

INFLUENCIA DE LAS DEFORMACIONES EN MODELOS DINAMICOS DE TRENES DE ENGRANAJES

José Risso y Alberto Cardona

*Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería, CIMEC-INTEC /
UNL-CONICET, Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina, jrisso@intec.unl.edu.ar*

Palabras clave: Elemento de engranaje, desalineación, modelos de mecanismos.

Resumen. Los trenes de engranajes son utilizados masivamente en sistemas de transmisión de potencia mecánica. Aun cuando las carcasas y los ejes utilizados son generalmente muy rígidos, cuando se aplican torques y fuerzas externas sobre el tren de engranajes todos sus componentes sufren pequeñas deformaciones. Para mejorar los resultados de los análisis numéricos, deben considerarse estas deformaciones y sus efectos en el contacto entre engranajes. Este trabajo presenta un elemento de engranaje modificado para modelar el efecto de desalineaciones y desplazamientos de ejes sobre la cinemática del mecanismo y los esfuerzos transmitidos. Teniendo en cuenta el efecto de asentamiento que se logra luego de las etapas iniciales de marcha, se comparan modelos teóricos y empíricos para describir los perfiles de presiones de contacto que resultan de la desalineación entre ruedas dentadas. El efecto de las modificaciones introducidas se describe en algunos casos de ejemplo. Finalmente se detallan algunas conclusiones y oportunidades de mejora para la formulación implementada.

1. INTRODUCCIÓN

El análisis dinámico de trenes de engranajes ha sido objeto de múltiples estudios durante las últimas décadas (Gregory et al. (1963); Kubo et al. (1972); Özgüven and Houser (1988); Rama Mohana Rao and Muthuveerappan (1993); Vedmar and Henriksson (1998); Ajmi and Velex (2005)). Los modelos matemáticos utilizados van desde sistemas con un único grado de libertad hasta modelos 3D. El análisis 3D del contacto entre dientes de engranajes tiene un costo computacional demasiado alto para su implementación en programas multipropósito para análisis de mecanismos flexibles, donde los engranajes deben ser modelados como juntas flexibles capaces de representar el movimiento tridimensional de los engranajes teniendo en cuenta los efectos elásticos, de amortiguamiento, fricción, etc. (Cardona (1995, 1997)).

La importancia de la desalineación y los errores de transmisión en la generación de vibraciones, ruido y sobrecargas dinámicas en este tipo de mecanismos ha sido reconocida desde hace mucho tiempo por los constructores de máquinas. El objetivo de este trabajo es incluir el efecto de la desalineación y el cambio de la distancia entre centros en la formulación del elemento de engranaje desarrollada por Cardona (1995, 1997), para el caso de engranajes cilíndricos.

La sección 2 es dedicada al análisis de variaciones en el huelgo circunferencial y los ángulos de presión y de hélice. En la sección 3 se analizan los momentos adicionales que aparecen debido a la desalineación de los ejes. La sección 4 muestra algunos resultados sobre modelos de ensayo. Finalmente, en la sección 5 se presentan algunas conclusiones y futuros desarrollos.

2. VARIACIONES DE HUELGO CIRCUNFERENCIAL, ÁNGULOS DE PRESIÓN Y HÉLICE

En el dentado de evolvente, el ángulo de presión se define como el ángulo entre la línea tangente a ambos círculos base y una perpendicular a la línea que conecta los centros de las ruedas dentadas. Como se muestra en la figura 1, siendo constantes los radios de ambos círculos base, las variaciones en la distancia entre centros producen una variación en el ángulo de presión, que puede expresarse como:

$$\frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} = \frac{a}{a_0} \quad (1)$$

donde α_0 y a_0 son el ángulo de presión y la distancia entre centros nominales, siendo α y a sus valores instantáneos.

En engranajes helicoidales, el ángulo de hélice efectivo cambia con la distancia entre centros, como se muestra esquemáticamente en la figura 2. La relación entre ambos parámetros puede expresarse como :

$$\frac{\tan \beta_0}{\tan \beta} = \frac{a_0}{a} \quad (2)$$

donde β_0 es el ángulo de hélice nominal y β es el valor instantáneo del ángulo de hélice.

Otro efecto producido por la modificación en la distancia entre centros es la variación del huelgo circunferencial entre dientes. Definiendo g_0 como el huelgo nominal (o de diseño), el huelgo efectivo g resulta:

$$g = g_0 + \pi m \left(\frac{a}{a_0} - 1 \right) + 2a_x (\text{inv } \alpha_0 - \text{inv } \alpha) \quad (3)$$

donde (inv) representa a la función evolvente y m es el módulo del dentado.

La distancia nominal entre centros se calcula como la suma de los radios primitivos de ambas ruedas dentadas $a_0 = r_{pA} + r_{pB}$. La distancia instantánea entre centros a puede calcularse

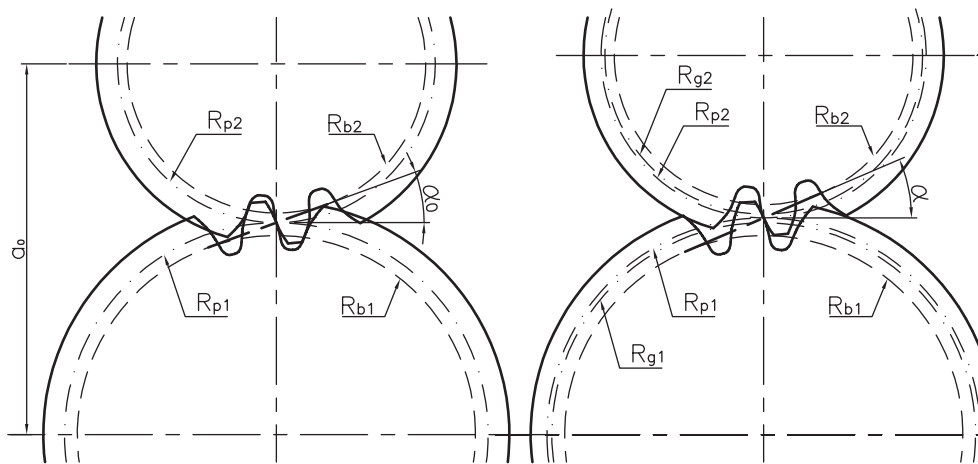


Figura 1: Variación del ángulo de presión

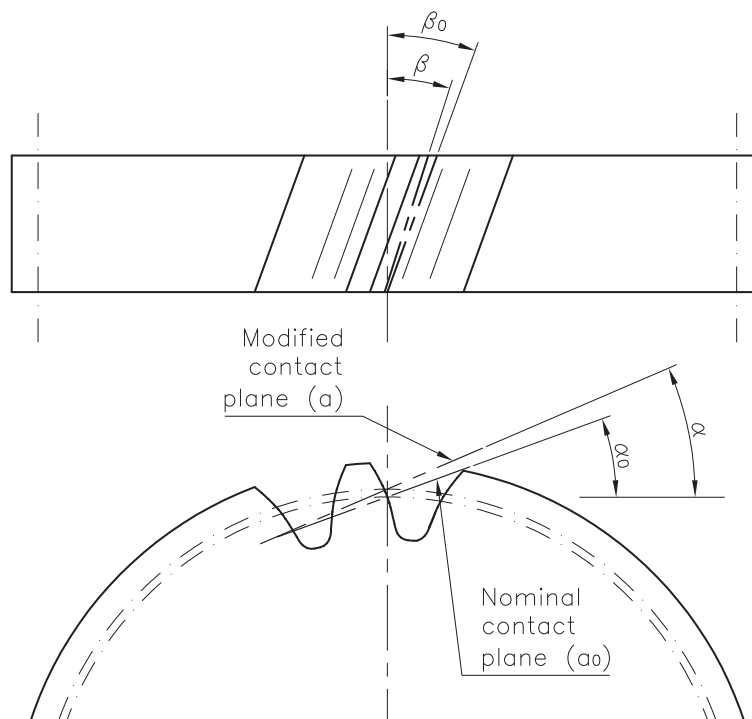


Figura 2: Variación del ángulo de hélice

en términos de las posiciones de los centros (grados de libertad explícitos del elemento de engranaje). Como las variaciones de ángulo son afectadas solamente por la componente radial del desplazamiento (y no por su componente axial), la distancia entre centros es proyectada sobre los ejes μ_2'' y ξ_2'' (figura 3).

Para calcular las fuerzas internas, el elemento de engranaje modificado utiliza las expresiones desarrolladas por Cardona (1995, 1997), incluyendo los ángulos efectivos calculados con las ecuaciones (1) y (2).

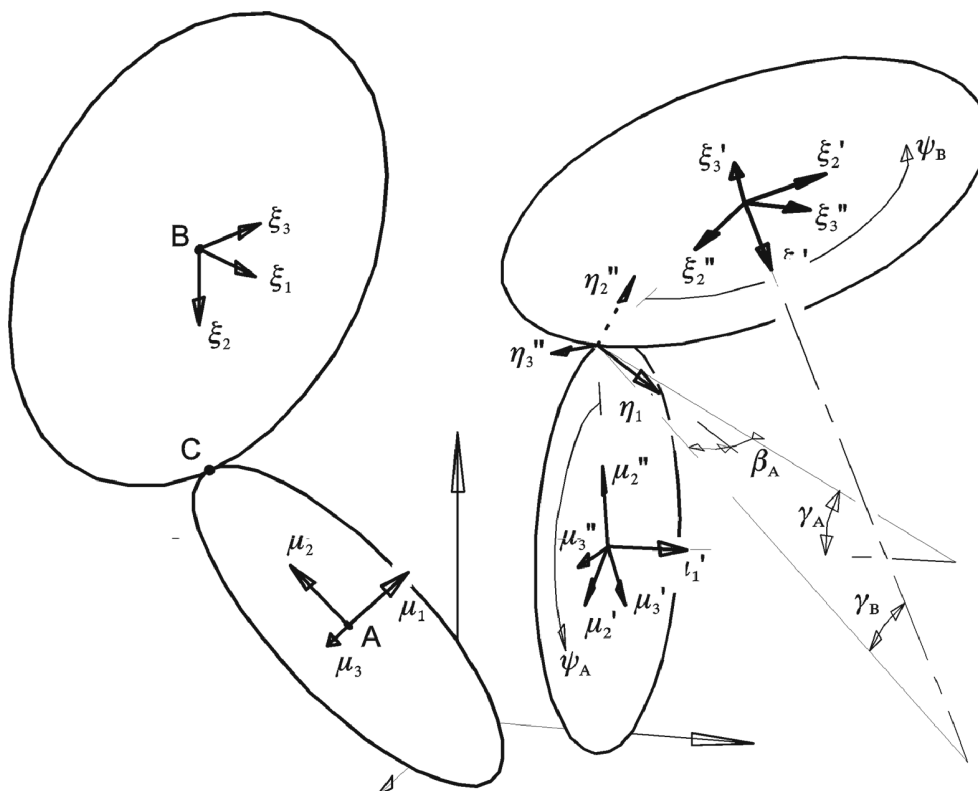


Figura 3: Sistemas de referencia locales

3. MOMENTOS ADICIONALES DEBIDOS A LA DESALINEACIÓN

En engranajes ideales, la presión de contacto entre dientes se distribuye uniformemente a lo largo del ancho de los mismos. Aún cuando se consideren efectos de borde, en ausencia de desalineaciones la presión de contacto se distribuye simétricamente respecto del plano medio de las ruedas, y no existen momentos actuando en el punto de contacto teórico entre las ruedas dentadas.

En presencia de desalineaciones –debidas a flexión de los árboles, desplazamientos de los apoyos, errores de fabricación, etc.– la presión de contacto se distribuye asimétricamente respecto del plano medio de la rueda. Dependiendo de la fuerza de contacto, la rigidez de los dientes y la desalineación, el area de contacto puede cubrir todo el ancho del diente o solo una parte del mismo.

Este efecto es considerado en normas internacionales como ISO 6336-1:1996 (1986) y ANSI/AGMA 2001-C95 (1995). La norma ISO utiliza un método simplificado consistente en

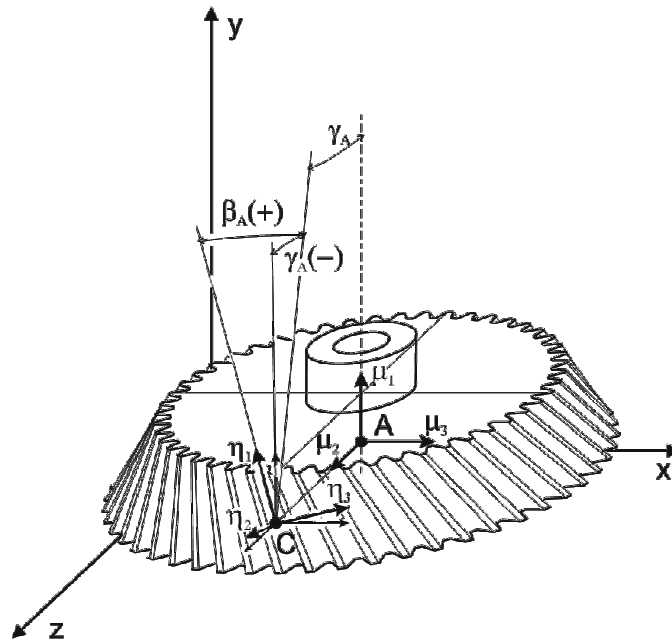


Figura 4: Definiciones de los ángulos de hélice y cono

suponer una distribución lineal de la presión de contacto. Este método no toma en cuenta el efecto del desgaste durante las primeras etapas del rodaje (al que llamaremos asentamiento).

Como es sugerido por ESDU (ESDU 88033 (1988)), una mejor aproximación a la distribución real de presiones de contacto es la definida por Niemann (1973), que asume una distribución parabólica e identifica dos casos, uno con contacto en todo el ancho del diente (asociado a altas cargas, pequeñas desalineaciones y baja rigidez de los dientes), y otro con contacto parcial (asociado con bajas cargas, grandes desalineaciones y alta rigidez de los dientes).

3.1. Contacto parcial

La distribución de presiones se describe como (Niemann (1973)):

$$p = p_{max} \left\{ 1 - \left[\frac{x + \frac{b}{2}}{b_c} \right]^3 \right\} \quad (4)$$

donde p es la presión de contacto, b el ancho total del diente, b_c el ancho de contacto y x la posición a lo largo del ancho del diente.

El ancho de contacto resulta:

$$b_c = \sqrt{\frac{4Pb}{3\varphi k}} \quad (5)$$

siendo P la fuerza total de contacto, φ el ángulo de desalineación y k la rigidez del diente.

La integración de la ecuación (4) a lo largo del ancho de contacto da como resultado la fuerza total de contacto, mientras que integrando la expresión px sobre el ancho de contacto se obtiene el momento adicional M generado por el desplazamiento axial de la fuerza de contacto resultante:

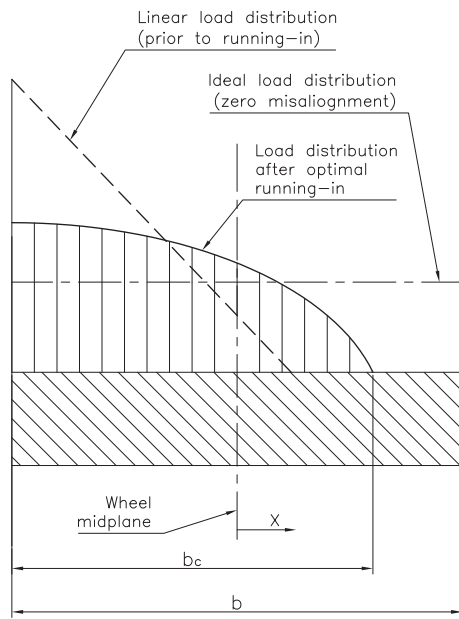


Figura 5: Distribución de presiones con contacto parcial

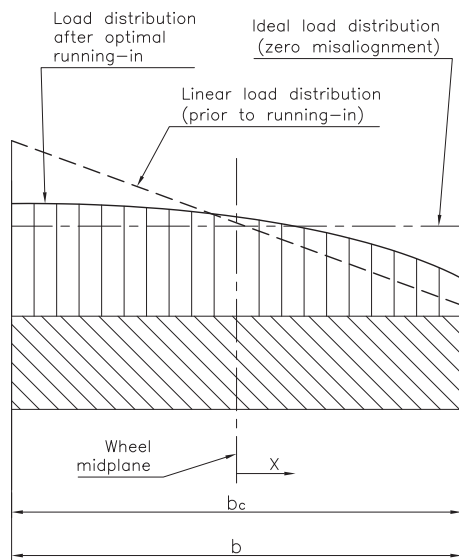


Figura 6: Distribución de presiones con contacto total

3.2. Contacto total

La distribución de presiones es descrita por (Niemann (1973)):

$$p = p_{max} \left[1 - \left(\frac{x + \frac{b}{2}}{b} \right)^3 \right] + p_{min} \left(\frac{x + \frac{b}{2}}{b} \right)^3 \quad (6)$$

Como en el caso de contacto parcial, integrando la ecuación (6) sobre el ancho del diente obtenemos la fuerza total de contacto P , e integrando px sobre el ancho del diente calculamos el momento M generado por el desplazamiento axial de la fuerza de contacto resultante:

3.3. Casos de desplazamiento de la fuerza resultante

El sentido del desplazamiento de la fuerza de contacto resultante es función del signo de la desalineación y del sentido de la fuerza de contacto entre dientes (o del signo del torque aplicado al par de ruedas dentadas).

Las figuras 12 y 18, incluidas en la sección 4, muestran un análisis del desplazamiento de la fuerza de contacto resultante en función de estos parámetros.

4. EJEMPLOS

4.1. Engranajes exteriores

4.1.1. Definición del modelo

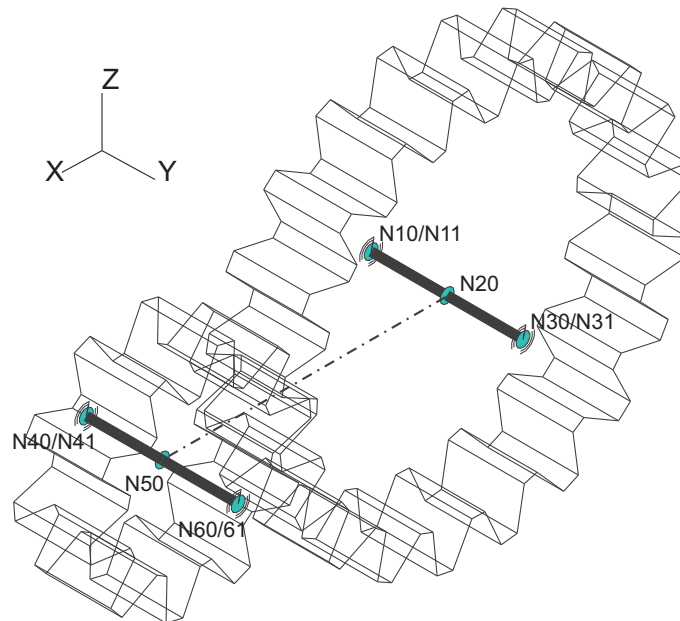


Figura 7: Modelo para análisis de engranajes exteriores

Para analizar el comportamiento del elemento de engranaje modificado, se utilizó el modelo descrito en la figura 7 .

Se utilizaron elementos rígidos para modelar los árboles, para obtener desalineaciones entre ruedas controladas, que solo dependen del desplazamiento del extremo de dichos árboles. En-

Nodo	x	y	z
10/11/12	0.000	0.000	0
20	0.000	0.020	0
30/31	0.000	0.040	0
40/41/42	0.075	0.000	0
50	0.075	0.020	0
60/61	0.075	0.020	0

Tabla 1: Coordenadas nodales

Elemento	Tipo	Nodos
1	RIGID	10/20
2	RIGID	20/30
5	RIGID	40/50
6	RIGID	50/60
11	HINGE	11/10/12
31	HINGE	31/30
41	HINGE	41/40/42
61	HINGE	61/60
91	GEAR	20/50

Tabla 2: Definición de elementos

tre los nodos centrales de cada árbol se definió un elemento de engranaje. Los parámetros de definición de nodos y elementos se listan en los cuadros 1, 2 y 3.

Se realizó un análisis estacionario, por lo que el tiempo se indica al solo efecto de identificar los diversos instantes en la evolución del análisis.

4.1.2. Cargas aplicadas y desplazamientos prescritos

En el instante 0, los engranajes están ubicados en sus posiciones nominales, sin carga aplicada.

Entre los tiempos 0 y 0.1, se aplica una rotación de 1 radian sobre el primer árbol (elemento hinge 11) y un torque de -1000 [Nm] sobre el segundo árbol (elemento hinge 41).

Entre 0.1 y 0.2, la distancia entre centros se incrementa 1 mm (desplazando los nodos 41 y 61 en la dirección X positiva), y el segundo engranaje se desplaza 2 mm sobre el eje de su árbol (desplazando los nodos 41 y 61 en dirección Y positiva). Entre los tiempos 0.2 y 0.3 los nodos 41 y 61 regresan a sus posiciones originales, y la distancia entre centros recupera su valor nominal.

Entre 0.3 y 0.4 se impone una desalineación desplazando 1 mm en la dirección Z positiva al

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
Número de dientes ZA	20	Número de dientes ZB	10
Módulo normal M	0.004698	Angulo de presión nominal PALP	20
Rigidez del diente KR	1.E8	Ancho del diente TTOOTH	0.020
Angulo de hélice HELA	20	Angulo de hélice HELB	-20
Huelgo nominal GAP	0.00005	Angulo de cono CONA / CONB	0

Tabla 3: Parámetros del elemento de engranaje

nodo 61.

Entre 0.4 y 0.5 el momento aplicado al segundo árbol cambia a -100 [Nm], alcanzando un valor de +1000 [Nm] en el instante 0.6.

Entre los tiempos 0.6 y 0.8 se invierte el sentido de la desalineación, desplazando 1 mm en la dirección Z negativa al nodo 61.

Entre 0.8 y 0.9 el torque sobre el segundo árbol se reduce a 100, pasando a un valor de -1000 [Nm] al final del análisis.

Finalmente, entre los tiempos 0.9 y 0.95 la rotación impuesta al primer árbol retorna a cero, manteniendo este valor hasta el final del análisis.

La figura 8 muestra la evolución de cargas y desplazamientos impuestos.

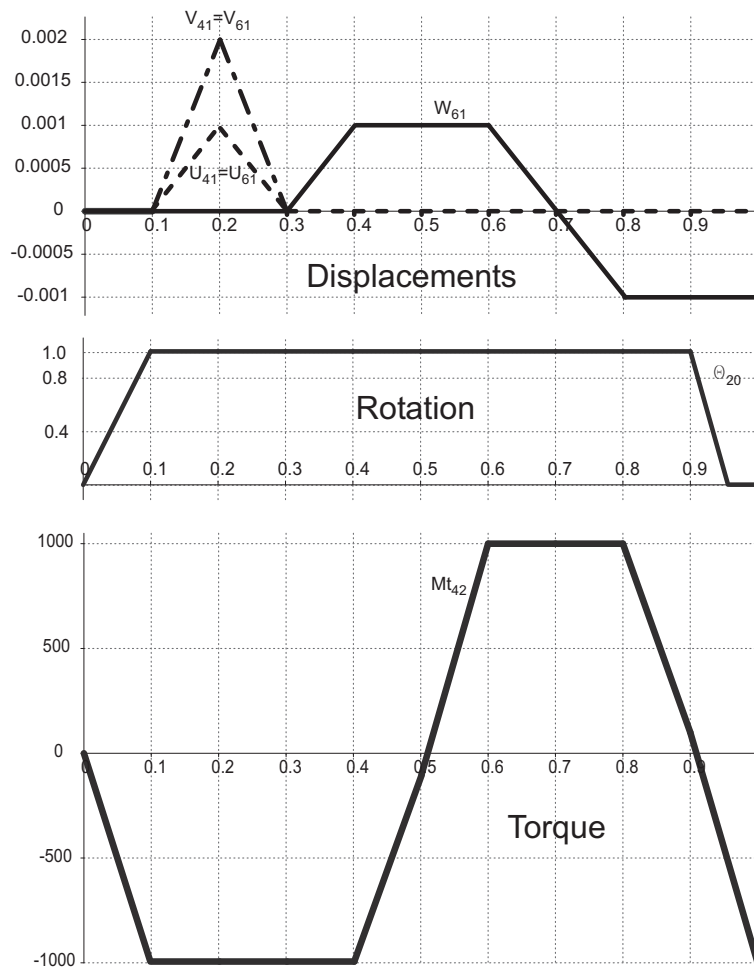


Figura 8: Dentado exterior: Evolución de cargas y desplazamientos impuestos

4.1.3. Resultados

La figura 9 muestra la variación del ángulo de presión α , el ángulo de hélice β , y el huelgo circunferencial durante el análisis.

La figura 10 representa la evolución del ángulo de desalineación, el ancho de contacto y el momento adicional en los nodos del elemento de engranaje debidas a la variación en la

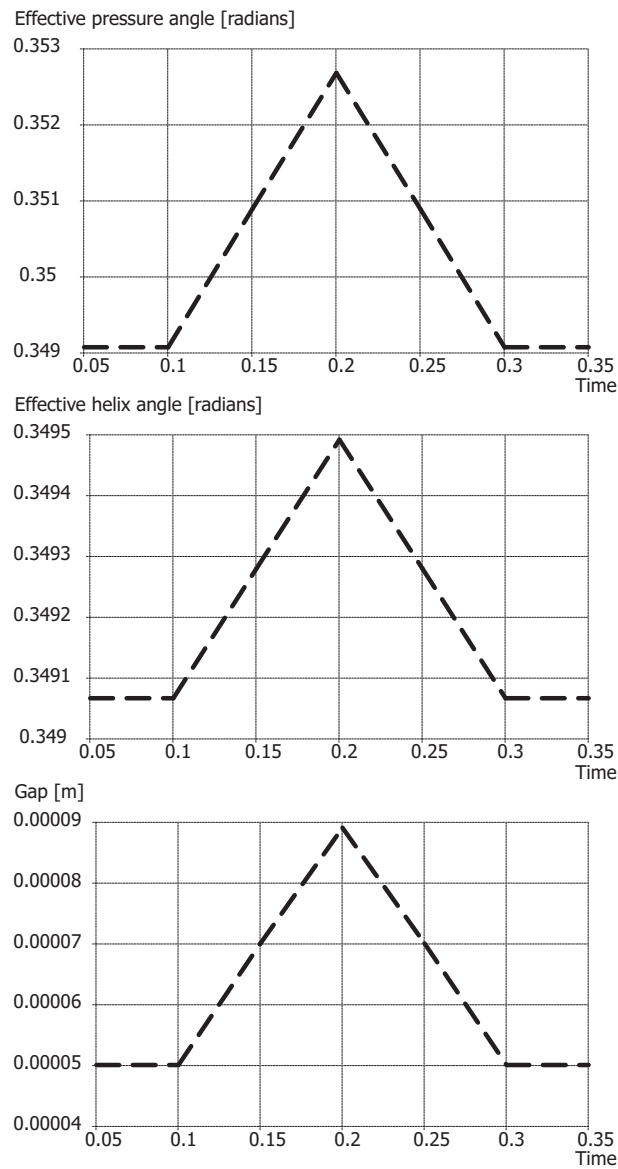


Figura 9: Dentado exterior: Evolución de ángulos de presión, hélice y huelgo

distribución de las presiones de contacto sobre los dientes (desplazamiento de la fuerza de contacto resultante).

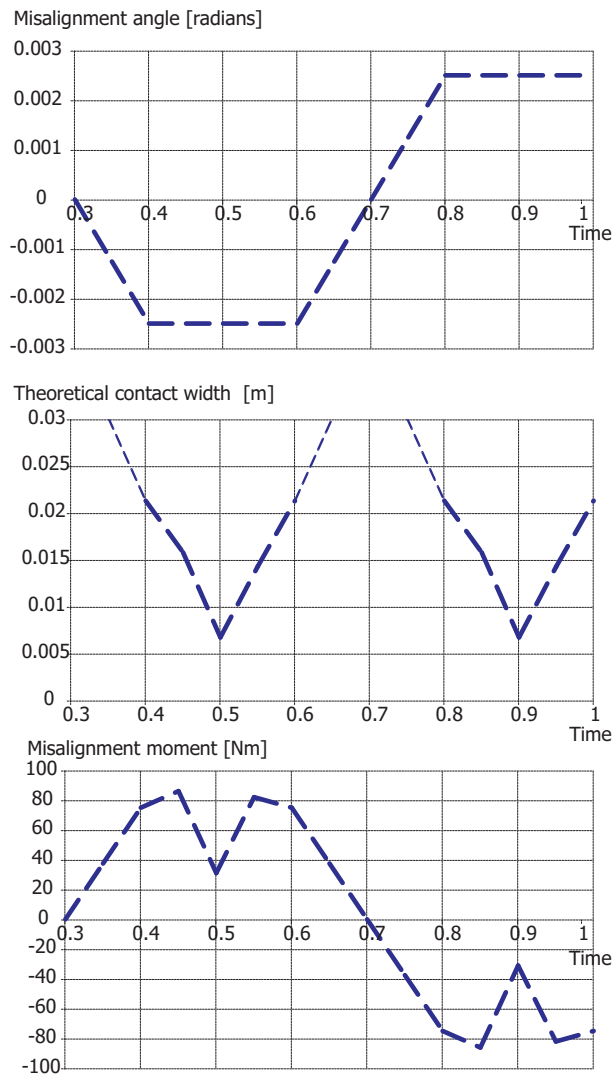


Figura 10: Dentado exterior: Evolución del ángulo de desalineación, ancho de contacto y momento adicional

La figura 11 describe la evolución de las cargas sobre los extremos de cada eje. La figura 12 esquematiza el desplazamiento y la dirección de la fuerza de contacto resultante en diversas etapas del proceso.

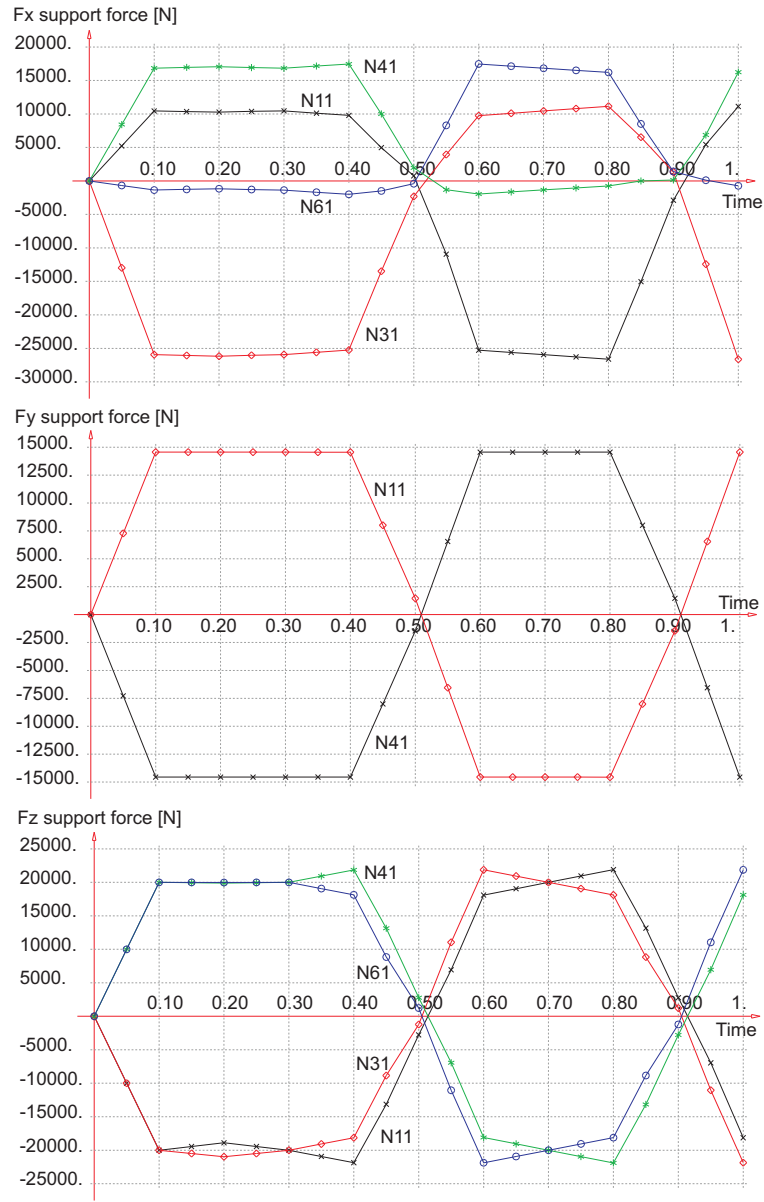


Figura 11: Dentado exterior: Evolución de fuerzas en los extremos de los árboles

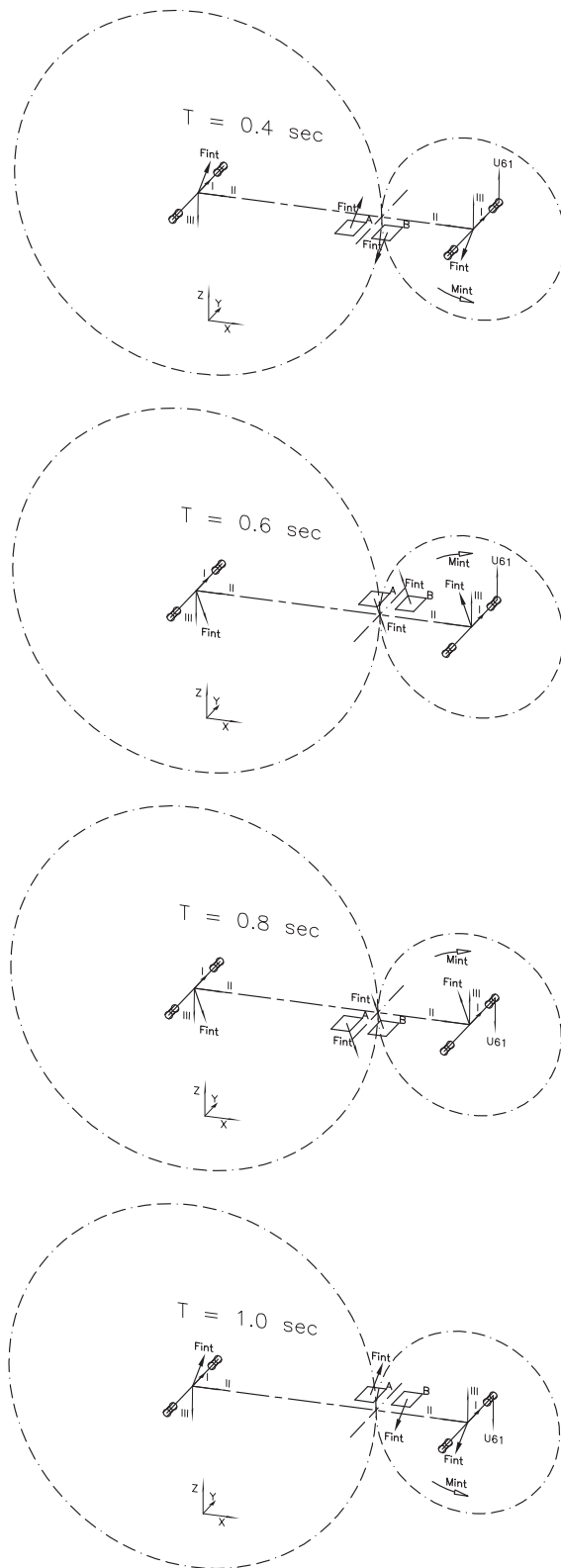


Figura 12: Dentado exterior: Evolución de la fuerza de contacto resultante durante el proceso de carga

4.2. Engranajes interiores

4.2.1. Definición del modelo

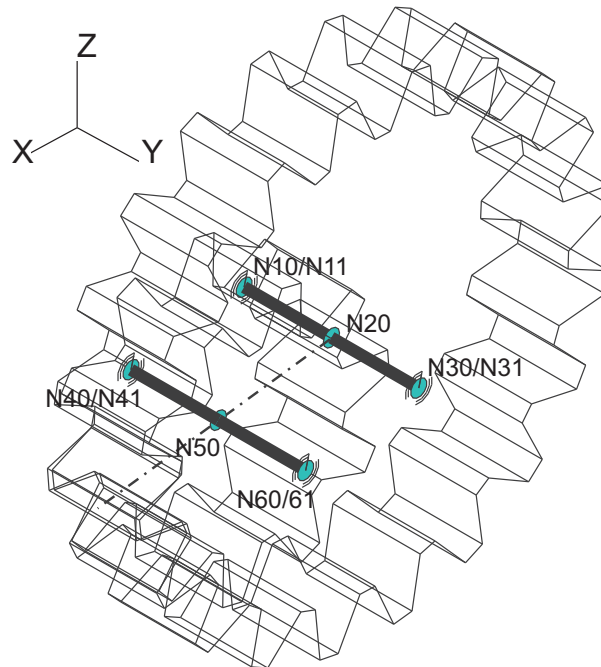


Figura 13: Modelo para análisis de engranajes interiores

Para analizar el comportamiento del elemento de engranaje con dentado interno, se utilizó el modelo descrito en la figura 13. Los datos de nodos y elementos son listados en los cuadros 4, 5 y 6.

Nodo	x	y	z
10/11/12	0.000	0.000	0
20	0.000	0.020	0
30/31	0.000	0.040	0
40/41/42	0.025	0.000	0
50	0.025	0.020	0
60/61	0.025	0.020	0

Tabla 4: Coordenadas nodales

4.2.2. Cargas aplicadas y desplazamientos prescritos

La evolución de los desplazamientos y cargas impuestas, mostrada en la figura 14 es similar al ejemplo de engranajes exteriores, excepto por la dirección del desplazamiento X entre los instantes 0.1 y 0.3, porque se impone un desplazamiento X negativo a los nodos 41 y 61 para modelar un incremento en la distancia entre centros.

Elemento	Tipo	Nodos
1	RIGID	10/20
2	RIGID	20/30
5	RIGID	40/50
6	RIGID	50/60
11	HINGE	11/10/12
31	HINGE	31/30
41	HINGE	41/40/42
61	HINGE	61/60
91	GEAR	20/50

Tabla 5: Definición de elementos

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
Número de dientes ZA	20	Número de dientes ZB	10
Módulo normal M	0.005	Angulo de presión nominal PALP	20
Rigidez del diente KR	1.E8	Ancho del diente TTOOTH	0.020
Angulo de hélice HELA	0	Angulo de hélice HELB	0
Huelgo nominal GAP	0.00005	Angulo de cono CONA / CONB	180 / 0

Tabla 6: Parámetros del elemento de engranaje

4.2.3. Resultados

La figura 15 muestra la evolución del ángulo de presión y el huelgo circunferencial.

En la figura 16 se grafica la evolución del ángulo de desalineación, el ancho de contacto y el momento adicional en los nodos del elemento de engranaje, debidos a la desalineación.

La figura 17 muestra la evolución de las cargas sobre los extremos de cada árbol. El desplazamiento y la dirección de la fuerza de contacto resultante a lo largo del proceso se esquematizan en la figura 18.

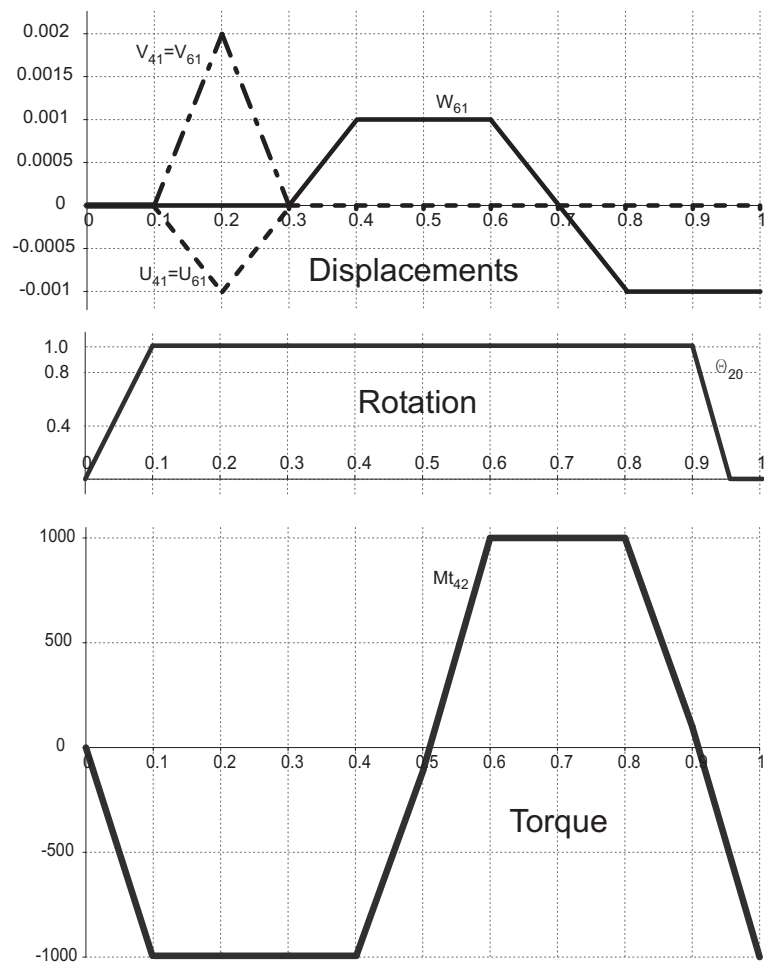


Figura 14: Dentado interior: Evolución de cargas y desplazamientos impuestos

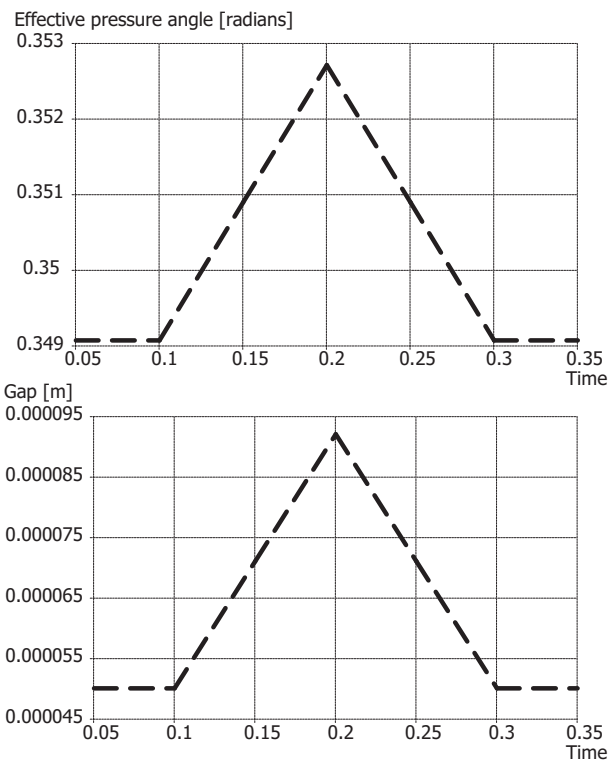


Figura 15: Dentado interior: Evolución del ángulo de presión y el huelgo

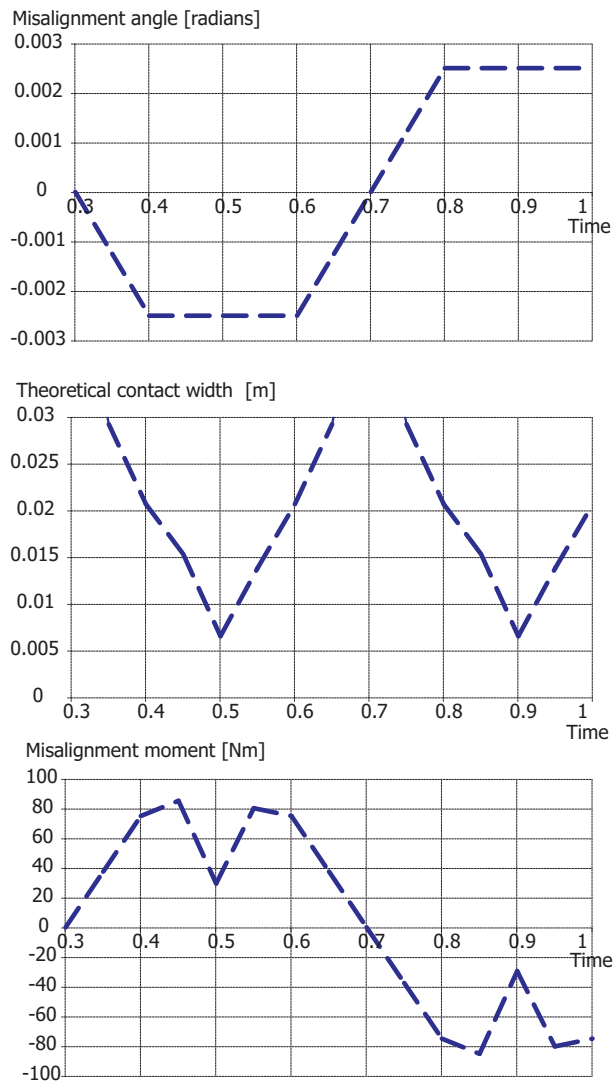


Figura 16: Dentado interior: Evolución del ángulo de desalineación, ancho de contacto y momento adicional

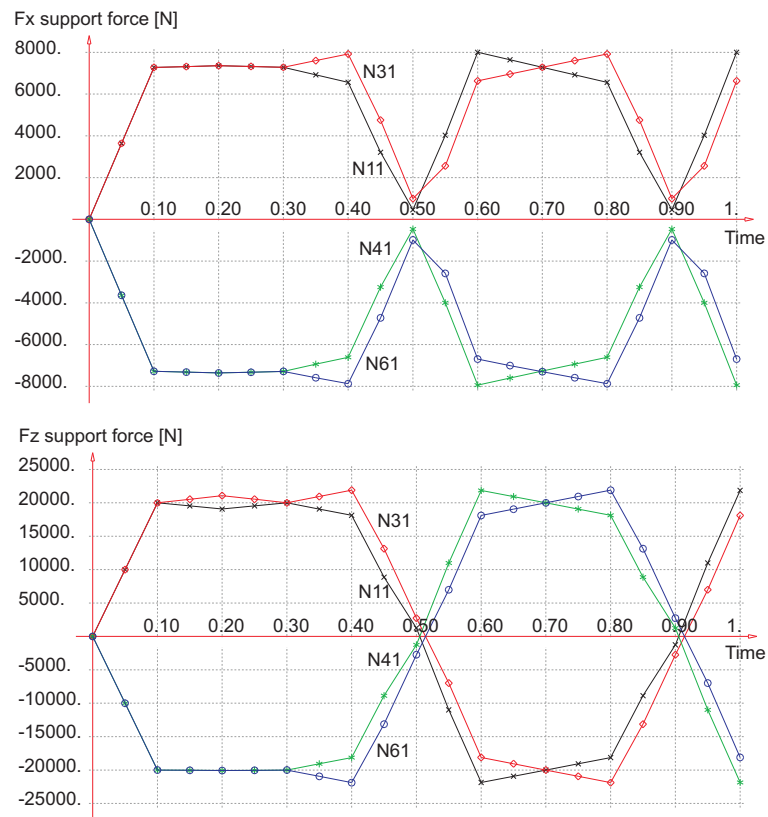


Figura 17: Dentado interior: Evolución de cargas en los extremos de cada árbol

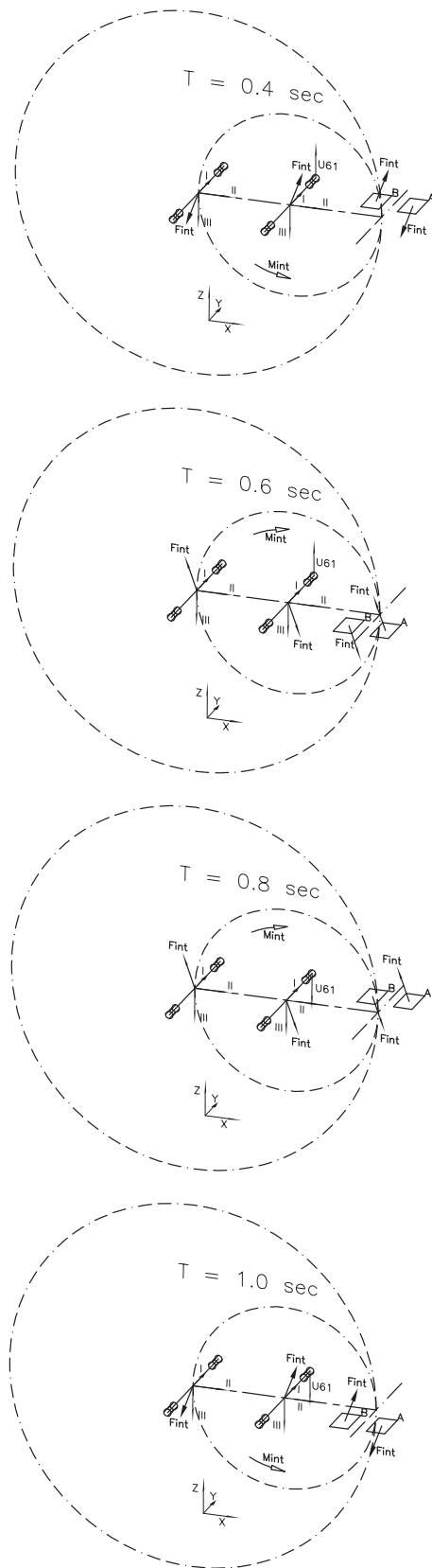


Figura 18: Dentado interior: Evolución de la resultante de las fuerzas de contacto durante el proceso

5. CONCLUSIONES Y DESARROLLO FUTURO

La modificación del elemento de engranaje para considerar el efecto de variaciones en la distancia entre centros y la desalineación resulta en una representación mas realista y precisa de las cargas transmitidas por el dentado y las relaciones cinemáticas entre los componentes de la transmisión..

Como desarrollo futuro se planea realizar mejoras adicionales en los procedimientos de cálculo, tales como:

- a) Extender el cálculo de desalineaciones al caso de engranajes cónicos.
- b) Tomar en cuenta las modificaciones introducidas de expreso al perfil de los dientes durante el proceso de fabricación (por ejemplo el crowning o abarrilado de dientes), modificando la distribución de presiones de contacto en terminos de valores para una geometría parametrizada del dentado corregido.
- c) Calcular las rotaciones inducidas por desplazamientos axiales en engranajes helicoidales.
- d) Considerar las restricciones adicionales que se producen si el huelgo entre los engranajes se reduce a cero debido a grandes desalineaciones o reducciones en la distancia entre centros (aún cuando esta última situación es poco probable).

Otra importante mejora sería el desarrollo de un procedimiento automático para identificar parámetros tales como la rigidez de dentado en diversos instantes del proceso de engrane, utilizando un modelo parametrizado y tridimensional de elementos finitos para resolver esta escala de análisis del problema.

Aún cuando es imposible determinar “a priori” su interrelación con las desviaciones introducidas por la flexibilidad de los componentes de la transmisión, los errores de fabricación (tales como errores geométricos en el dentado, desviaciones en la posición de los cojinetes, excentricidad de los árboles, etc.) podrían ser incluidos en el modelo utilizando un enfoque estadístico para calcular una “envolvente” de defectos.

REFERENCIAS

- Ajmi M. and Velez P. A model for simulating the quasi-static and dynamic behaviour of solid wide-faced spur and helical gears. *Mechanism and Machine Theory*, 40, 2005.
- ANSI/AGMA 2001-C95 . *Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth*. AGMA, New York, 1995.
- Cardona A. Flexible three dimensional gear modelling in mechanism analysis. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 4, 1995.
- Cardona A. Three dimensional gears modeling in multibody systems analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40, 1997.
- ESDU 88033 . *The Design of Helical and Involute Gears*. IHS-ESDU, London, 1988. ISBN 0 85679 665 4.
- Gregory R., Harris R., and Munro R. Dynamic behaviour of spur gears. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 178, 1963.
- ISO 6336-1:1996 . *Calculation of Load Capacity of Spur and Helical Gears - Part 1: Basic Principles, Introduction and General Influence Factors*. ISO, Geneve, 1986.
- Kubo A., Yamada K., Aida T., and Sato S. Research on ultra speed gear devices (reports 1-3). *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, 38, 1972.

- Niemann G. *Tratado Teórico Práctico de Elementos de Máquinas*. Labor, Barcelona, 1973. ISBN 84-335-6287-8.
- Özgüven H. and Houser D. Mathematical models used in gear dynamics - a review. *Journal of Sound and Vibration*, 121, 1988.
- Rama Mohana Rao C. and Muthuveerappan G. Finite element modeling and stress analysis of helical gear teeth. *Computers and Structures*, 49, 1993.
- Vedmar L. and Henriksson A. A general approach for determining dynamic forces in spur gears. *ASME Journal of Mechanical Design*, 120, 1998.