{(M)} \rho_i} \delta \gamma_i^{(M)} + \gamma_i^{(M)} \delta \left(\frac{1}{\lambda^{(M)} \rho_i} \right) \quad (27)$$

De las dos partes que componen esta variación, el término de mayor importancia es el primero y el segundo muchas veces puede despreciarse (en problemas lineales vale exactamente 0).

La variación del ángulo $\gamma_i^{(M)}$ resulta

$$\delta \gamma_i^{(M)} = r_i^{(M)} \delta (\Delta\phi_i) = r_i^{(M)} \left(\delta \beta^{(i)} - \delta \beta_i^{(M)} \right) \quad (28)$$

$$\delta \gamma_i^{(M)} = r_i^{(M)} \left(\lambda^{(M)} \rho_i \mathbf{t}^{(i)} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_{i_n}^{(i)} + \lambda^{(M)} \rho_i \mathbf{t}^{(M)} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_{i_n}^{(M)} \right) \quad (29)$$

donde los gradientes normales al lado calculados sobre el plano tangente a cada triángulo son (en forma estándar):

$$\delta \varphi_n^{(M)} = \frac{1}{2 \circ A^{(M)}} \left[c_1^{(M)}, c_2^{(M)}, c_3^{(M)} \right] \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}^1 \\ \delta \mathbf{u}^2 \\ \delta \mathbf{u}^3 \end{bmatrix} \quad (30)$$

con $c_l^{(M)}$ las proyecciones de los lados del triángulo principal sobre el versor a lo largo del lado $\circ \mathbf{s}_i$

$$\begin{aligned} c_1^{(M)} &= (\circ \varphi^3 - \circ \varphi^2) \cdot \circ \mathbf{s}_i \\ c_2^{(M)} &= (\circ \varphi^1 - \circ \varphi^3) \cdot \circ \mathbf{s}_i \\ c_3^{(M)} &= (\circ \varphi^2 - \circ \varphi^1) \cdot \circ \mathbf{s}_i \end{aligned} \quad (31)$$

y en forma similar para el elemento adyacente.

$$\delta \varphi_n^{(i)} = \frac{1}{2 \circ A^{(i)}} \left[c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, c_3^{(i)} \right] \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}^{(i)1} \\ \delta \mathbf{u}^{(i)2} \\ \delta \mathbf{u}^{(i)3} \end{bmatrix} \quad (32)$$

con $c_l^{(i)}$ las proyecciones de los lados del triángulo adyacente sobre el versor a lo largo del lado $-\circ \mathbf{s}_i$ y $\delta \mathbf{u}^{(i)j}$ la variación del desplazamiento del nudo j (numeración local sobre el elemento i). Por ejemplo para el triángulo adyacente al lado 1 (ver Figura 1)

$$\begin{aligned} c_1^{(1)} &= -(\circ \varphi^2 - \circ \varphi^3) \cdot \circ \mathbf{s}_1 \\ c_2^{(1)} &= -(\circ \varphi^4 - \circ \varphi^2) \cdot \circ \mathbf{s}_1 \\ c_3^{(1)} &= -(\circ \varphi^3 - \circ \varphi^4) \cdot \circ \mathbf{s}_1 \end{aligned} \quad (33)$$

De esta forma la variación del cambio de ángulo $\Delta \phi_i$ resulta

$$\begin{aligned} \delta (\Delta \phi_i) &= \frac{\lambda^{(M)} \rho_i}{2 \circ A^{(M)}} \left[c_1^{(M)}, c_2^{(M)}, c_3^{(M)} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{t}^{(M)} \cdot \delta \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{t}^{(M)} \cdot \delta \mathbf{u}^2 \\ \mathbf{t}^{(M)} \cdot \delta \mathbf{u}^3 \end{bmatrix} \\ &+ \frac{\lambda^{(i)} \rho_i}{2 \circ A^{(i)}} \left[c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, c_3^{(i)} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{t}^{(i)} \cdot \delta \mathbf{u}^{(i)1} \\ \mathbf{t}^{(i)} \cdot \delta \mathbf{u}^{(i)2} \\ \mathbf{t}^{(i)} \cdot \delta \mathbf{u}^{(i)3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (34)$$

con lo cual (27) puede escribirse

$$\delta \left(\frac{\gamma_i^{(M)}}{\lambda^{(M)} \rho_i} \right) = r_i^{(M)} \left[\mathbf{t}^{(M)} \cdot \delta \varphi_n^{(M)} + \mathbf{t}^{(i)} \cdot \delta \varphi_n^{(i)} \right] + \gamma_i^{(M)} \delta \left(\frac{1}{\lambda^{(M)} \rho_i} \right) \quad (35)$$

donde despreciaremos la influencia del segundo término en la evaluación de las fuerzas nodales equivalentes. Para problemas lineales, la expresión anterior resulta exactamente:

$$\delta \left(\frac{\gamma_i^{(M)}}{\lambda^{(M)} \rho_i} \right) = r_i^{(M)} \left[\mathbf{t}^{(M)} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_{r_n}^{(M)} + \mathbf{t}^{(i)} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_{r_n}^{(i)} \right] \quad (36)$$

que reemplazado en (11) permite calcular la variación de la curvatura en el elemento.

3. TRATAMIENTO DE RAMIFICACIONES EN LÁMINAS

El caso anterior puede verse como un caso particular (el más sencillo) de que en un lado se intersecten varias láminas (ramificación). En un caso general habrá n superficies (elementos) concurrentes al lado (s). Para simplificar la notación, supongamos que el lado intersección sea el primer lado (opuesto al primer nudo) de cada una de los elementos que se intersectan y que la orientación del lado sea el mismo para todos (ver Figura 4). Denominemos por J y K (fijos) a los nudos que definen el lado (en ese orden) y que el restante nudo de cada triángulo “ i ” sea precisamente el nudo “ i ” (genérico). En la configuración original el plano tangente a cada triángulo i queda definida por el versor tangente al lado común ${}^o\mathbf{s}$ (idénticamente orientado en todos los triángulos) y la normal al mismo (saliente)

$${}^o\mathbf{n}_i = {}^o\mathbf{s} \times {}^o\mathbf{t}^{(i)} \quad (37)$$

en función de la normal al triángulo ${}^o\mathbf{t}^{(i)}$. Las n normales ${}^o\mathbf{t}^{(i)}$ permiten definir $(n - 1)$ ángulos independientes entre los distintos triángulos ($i = 1 \dots n - 1$)

$$\cos {}^o\phi_i = {}^o\mathbf{t}^{(i)} \cdot {}^o\mathbf{t}^{(i+1)} = {}^o\mathbf{n}^{(i)} \cdot {}^o\mathbf{n}^{(i+1)} \quad (38a)$$

$$\sin {}^o\phi_i = {}^o\mathbf{n}^{(i)} \cdot {}^o\mathbf{t}^{(i+1)} = - {}^o\mathbf{t}^{(i)} \cdot {}^o\mathbf{n}^{(i+1)} \quad (38b)$$

lo cual puede complementarse con el ángulo entre el último y el primero (innecesario debido a la dependencia con los otros)

$$\phi_n = 2\pi - \text{mod} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \phi_i, 2\pi \right] \quad (39)$$

En la configuración deformada la dirección \mathbf{s} común a los distintos elementos será (cuyo estiramiento es ρ):

$$\mathbf{s} = \frac{\boldsymbol{\varphi}^K - \boldsymbol{\varphi}^J}{\|\boldsymbol{\varphi}^K - \boldsymbol{\varphi}^J\|} = \frac{\boldsymbol{\varphi}^K - \boldsymbol{\varphi}^J}{l_s} \quad (40)$$

que junto con la nueva normal a cada elemento $\mathbf{t}^{(i)}$ permite calcular la normal saliente al lado

$$\mathbf{n}^{(i)} = \mathbf{s} \times \mathbf{t}^{(i)} \quad (41)$$

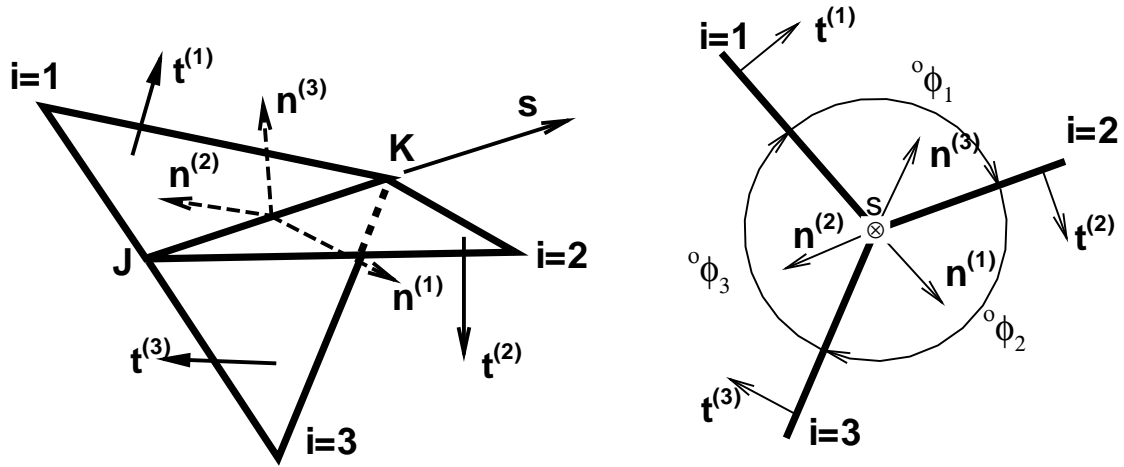


Figura 4: .

y con ellos los nuevos $n - 1$ ángulos

$$\begin{aligned}\cos \phi_i &= \mathbf{t}^{(i)} \cdot \mathbf{t}^{(i+1)} = \mathbf{n}^{(i)} \cdot \mathbf{n}^{(i+1)} \\ \sin \phi_i &= \mathbf{n}^{(i)} \cdot \mathbf{t}^{(i+1)} = -\mathbf{t}^{(i)} \cdot \mathbf{n}^{(i+1)}\end{aligned}\quad (42)$$

que ha cambiado respecto a los originales un valor

$$\Delta \phi_i = \phi_i - {}^o \phi_i \quad i = 1, n \quad (43)$$

Como no se tiene una referencia fija para medir el ángulo β_i rotado por cada elemento, se puede suponer que el primer elemento no rotó ($\beta^{(i)} = 0$) y con ello se calculan las rotaciones referidas a éste. Lo cual conduce a

$$\beta^{(i)} = \sum_{m=1}^{i-1} \Delta \phi_m \quad (44)$$

En forma similar a la expresión (25), la rotación del lado se define como el promedio ponderado

$$\bar{\beta} = \frac{1}{\sum_{l=1}^n R^{(l)}} \sum_{i=1}^n R^{(i)} \beta^{(i)} = \sum_{i=1}^n r^{(i)} \beta^{(i)} \quad (45)$$

con

$$r^{(i)} = \frac{R^{(i)}}{\sum_{l=1}^n R^{(l)}} \quad (46)$$

Denominando ahora con γ_i a la diferencia entre el ángulo (promedio) rotado por la arista y el ángulo rotado por el elemento

$$\gamma_i = \bar{\beta} - \beta^{(i)} \quad (47)$$

La expresión anterior (47) puede en general expresarse como:

$$\Gamma = \mathbf{C}_{n \times (n-1)} \Delta \phi_{n-1} \quad (48)$$

$$\gamma_i = C_{im} \Delta \phi_m \quad (49)$$

A partir de la definición de γ_i , el gradiente normal saliente al lado $\varphi_n^{(i)}$ en cada uno de los elementos concurrentes puede escribirse en sus componentes sobre una terna local

$$\varphi_n^{(i)} = \left(\varphi_n^{(i)} \cdot \mathbf{n}^{(i)} \right) \mathbf{n}^{(i)} + \left(\varphi_n^{(i)} \cdot \mathbf{s} \right) \mathbf{s} + \left(\varphi_n^{(i)} \cdot \mathbf{t}^{(i)} \right) \mathbf{t}^{(i)} \quad (50)$$

$$= \frac{\cos \gamma_i}{\lambda^{(i)} \rho} \mathbf{n}^{(i)} + a_{ns} \mathbf{s} + \frac{\sin \gamma_i}{\lambda^{(i)} \rho} \mathbf{t}^{(i)} \quad (51)$$

tomando la componente sobre la normal al elemento

$$\varphi_n^{(i)} \cdot \mathbf{t}^{(i)} = \frac{\sin \gamma_i}{\lambda^{(i)} \rho} \simeq \frac{\gamma_i}{\lambda^{(i)} \rho} \quad (52)$$

que reemplazada en (10) permite completar la evaluación de la curvatura en cada uno de los elementos concurrentes al lado.

Para evaluar las variaciones de la curvatura (11) debe calcularse la variación de la componente del gradiente normal al lado sobre la normal al elemento, que está compuesto de dos partes:

$$\delta \left(\varphi_n^{(i)} \cdot \mathbf{t}^{(i)} \right) = \delta \left(\frac{\gamma_i}{\lambda^{(i)} \rho} \right) \quad (53)$$

$$= \frac{1}{\lambda^{(i)} \rho} \delta \gamma_i + \gamma_i \delta \left(\frac{1}{\lambda^{(i)} \rho} \right) \quad (54)$$

donde nuevamente el término de importancia es el primero.

La variación del ángulo γ_i resulta de observar (49) y (42)

$$\begin{aligned} \delta \gamma_i &= C_{im} \delta \phi_j \quad i = 1, n \quad m = 1, n - 1 \\ &= \rho C_{im} \left[\lambda^{(m)} \mathbf{t}^{(m)} \cdot \delta \varphi_n^{(m)} + \lambda^{(m+1)} \mathbf{t}^{(m+1)} \cdot \delta \varphi_n^{(m+1)} \right] \end{aligned} \quad (55)$$

donde $\delta \varphi_n^{(m)}$ son las variaciones de los gradientes normales calculados sobre el plano tangente a cada triángulo, en forma estándar

$$\delta \varphi_n^{(m)} = \frac{1}{2A^{(m)o}} \left[c_m^{(m)}, c_J^{(m)}, c_K^{(m)} \right] \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}^m \\ \delta \mathbf{u}^J \\ \delta \mathbf{u}^K \end{bmatrix} \quad (56)$$

con $c_l^{(m)}$ las proyecciones de los lados de cada triángulo adyacente sobre el versor a lo largo del lado $^o s$

$$\begin{aligned} c_m^{(m)} &= ({}^o \varphi^K - {}^o \varphi^J) \cdot {}^o s = {}^o L_s \quad (\text{igual para todos los elementos}) \\ c_J^{(m)} &= ({}^o \varphi^m - {}^o \varphi^K) \cdot {}^o s \\ c_K^{(m)} &= ({}^o \varphi^J - {}^o \varphi^m) \cdot {}^o s \end{aligned} \quad (57)$$

De esta forma la variación del ángulo γ_i resulta

$$\begin{aligned} \delta\gamma_i &= \rho \sum_{m=1}^{n-1} C_{im} \left\{ \lambda^{(m)} \frac{1}{2A^{(m)o}} [c_m^{(m)}, c_J^{(m)}, c_K^{(m)}] \begin{bmatrix} \mathbf{t}^{(m)} \cdot \delta\mathbf{u}^m \\ \mathbf{t}^{(m)} \cdot \delta\mathbf{u}^J \\ \mathbf{t}^{(m)} \cdot \delta\mathbf{u}^K \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \lambda^{(m+1)} \frac{1}{2A^{(m+1)o}} [c_{m+1}^{(m+1)}, c_J^{(m+1)}, c_K^{(m+1)}] \begin{bmatrix} \mathbf{t}^{(m+1)} \cdot \delta\mathbf{u}^{m+1} \\ \mathbf{t}^{(m+1)} \cdot \delta\mathbf{u}^J \\ \mathbf{t}^{(m+1)} \cdot \delta\mathbf{u}^K \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (58)$$

Sin embargo la expresión anterior puede simplificarse recordando (47), con lo cual

$$\begin{aligned} \delta\gamma_i &= \delta\bar{\beta} - \delta\beta^{(i)} \\ &= \rho \left[\lambda^{(i)} \mathbf{t}^{(i)} \cdot \delta\varphi_n^{(i)} - \sum_{m=1}^n r^{(m)} \lambda^{(m)} \mathbf{t}^{(m)} \cdot \delta\varphi_n^{(m)} \right] \end{aligned} \quad (59)$$

con este resultado (27) resulta

$$\delta \left[\frac{\gamma_i}{\lambda^{(i)} \rho_i} \right] = \left[\mathbf{t}^{(i)} \cdot \delta\varphi_n^{(i)} - \frac{1}{\lambda^{(i)}} \sum_{m=1}^n r^{(m)} \lambda^{(m)} \mathbf{t}^{(m)} \cdot \delta\varphi_n^{(m)} \right] + \gamma_i \delta \left(\frac{1}{\lambda^{(i)} \rho_i} \right) \quad (60)$$

Notar que al utilizar a s como lado de referencia la variación de la rotación de cada elemento es

$$\delta\beta^{(i)} = -\mathbf{t}^{(i)} \cdot \delta\varphi_n^{(i)} \quad (61)$$

Esto permite evaluar las variaciones de las curvaturas en los distintos elementos utilizando la expresión genérica de tal variación (11), donde la forma de $\delta \left[\left(\lambda^{(i)} \rho_i \right)^{-1} \gamma_i \right]$ sobre cada uno de los lados dependerá de si el lado es parte de una única superficie (suave o no) (36) o corresponde a una línea de ramificación (60). En la notación habitual del método de elementos finitos la variación de las curvaturas puede escribirse como:

$$\delta\kappa = \mathbf{B}_b \delta\mathbf{u}^p \quad (62)$$

Es necesario notar que dicha variación depende de los nudos de todos los elementos que tienen un lado común con el elemento de referencia. El vector $\delta\mathbf{u}^p$ agrupa entonces en un elemento sin ramificaciones a los 6 nudos incluidos en la parcela de la Figura (1) y cuando hay un lado ramificado a 4 más el número de elementos que comparten el lado. Naturalmente el tamaño de la matriz de rigidez de cada elemento concurrente depende del número de incógnitas agrupadas en $\delta\mathbf{u}^p$.

4. VARIACIÓN DEL ÁNGULO γ EN EL ELEMENTO EBST

En la referencia¹⁵ se ha desarrollado un elemento similar al BST pero en base al concepto de deformaciones impuestas. La principal ventaja de este nuevo elemento (EBST) es que presenta un comportamiento membranar similar al triángulo de deformación lineal a diferencia del elemento BST que utiliza el triángulo de deformación constante. Para ver como aplicar algunas de las ideas anteriores al elemento EBST, recordemos primero como se calculan las curvaturas en dicho elemento.

La evaluación de la curvatura responde a la misma expresión presentada antes.

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{12} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} = \frac{-1}{oA} \sum_{i=1}^3 o l_i \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \\ n_2 & n_1 \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \varphi_{i1} \cdot \mathbf{t}^{(M)} \\ \varphi_{i2} \cdot \mathbf{t}^{(M)} \end{bmatrix}_i \quad (63)$$

La diferencia reside en la forma de evaluar el gradiente en la mitad de cada lado. En este caso se propone una interpolación cuadrática en base a los seis nudos involucrados en una parcela normal (ver Figura 1.b)

$$\varphi = \sum_{I=1}^6 N^I(\eta_1, \eta_2) \varphi^I \quad (64)$$

con

$$\begin{aligned} N^1 &= \eta_3 + \eta_1 \eta_2 & N^4 &= \frac{\eta_3}{2} (\eta_3 - 1) \\ N^2 &= \eta_1 + \eta_2 \eta_3 & N^5 &= \frac{\eta_1}{2} (\eta_1 - 1) \\ N^3 &= \eta_2 + \eta_3 \eta_1 & N^6 &= \frac{\eta_2}{2} (\eta_2 - 1) \end{aligned} \quad (65)$$

Como se ve en el desarrollo de este elemento,¹⁵ en cada lado el gradiente queda definido exclusivamente en función de los cuatro nudos asociados a los dos elementos adyacentes al lado i (el superíndice entre paréntesis indica ahora evaluado a la mitad del lado i)

$$\begin{bmatrix} \varphi_{i1} \\ \varphi_{i2} \end{bmatrix}^{(i)} = \begin{bmatrix} N_{i1}^1 & N_{i1}^2 & N_{i1}^3 & N_{i1}^{i+3} \\ N_{i2}^1 & N_{i2}^2 & N_{i2}^3 & N_{i2}^{i+3} \end{bmatrix}^{(i)} \begin{bmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \\ \varphi^3 \\ \varphi^{i+3} \end{bmatrix} \quad (66)$$

Similarmente al BST cuando se resuelve este gradiente en las dos direcciones locales (\mathbf{n}, \mathbf{s}) al lado se anula el producto

$$\varphi_{i_s}^{(i)} \cdot \mathbf{t}^{(M)} = 0$$

pues

$$\varphi_{i_s}^{(i)} = \frac{1}{o l_s} (\varphi^K - \varphi^J)$$

Es decir que podría utilizarse una expresión similar a (8)

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{12} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} = 4 \text{ } ^oA \sum_{i=1}^3 \frac{1}{o l_i} \begin{bmatrix} -(L_{i_1}^i)^2 \\ -(L_{i_2}^i)^2 \\ 2L_{i_1}^i L_{i_2}^i \end{bmatrix} \left(\boldsymbol{\varphi}_{i_n}^{(i)} \cdot \mathbf{t}^{(M)} \right) \quad (67)$$

las diferencias con (8) son que hay un factor 4 y no un 2, el signo (−) se mantiene pues ahora $\boldsymbol{\varphi}_{i_n}^{(i)}$ no es la componente del gradiente del elemento adyacente en la dirección saliente a su contorno, sino que es la componente saliente al elemento principal. A su vez interpretando la proyección del gradiente normal al contorno sobre la normal al elemento como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_{i_n}^{(i)} \cdot \mathbf{t}^{(M)} &= - \left(\rho \lambda^{(i)} \right)^{-1} \sin \left(\mathbf{n}^{(i)} \cdot \mathbf{t}^{(M)} \right) = \left(\rho \lambda^{(i)} \right)^{-1} \sin \gamma_i \\ &\cong - \left(\rho \lambda^{(i)} \right)^{-1} \gamma_i \equiv - \left(\rho \lambda^{(M)} \right)^{-1} \gamma_i \end{aligned} \quad (68)$$

permite recuperar la expresión (10). En esta última expresión el ángulo γ_i se interpreta como el ángulo que forma $\boldsymbol{\varphi}_{i_n}^{(i)}$ con el plano tangente al elemento principal. Para el caso de superficies inicialmente curvas γ_i no es nulo y existen curvaturas iniciales. Es también factible reinterpretar γ_i como el cambio de ángulo entre las configuraciones original y deformada y despreciar la influencia de las curvaturas iniciales en la evaluación del gradiente de deformación en puntos fuera de la superficie media, en forma similar a lo hecho anteriormente. Finalmente es posible tener en cuenta las diferentes rigideces de los elementos adyacentes y afectar del factor $r_i^{(M)}$ definido antes al valor de $2\gamma_i$ a los fines de calcular las curvaturas.

Para evaluar las variaciones de la curvatura (11) debe calcularse la variación de la componente sobre la normal al elemento del gradiente normal

$$\delta \left(\frac{\gamma_i}{\lambda^{(M)} \rho_i} \right) = \frac{1}{\lambda^{(M)} \rho_i} \delta \gamma_i + \gamma_i \delta \left(\frac{1}{\lambda^{(M)} \rho_i} \right) \quad (69)$$

La variación del ángulo γ_i resulta (con $\mathbf{t}^{(i)}$, la normal al plano tangente en el lado i)

$$\delta \gamma_i = \lambda^{(M)} \rho_i \mathbf{t}^{(i)} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_{i_n}^{(i)} \quad (70)$$

donde el gradiente normal al lado calculado sobre el plano tangente es:

$$\delta \boldsymbol{\varphi}_{i_n}^{(i)} = \left[N_{i_n}^1 \quad N_{i_n}^2 \quad N_{i_n}^3 \quad N_{i_n}^{i+3} \right]^{(i)} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}^1 \\ \delta \mathbf{u}^2 \\ \delta \mathbf{u}^3 \\ \delta \mathbf{u}^{i+3} \end{bmatrix} \quad (71)$$

con $N_{i_n}^J$ son las derivadas de las funciones de forma en la dirección normal al contorno

De esta forma la variación del ángulo γ_i resulta

$$\delta(\gamma_i) = \lambda^{(M)} \rho_i \left[N_{/n}^1 \quad N_{/n}^2 \quad N_{/n}^3 \quad N_{/n}^{i+3} \right]^{(i)} \begin{bmatrix} \mathbf{t}^{(i)} \cdot \delta \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{t}^{(i)} \cdot \delta \mathbf{u}^2 \\ \mathbf{t}^{(i)} \cdot \delta \mathbf{u}^3 \\ \mathbf{t}^{(i)} \cdot \delta \mathbf{u}^{I+3} \end{bmatrix} \quad (72)$$

Al igual que en el elemento BST, la interpolación cuadrática utilizada en el elemento EBST supone que la superficie es suave y con una adecuada discretización a los fines de modelar curvaturas pronunciadas, sean estas iniciales o que se produzcan durante el proceso de deformación. En los casos de quiebres y ramificaciones, los elementos en que uno de sus lados forma parte de una línea de quiebre o intersección de superficies, pueden tratarse en base a lo dicho para el elemento BST.

5. EJEMPLOS

En esta sección se presentan algunos ejemplos a los fines de evaluar el comportamiento de la formulación presentada para la evaluación de las curvaturas en láminas con quiebres y ramificaciones cuando se usan elementos sin grados de libertad rotacionales. El elemento implementado se denomina BBST (de su acrónimo en inglés Branching Basic Shell Triangle) utiliza como parte membranal y flexional las correspondientes al elemento EBST (Enhanced Basic Shell Triangle) en las zonas donde la superficie es suave. En todos los casos la matriz de rigidez y las fuerzas residuales se integran con un único punto en el área del elemento y cuatro en el espesor. Los resultados presentados han sido obtenidos con un programa implícito desarrollado por el autor, salvo el último ejemplo donde debido a la existencia de contacto entre superficies y un comportamiento elasto-plástico se ha utilizado un programa con integración explícita de las ecuaciones de movimiento.²¹

5.1. Voladizo con sección Z

Este es un *benchmark* recomendado por NAFEMS.²⁰ Corresponde a una viga en voladizo de sección abierta en forma de Z sometida a un momento torsor de 1,2 MN-m aplicado en el extremo libre. El momento torsor se aplica por dos fuerzas de corte de 0,6 MN uniformemente distribuidas sobre cada flanco (Figura 5). El material es elástico lineal con un módulo de elasticidad de $E = 210$ GPa y una relación de Poisson $\nu = 0,3$. El espesor de la lámina es $t = 0,1$ m. La solución objetivo es la tensión axial $\sigma_{xx} = -108$ MPa en la superficie media del punto A.

Se han considerado dos mallas una relativamente gruesa con 96 elementos (8 en la dirección longitudinal y 2 por tramo en la dirección transversal) y una malla fina de 960 elementos (32 en la dirección longitudinal y 5 por tramo en la dirección transversal). Los valores obtenidos son $\sigma_{xx} = -95,3$ MPa ($-11,8\%$) y $\sigma_{xx} = -106,3$ MPa ($-1,6\%$) respectivamente para la malla gruesa y la malla fina. Los valores indicados se obtienen por extrapolación desde los cuatro puntos de Gauss más cercanos al punto A. El programa ABAQUS¹⁹ usando la malla fina reporta para tres variantes de elementos cuadriláteros de cuatro nudos (S4R, S4RS y S4RSW)

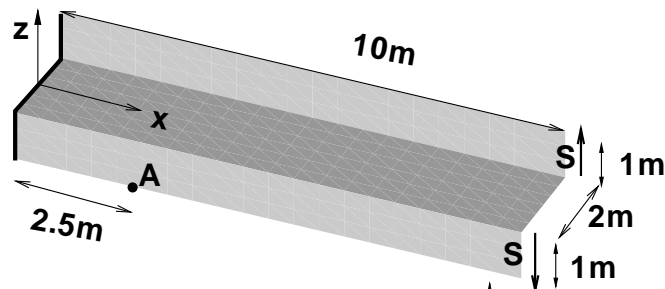


Figura 5: Voladizo con sección Z. Geometría

un valor $\sigma_{xx} = -100,3MPa$ ($-7,1\%$) y una convergencia lenta a medida que se refina la malla. Notar que los elementos indicados de ABAQUS incluyen además grados de libertad rotacionales, lo cual prácticamente duplica el número de grados de libertad involucrados. Por otro lado debe notarse que los quiebres de 90 grados que aparecen en la geometría no permiten un uso confiable de los elementos BST y EBST que están desarrollados con la hipótesis de superficies suaves.

5.2. Lámina de revolución ramificada

En este tercer ejemplo se ha considerado el caso de una lámina ramificada a los fines de observar el comportamiento cuando en una arista concurren más de dos elementos. La Figura 6.a muestra la geometría del problema. Los espesores son diferentes en las tres partes que conforman la lámina. El material es isótropo con $E = 10^7$ y $\nu = 0,3$. Tanto el domo como el cilindro inferior están sometidos a presión interna $P = 1000$, la cual es equilibrada por partes iguales en cada extremo del cilindro.

Para la discretización se utilizaron dos mallas sobre un cuarto de la geometría. En ambos casos el domo se discretizó con 648 elementos (36 elementos a lo largo de la unión, equivalente a un elemento cada 2,5 grados). La malla más fina tiene 864 elementos en el cilindro superior y 1728 en el cilindro superior con espaciamiento uniforme a lo largo del meridiano (12 elemento en el cilindro superior y 24 en el inferior). La malla mas gruesa tiene exactamente la mitad de elementos con espaciamiento uniforme a lo largo del meridiano (6 elemento en el cilindro superior y 12 en el inferior). En la Figura 6.b se ha graficado el desplazamiento normal al cilindro. Se compara con una solución por elementos finitos convergida¹⁸ (es también posible obtener una solución analítica). Puede verse que incluso para la malla mas gruesa (18 elementos a lo largo del meridiano del cilindro, BBST-18) los resultados concuerdan muy bien.

5.3. Puente curvo de sección celular

En este ejemplo se estudia el comportamiento de un puente celular simplemente apoyado en los extremos (se restringen los desplazamientos en el plano de la sección). Esta estructura ha sido analizada en²³ evaluando sus modos y frecuencias naturales y en²² bajo una carga puntual en el centro, en ambos casos utilizando la técnica de bandas finitas. La Figura 7 muestra la

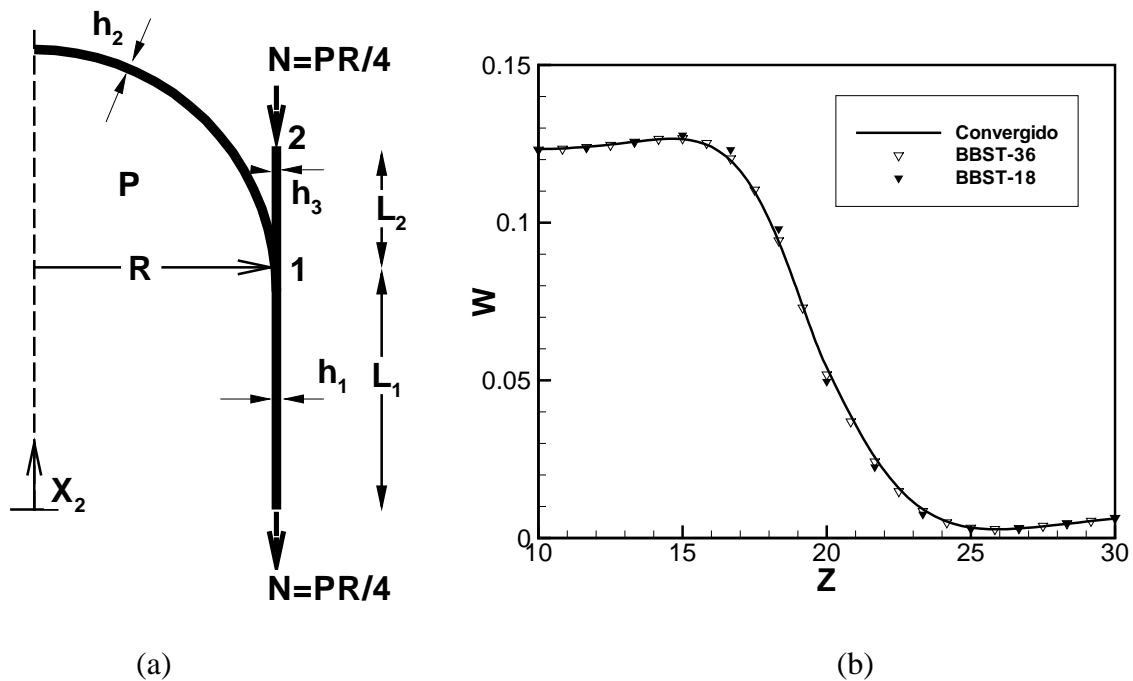


Figura 6: Cáscara ramificada de Krauss (a) geometría $R = 20$, $L_1 = 20$, $L_2 = 10$, $h_1 = 0,3$, $h_2 = 0,4$, y $h_3 = 0,5$ (b) desplazamiento normal a la pared del cilindro

sección transversal y las propiedades del material. El puente se extiende sobre un ángulo de un radián, el radio del eje del puente es de 30,1 m y en los extremos se suponen restringidos todos los desplazamientos en el plano de la sección y libres los desplazamientos longitudinales.

El puente ha sido sometido a una carga puntual $P = 1000$ kN en el centro. Se ha discretizado la mitad de la luz con 10 elementos en tal dirección, en tanto que en la sección se han incluido 34 elementos con un total de 680 elementos y 363 nudos. Se ha comparado con resultados obtenidos con el programa ABAQUS usando elementos de láminas S4 (cuadriláteros de cuatro nudos) sobre la misma discretización usada para el presente elemento

En la Figura 8 se han graficado la deformada de la sección central, los resultados obtenidos con casi idénticos a los obtenidos con el elemento S4.

5.4. Pandeo de una columna con auto-contacto

Este ejemplo ilustra el pandeo de una columna entre dos platos rígidos. La columna tiene sección en forma de cruz. Los extremos de las columnas están unidos a dos platos rígidos. Uno de los platos está fijo en el espacio y el otro se traslada y rota durante 7 mseg para pandear la columna.

La columna está hecha de acero, con un módulo de elasticidad de 200 GPa y coeficiente de Poisson 0,3. La densidad es 7850 kg/m³. El comportamiento elasto-plástico está gobernado por la función de fluencia de von-Mises con un valor límite inicial de $\sigma_o = 250$ MPa y

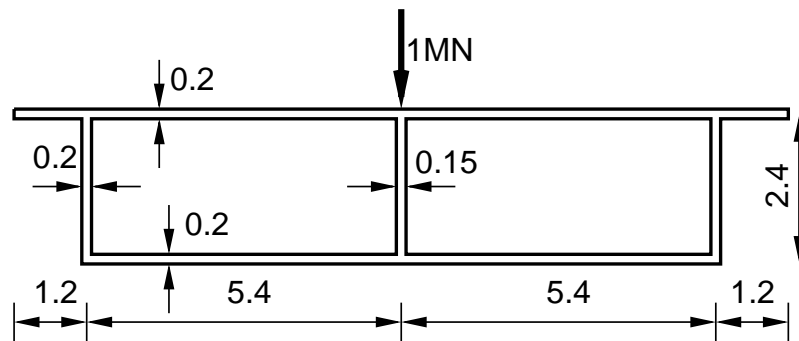


Figura 7: Puente curvo celular bajo carga puntual. Geometría de la sección transversal. $E = 25 \text{ GPa}$, $\nu = 0,15$, $R = 30,1 \text{ m}$, ángulo= 1 rad

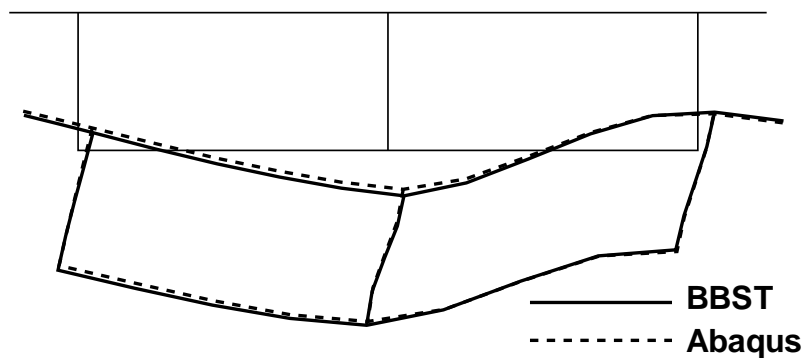


Figura 8: Puente curvo celular bajo carga puntual. Deformada de la sección central

endurecimiento isótopo lineal $\sigma'_y = 450 \text{ MPa}$.

El plato móvil se mueve verticalmente a una velocidad uniforme de 50 m/seg y rota alrededor del eje y a una velocidad de $78,54 \text{ rad/seg}$ (ángulo final $31,5^\circ$). En la figura 9.a se ve la geometría original y la malla utilizada de 441 nudos y 800 elementos. En las figuras 9.b y c se ven las configuraciones deformadas a la mitad y al final del proceso. Este ejemplo ha sido tomado del manual de ejemplos de ABAQUS, uno de los principales aspectos a considerar es el auto-contacto de la lámina y con los platos. Las configuraciones obtenidas con el presente elemento y las obtenidas con el elemento S4R son muy similares. Para este ejemplo se utiliza un programa con integración explícita de las ecuaciones de movimiento²¹

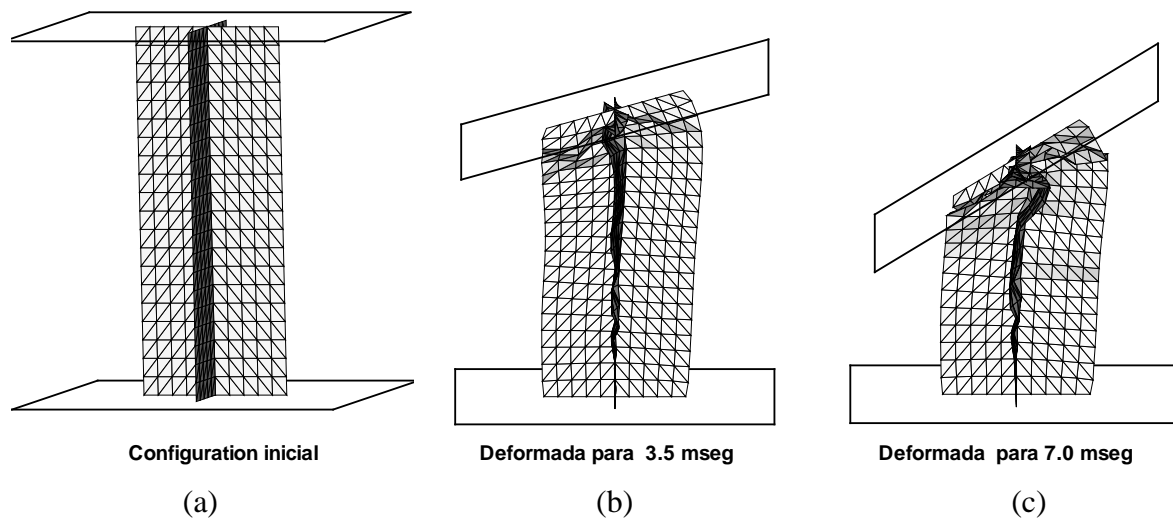


Figura 9: Pandeo de una columna con sección cruz

6. CONCLUSIONES

Se ha presentado un elemento finito para el análisis no lineal con grandes deformaciones de láminas tridimensionales. La principal característica del elemento es que no tiene grados de libertad de rotación y calcula las curvaturas en función de la geometría de los elementos vecinos. En los ejemplos presentados se ve que el elemento converge a la solución correcta en todos los casos y que es capaz de tratar láminas no suaves y ramificadas. El elemento ha sido probado con muy buenos resultados en problemas con plasticidad en grandes deformaciones, incluyendo contacto con fricción, distintas condiciones de contorno y carga.

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece el apoyo financiero de CONICET (Argentina). La utilización del programa Stampack ha sido posible gracias al apoyo de la empresa Quantech ATZ.

REFERENCIAS

- [1] A.C. Ugural. *Stresses in Plates and Shells*, McGraw Hill, Nueva York, 1981.
- [2] D. Bushnell y B.O. Almroth, "Finite difference energy method for non linear shell analysis", *J. Computers and Structures*, Vol. **1**, 361, 1971.
- [3] D. Bushnell, "Computerized analysis of shells—governing equations", *J. Computers and Structures*, Vol. **18**(3), 471-536, 1984.
- [4] R.A. Nay y S. Utku. "An alternative to the finite element method". *Variational Methods Eng.*, Vol. **1**, 1972.
- [5] M.R. Barnes. Form finding and analysis of tension space structures by dynamic relaxation. *Ph.D. Tesis*, Department of Civil Engineering, The City University, Londres, 1977.
- [6] J.K. Hampshire, B.H.V. Topping y H.C. Chan. "Three node triangular elements with one

- degree of freedom per node". *Engng. Comput.* Vol. **9**, pp. 49–62, 1992.
- [7] R. Phaal y C.R. Calladine. "A simple class of finite elements for plate and shell problems. II: An element for thin shells with only translational degrees of freedom". *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **5**, pp. 979–996, 1992.
- [8] E. Oñate y M. Cervera. "Derivation of thin plate bending elements with one degree of freedom per node". *Engineering Computations*, Vol. **10**, pp 553–561, 1993.
- [9] G. Rio, B. Tathi y H. Laurent. "A new efficient finite element model of shell with only three degrees of freedom per node. Applications to industrial deep drawing test." in *Recent Developments in Sheet Metal Forming Technology*, Ed. M.J.M. Barata Marques, 18th IDDRG Biennial Congress, Lisboa, 1994.
- [10] M. Brunet y F. Sabourin. "Prediction of necking and wrinkles with a simplified shell element in sheet forming." *Int. Conf. of Metal Forming Simulation in Industry*, Vol. II, pp. 27–48, B. Kröplin (Ed.), 1994.
- [11] F. Cirak y M. Ortiz. "Fully C^1 -conforming subdivision elements for finite deformations thin-shell analysis." *Int. J. Num. Meths in Engng*, vol. **51**, 813-833, 2001.
- [12] E. Oñate y F. Zárate. "Rotation-free plate and shell triangles." *Int. J. Num. Meths in Engng*, Vol. **47**, pp. 557-603, 2000.
- [13] F.G. Flores y E. Oñate. "A basic thin shell triangle with only translational DOFs for large strain plasticity." *Int. J. Num. Meths in Engng*, Vol. **51**, pp. 57-83, 2001.
- [14] E. Oñate, P. Cendoya y J. Miquel. "Non linear explicit dynamic analysis of shells using the BST rotation-free triangle." *Engineering Computations*, vol. **9**(6), 662–706, 2002.
- [15] F.G. Flores y E. Oñate. "Improvements in the membrane behaviour of the three node rotation-free BST shell triangle using an assumed strain approach." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. **194**, 999–999, 2005.
- [16] F.G. Flores y E. Oñate. "Rotation-free finite element for the non-linear analysis of beam, frames and axisymmetric shells. " Enviado para su posible publicación.
- [17] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The finite element method. Solid Mechanics*. Vol II, Butterworth-Heinemann, 2000.
- [18] F.G. Flores y L.A. Godoy. "Finite Element Applications to the Internal Pressure Loadings on Spherical Shells and other Shells of Revolution." *Finite Element Analysis of Thin Walled Structures* (Editor John Bull), Barking (Inglaterra), Cap.9 pp. 259-296, 1990.
- [19] Hibbit, Karlson and Sorensen Inc., *ABAQUS, version 6.4.2 (student edition)*, Pawtucket, EE.UU., 2003.
- [20] National Agency for Finite Element Methods and Standards (U.K.) *The standard NAFEMS Benchmarks*, Ensayo LE5 de la publicación TNSB, Rev. 3, Octubre, 1990.
- [21] STAMPACK. version 6.0.0 *A General Finite Element System for Sheet Stamping and Forming Problems*, Quantech ATZ, Barcelona, España, (www.quantech.es), 2004.
- [22] E. Oñate, *Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos*, CIMNE, Barcelona, 1992.
- [23] Y.K. Cheung *Finite strip method in structural analysis*, Pergamon, Oxford, 1976.