Asociación Argentina de Mecánica Computacional
Mecánica Computacional Vol XXVI, pp.614-632
Sergio A. Elaskar, Elvio A. Pilotta, Germán A. Torres (Eds.)
Córdoba, Argentina, Octubre 2007

EL PUNTO MUERTO FINANCIERO DE UN PROYECTO DE INVERSION SIMPLE EN FUNCION DE LA TASA DE DESCUENTO

Domingo Alberto Tarzia [a,b]

[a]*Depto. Matematica, FCE, Universidad Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina, Domingo.Tarzia@fce.edu.ar,*
[b]*CONICET*

Palabras clave: Proyecto de inversión; Punto muerto financiero; Tasa de descuento; Valor actual neto.

Resumen. Se considera un proyecto de inversión que tiene los siguientes parámetros sobre los cuales se realizan las siguientes hipótesis de trabajo:
$I > 0$: Inversión inicial que se realiza de una sola vez y en el año 0 y se amortiza totalmente en n años;
n: Cantidad de años de duración del proyecto de inversión en el cual se realizan las mismas actividades y se considera que la compañía vende un solo producto;
$A > 0$: Amortización anual ($A = I/n$);
$Q > 0$: Cantidad de unidades del producto vendidas por año;
$C_v > 0$: Costo variable por unidad para producir el producto;
$p > 0$: Precio de venta por unidad del producto con $p > C_v$;
$C_f > 0$: Costo fijo anual de la compañía;
t_{ig}: Tasa del impuesto a las ganancias (en tanto por uno);
r: Tasa de descuento o costo de oportunidad (en tanto por uno);
Se desprecia la inflación anual de precios.
Se obtiene la expresión explícita del Valor Actual Neto (VAN) del proyecto de inversión en función de la variable independiente a considerar, por ejemplo la cantidad de unidades a vender Q. También se determina explícitamente el punto muerto (break even point) financiero Q_f (es decir la cantidad de unidades vendidas Q que hace que el VAN sea nulo) en función de los parámetros restantes del problema I, n, C_v, C_f, t_{ig}, r, p. En particular, se estudia su comportamiento respecto de la tasa de descuento r y se demuestra que:
(i) Cuando la tasa de descuento r es despreciable el punto muerto financiero tiende al punto muerto contable es decir, el valor de Q que anula el Beneficio antes de Impuestos BAT;
(ii) Cuando la tasa de descuento r es muy grande la gráfica de la función $Q_f = Q_f(r)$ tiene por asíntota una línea recta de pendiente positiva. Por otro lado, $Q_f(r)$ es una función estrictamente creciente y convexa en la variable r.

1. INTRODUCCION

En Finanzas una inversión es cualquier erogación de capital con la intención de obtener un retorno en el futuro que pueda recuperar la inversión original y además genere una utilidad adicional. En el presente trabajo se considerará un proyecto de inversión simple en el cual se realiza solamente una inversión inicial I (flujo de fondo con signo negativo) y en los n años de duración del mismo se tendrán flujos de fondos que podrán ser de signo positivo o negativo, según sea la operatoria de la empresa en la cual se desarrolla dicho proyecto.

Es muy importante la evaluación del proyecto de inversión para poder conocer si el mismo es o no es rentable. Los principales criterios para la evaluación son (Machain, 2002; Sapag Chain, 2001]:

- el ***valor actual neto***, conocido como **VAN**, que mide, en valores monetarios, los recursos que aporta el proyecto por sobre la rentabilidad exigida a la inversión y después de recuperada toda ella;
- la ***tasa interna de retorno***, conocida como **TIR**, que mide la rentabilidad de un proyecto como un porcentaje y corresponde a la tasa que hace al valor actual neto igual a cero;
- el ***período de recuperación de la inversión***, conocido como **PRI**, que mide en cuánto tiempo se recupera la inversión, incluido el costo del capital involucrado;
- la ***rentabilidad inmediata***, conocido como **RI**, que determina el momento óptimo de hacer la inversión.

En este trabajo se utilizará el Valor Actual Neto o VAN como criterio de evaluación. El VAN es aquel que permite determinar la valoración de una inversión en función de la diferencia entre el valor actualizado de todos los cobros derivados de la inversión y todos los pagos actualizados originados por la misma a lo largo del plazo de la inversión realizada. En otras palabras, el VAN de un proyecto es igual a la sumatoria de los valores actuales (al momento cero) de todos los flujos de fondos (negativos y positivos) que genera el mismo proyecto. La inversión será aconsejable si su VAN es positivo. La sumatoria de los valores actuales de los flujos puede presentar, en cuanto a su signo, tres situaciones, las que se interpretan a continuación [Baker and Fox, 2003; Brealey and Myers, 1993; Reichelstein, 2000; Sapag Chain, 2001; Vanhoucke et al., 2001):

(i) Un VAN positivo indica que:

- se recupera la inversión a valores nominales,
- se obtiene el retorno requerido sobre la inversión,
- se obtiene un remanente sobre el retorno requerido por el inversor.

(ii) Un VAN negativo indica que:

- se puede o no cubrir la inversión a valores nominales,
- no cubre las expectativas de retorno del inversor,
- no se obtiene ningún remanente.

(iii) Un VAN cero indica que cubre exactamente la devolución del capital nominal más el retorno requerido representado por la tasa utilizada para descontar los fondos al momento 0. En términos "económicos-empresarios" no se "agrega" ni se "destruye" valor.

Se estudiará un proyecto de inversión con la existencia de una sola variable independiente que puede hacer, según los valores que adopte, que el proyecto sea viable o no. En este caso, el VAN será una función de dicha variable con lo cual será de mucha importancia poder encontrar el valor de dicha variable independiente que haga que el correspondiente VAN sea nulo. Se define como **Punto Muerto** (Break even point) **Financiero** el valor de la variable independiente para el cual el VAN es nulo.

1.1. Planteo del problema

En el proyecto de inversión a estudiar se tienen los siguientes **parámetros**:

- I : Inversión inicial**.** Se considera un proyecto de inversión simple que tiene una inversión inicial que se realiza en el año cero (antes del comienzo del año 1 correspondiente al primer año del desarrollo del proyecto de inversión). Dimensión: $[I]$ = \$;
- n : cantidad de años de duración del proyecto de inversión. Dimensión: $[n]$ = 1;
- A : Amortización anual**.** Es la parte anual de la inversión que permite bajar (mejorar) el pago de impuestos a las ganancias. Dimensión: $[A]$ = \$;
- $Q(Q_t)$: Cantidad de unidades del producto vendidas por año (en el año t). Dimensión: $[Q]$ = $\#\, unidades$;
- p : Precio de venta unitario al que la Compañía vende cada producto. Dimensión: $[p]$ = $\$/unidad$;
- C_v : Costo variable por unidad para producir el producto. Dimensión: $[C_v]$= $\$/unidad$;
- C_f : Costo fijo anual de la Compañía. Dimensión: $[C_f]$ = \$;
- t_{ig} : Tasa del impuesto a las Ganancias (en tanto por uno). Dimensión: $[t_{ig}]$ = 1;
- r : Tasa de descuento o costo de oportunidad (en tanto por uno). Dimensión: $[r]$ = 1;
- t : referente al año t ($t = 0,1,\ldots,n$). Dimensión: $[t]$ = 1.

En (Fernandez Blanco, 1991) se realiza un estudio del VAN de un proyecto de inversión en función de la tasa de descuento r ; se demuestra solamente que el VAN de un proyecto de inversión en función de la tasa de descuento r es una función estrictamente decreciente y convexa. Dicho estudio no es completo y se espera poder ampliarlo adecuadamente.

En el proyecto de inversión simple se considerarán las siguientes hipótesis de trabajo:

- Toda la inversión I se realiza de una sola vez y en el año 0;
- La inversión inicial se amortiza totalmente en n años, con lo cual la amortización anual está dada por:

$$A = \frac{I}{n}$$

- Se desprecia la inflación anual de precios;
- En los n períodos de tiempo de duración del proyecto de inversión se realizan las mismas actividades, excepto que se indique lo contrario;
- Se considera que la compañía vende un solo producto (el cual lo podría producir o comprarlo para luego revenderlo);
- Se supone que el precio de venta del producto es mayor que el correspondiente costo variable de producción, es decir

$$p > C_v .$$

El propósito de este trabajo es el de obtener la expresión explícita del VAN del proyecto de inversión en función de la variable independiente Q en cuyo caso será $VAN(Q)$**.** También se determinará explícitamente el Punto Muerto Financiero, es decir, la cantidad de unidades vendidas Q que hace que el VAN sea nulo, en un proyecto de inversión simple, en función de los parámetros restantes del problema (I, n, C_v, C_p, t_{ig}, r, p). En particular, se estudiará matemáticamente (analítica y gráficamente) su comportamiento respecto de la tasa de descuento o costo de oportunidad r. Se demostrará que:

(i) Cuando la tasa de descuento r es despreciable (es decir, cuando r tiende a cero) el Punto Muerto Financiero, para la variable de cantidad Q, tiende al Punto Muerto Contable.

(ii) Cuando la tasa de descuento r es muy grande (es decir, cuando r tiende a infinito) la gráfica de la función $Q_f = Q_f(r)$ tiene por asíntota una línea recta; en este caso, se calcularán la pendiente (inclinación) y la ordenada al origen de la correspondiente recta asíntota. Por otro lado, $Q_f(r)$ es una función estrictamente creciente y convexa en la variable r.

2. PROYECTO DE INVERSIÓN DEPENDIENTE DE LA VARIABLE CANTIDAD Q

Se supone que en cada año ($i = 1, 2, ..., n$) se realizan las mismas operaciones, es decir que los parámetros Q, p, C_f, C_v, r, t_{ig} son constantes durante los n años de duración del proyecto de inversión. Para cada año t ($t = 1, 2, ..., n$) se tiene:

Año	t
Ingresos (precio por cantidad)	pQ
Costos variables	$C_v Q$
Costos fijos	C_f
Amortización	$A = \dfrac{I}{n}$
Beneficios antes de impuestos (BAT)	$BAT = pQ - C_v Q - C_f - A$ $= (p - C_v)Q - C_f - A$
Impuesto a las Ganancias $(IG$ en \$$)$	$IG = t_{ig}\left[(p - C_v)Q - C_f - A\right]$
Beneficio Neto $(BN = BAT - IG$ en \$$)$	$BN = (1 - t_{ig})\left[(p - C_v)Q - C_f - A\right]$
Flujo de Tesorería Neto $(F \equiv FTN = BN + A$ en \$$)$	$F = (1 - t_{ig})\left[(p - C_v)Q - C_f - A\right] + A$ $= (1 - t_{ig})\left[(p - C_v)Q - C_f\right] - (1 - t_{ig})A + A$ $= (1 - t_{ig})\left[(p - C_v)Q - C_f\right] + t_{ig}A$
Factor de descuento para el año t	$\dfrac{1}{(1+r)^t}$

Teniendo en cuenta que la inversión I se realiza en el período 0 se tiene que el correspondiente VAN $\left(\text{con dimensión } [VAN] = \$\right)$ de este proyecto de inversión simple viene dado por $-I$ más los valores actuales de todos los flujos de fondos F constantes obtenidos en cada año t variando t desde 1 a n, es decir (Villalobos, 2001):

$$VAN(Q) = -I + \sum_{t=1}^{n} \frac{F}{(1+r)^t} = -I + F\frac{1}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right]$$

$$(1) \qquad = -I + \frac{1}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right]\left[\left(1-t_{ig}\right)\left(p - C_v\right)Q - \left(1-t_{ig}\right)C_f + t_{ig}A\right] = h + m\,Q$$

que resulta ser una función afín de la variable Q (la representación gráfica de $VAN(Q)$ es una recta en la variable Q) donde se han definido $h = h(r)$ (ordenada al origen de la recta en función del parámetro tasa de descuento r) y $m = m(r)$ (pendiente de la recta en función del parámetro tasa de descuento r) de la siguiente manera:

$$(2) \qquad h = h(r) = -I + f(r)\left[t_{ig}A - \left(1-t_{ig}\right)C_f\right]$$

$$(3) \qquad m = m(r) = f(r)\left(p - C_v\right)\left(1-t_{ig}\right) > 0,$$

donde la función real $f = f(r)$ está definida de la siguiente manera:

$$(4) \qquad f(r) = \frac{1}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right], \; r > 0,$$

y las correspondientes dimensiones son:

$$(5) \qquad [h(r)] = \$, \qquad [m(r)] = \$/unidad, \qquad [f(r)] = 1.$$

Teniendo en cuenta que el punto muerto financiero Q_f está definido como aquel valor de Q que anula el $VAN(Q)$, se obtiene:

$$VAN\left(Q_f\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h + mQ_f = 0$$

es decir:

$$(6) \qquad Q_f = \left\{\left(1-t_{ig}\right)C_f - t_{ig}A + \frac{I}{f(r)}\right\}\frac{1}{\left(p - C_v\right)\left(1-t_{ig}\right)} = -\frac{h}{m}$$

de donde surge que el punto muerto financiero Q_f, en función de la tasa de descuento r, viene dado por la siguiente expresión:

$$(7) \qquad Q_f(r) = a + b\frac{1}{f(r)}$$

donde los coeficientes reales a y b están dados por:

$$(8) \qquad a = \frac{C_f - t_{ig}\left(C_f + A\right)}{\left(p - C_v\right)\left(1-t_{ig}\right)}$$

(9) $$b = \frac{I}{\left(p-C_v\right)\left(1-t_{ig}\right)} > 0$$

cuyas dimensiones son:

(10) $$\left[Q_f\left(r\right)\right] = \#\ unidades\ , \qquad \left[a\right] = \#\ unidades\, , \qquad \left[b\right] = \#\ unidades\, .$$

Teniendo en cuenta el punto muerto financiero Q_f el $VAN(Q) = VAN(Q,r)$, dado por (1), se puede expresar de una manera equivalente dado por:

(11) $$\begin{aligned} VAN(Q,r) &= -I + f(r)\left[t_{ig}A - \left(1-t_{ig}\right)C_f\right] + f(r)\left(p-C_v\right)\left(1-t_{ig}\right)Q \\ &= m(r)\left[Q - Q_f\left(r\right)\right] \end{aligned}$$

con lo cual se ha expresado el VAN en función de la variable Q y del parámetro tasa de descuento (o nueva variable) r y del punto muerto financiero $Q_f(r)$, obteniéndose la siguiente propiedad.

Teorema 1:

Para el proyecto de inversión se tienen las siguientes propiedades:

(i) El VAN, en función de la variable independiente cantidad de unidades vendidas Q, viene dado por (1) donde la ordenada al origen h y la pendiente m están expresados por (2) y (3) respectivamente donde $f = f(r)$ es la función real definida por (4).

(ii) El punto muerto financiero Q_f respecto de la cantidad Q está dado, en función de la tasa de descuento r, por la siguiente expresión:

(12) $$Q_f(r) = a + b\, F(r)$$

donde la función real $F = F(r)$ $\left(\text{con dimensión } \left[F(r)\right] = 1\right)$ viene definida por

(13) $$F\left(r\right) = \frac{1}{f(r)}, \ r > 0$$

y los coeficientes a y b están dados por las expresiones (8) y (9) respectivamente.

(iii) El $VAN\left(Q,r\right)$ también puede calcularse en función de Q_f, por la expresión (11). ■

Observación 1:

Se puede observar que el signo del $VAN(Q)$, en función del punto muerto financiero $Q_f(r)$, viene dado por:

(14) $$VAN\left(Q\right)\begin{cases} > 0 \Leftrightarrow Q > Q_f(r) \\ = 0 \Leftrightarrow Q = Q_f(r) \\ < 0 \Leftrightarrow 0 \le Q < Q_f(r). \end{cases}$$ ■

A los efectos de estudiar matemáticamente el comportamiento de la función $VAN\left(Q\right)$ se necesitan previamente el comportamiento de las funciones $f(r)$ y $F(r)$ definidas por (4) y (13) respectivamente que tienen las siguientes propiedades:

Teorema 3:

(i) La función $f = f(r)$ es una función estrictamente decreciente y convexa (cóncava hacia arriba) de la variable tasa de descuento r con las siguientes propiedades:

(15) $$f\left(0^+\right) = n > 0,\ f(+\infty) = 0,$$

(16) $$\frac{df(r)}{dr} = f'(r) = -\frac{G(r)}{r^2\left(1+r\right)^{n+1}} < 0,\ \forall r > 0$$

(17) $$f'\left(0^+\right) = -\frac{n\left(n+1\right)}{2},\ f'\left(+\infty\right) = 0,$$

(18) $$f''(r) = \frac{H(r)}{r^3\left(1+r\right)^{n+2}} > 0,\ \forall r > 0$$

(19) $$f''\left(0^+\right) = \frac{n\left(n+1\right)\left(n+2\right)}{3},\ f''\left(+\infty\right) = 0$$

donde las funciones reales $G = G\left(r\right)$ y $H = H\left(r\right)$ (con dimensiones $\left[G(r)\right] = \left[F(r)\right] = 1$) están definidas por:

(20) $$G\left(r\right) = \left(1+r\right)^{n+1} - 1 - \left(n+1\right)r,\ r > 0$$

(21) $$H\left(r\right) = 2\left(1+r\right)^{n+2} - 2 - 2\left(n+2\right)r - \left(n+1\right)\left(n+2\right)r^2,\ r > 0$$

que tienen las siguientes propiedades:

(22) $$G\left(0^+\right) = 0,\ G\left(+\infty\right) = +\infty,\ G\left(r\right) > 0,\ \forall r > 0$$

(23) $$H\left(0^+\right) = 0,\ H\left(+\infty\right) = +\infty,\ H\left(r\right) > 0,\ \forall r > 0.$$

(ii) La función $F = F(r)$, definida en (13), es estrictamente creciente y tiene en $r = +\infty$ una asíntota oblicua dada por la ecuación $y = r$ (recta de pendiente 1 y ordenada al origen 0) y tiene además las siguientes propiedades:

(24) $$F\left(0^+\right) = \frac{1}{n},\ F\left(+\infty\right) = +\infty,$$

(25) $$\frac{1}{2} < F'\left(0^+\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1,\ \forall n > 1$$

(26) $$F''\left(0^+\right) = \frac{n^2-1}{6n},$$

(27) $$0 < F\left(r\right) - r < \frac{1}{n},\ \forall r > 0,\ \forall n > 1.$$

Demostración.-

(i) El límite

(28) $$f(+\infty) = \lim_{r\to+\infty} f(r) = \lim_{r\to+\infty} \frac{1-\dfrac{1}{(1+r)^n}}{r} = 0$$

es inmediato. Para el cálculo de $f\left(0^+\right)$ se utiliza la regla de l'Hopital:

(29) $$f(0^+) = \lim_{r\to 0^+} \frac{n(1+r)^{n-1}}{(1+r)^{n-1}\left(1+(n+1)r\right)} = n\,.$$

Para el cálculo de la derivada de f se obtiene la siguiente expresión:

(30) $$f'(r) = \frac{-(1+r)^{n+1}+1+(n+1)r}{r^2(1+r)^n} = -\frac{G(r)}{r^2(1+r)^{n+1}}$$

donde $G = G(r)$ está definida en (20). La función G tiene para los extremos de la variable r los siguientes valores:

(31) $$G\left(0^+\right) = 0,\ G(+\infty) = +\infty\,,$$

y sus funciones derivadas vienen dadas por

(32) $$G'(r) = (n+1)\left[(1+r)^n - 1\right] > 0\,,\ \forall r > 0$$

(33) $$G''(r) = n(n+1)(1+r)^{n-1} > 0\,,\ \forall r > 0$$

que tiene las propiedades siguientes:

(34) $$G'\left(0^+\right) = 0,\ G'(+\infty) = +\infty\,,\ G''\left(0^+\right) = n(n+1)$$

con lo cual

(35) $$G(r) > 0,\quad f'(r) < 0,\quad \forall r > 0\,,$$

es decir que f es una función estrictamente decreciente de la variable tasa de descuento $r > 0$.

Por otro lado, aplicando dos veces la regla de l'Hopital se deduce que

(36) $$f'\left(0^+\right) = -\frac{G''\left(0^+\right)}{2} = -\frac{n(n+1)}{2}.$$

Aplicando las reglas de derivación, la derivada segunda de la función f viene dada por (18), donde $H = H(r)$ está definida en (21).

Con el objetivo de probar que $f''(r) > 0$, $\forall r > 0$ (con lo cual se tendrá que $f = f(r)$ es una función convexa o cóncava hacia arriba), basta probar que $H(r) > 0$, $\forall r > 0$; esto último es cierto pues la función $H = H(r)$ tiene las siguientes propiedades:

(37) $$H\left(0^+\right) = 0,\ H(+\infty) = +\infty\,,$$

(38) $$H'(r) = 2(n+2)G(r) > 0\,,\ \forall r > 0\,.$$

Aplicando nuevamente la regla de l'Hopital y el cálculo ya realizado para $f'(0^+)$ se deduce que:

(39) $$f''(0^+) = \lim_{r\to 0^+}\frac{H(r)}{r^3} = \frac{2(n+2)}{3}\lim_{r\to 0^+}\frac{G(r)}{r^2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

(ii) La función $F(r) = \dfrac{1}{f(r)}$ tiene por derivadas a las siguientes expresiones:

(40) $$F'(r) = -\frac{f'(r)}{f^2(r)} > 0,\ \forall r > 0$$

(41) $$F''(r) = \frac{2\left(f'(r)\right)^2 - f''(r)f(r)}{f^3(r)},\ \forall r > 0$$

de donde se obtienen las siguientes propiedades:

(42) $$F\left(0^+\right) = \frac{1}{f(0^+)} = \frac{1}{n}$$

(43) $$F'\left(0^+\right) = -\frac{f'(0^+)}{f^2(0^+)} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

(44) $$F''\left(0^+\right) = \frac{\dfrac{n^2(n+1)^2}{2} - \dfrac{n^2(n+1)(n+2)}{3}}{n^3} = \frac{n^2-1}{6n}.$$

Para probar que $F = F(r)$ tiene en $r = +\infty$ una asíntota oblicua basta calcular, si existe, la pendiente m^*, y luego la ordenada al origen h^*, de dicha recta; sus dimensiones son $[m^*] = [h^*] = 1$. La pendiente m^* viene dada por el siguiente límite en $r = +\infty$:

(45) $$m^* = \lim_{r\to+\infty}\frac{F(r)}{r} = 1$$

y por ende para el cálculo de la ordenada al origen h^* se tiene:

(46) $$h^* = \lim_{r\to+\infty}\left(F(r) - r\right) = \lim_{r\to+\infty}\frac{r}{(1+r)^n - 1} = 0.$$

Además se puede deducir que:

(47) $$0 < F(r) - r = \frac{r}{(1+r)^n - 1} < \frac{1}{n},\ \forall r > 0,\ \forall n > 1.$$ ■

Se define el **Punto Muerto Contable** Q_c $\left(\text{con dimensión } [Q_c] = \#\ \textit{unidades}\right)$ como el valor de Q que anula el Beneficio antes de Impuestos BAT, el cual viene dado por la siguiente expresión:

$$BAT(Q_c) = 0 \Leftrightarrow \ (p - C_v)Q_c - C_f - A = 0 \Leftrightarrow$$

(48) $$Q_c = \frac{C_f + A}{p - C_v}$$

<u>Teorema 4</u>:

El punto muerto financiero $Q_f = Q_f\left(r\right)$, dado por (12), es una función estrictamente creciente de la tasa de descuento r y tiene las siguientes propiedades:

(49) $$Q_f\left(0^+\right) = a + \frac{b}{n} = Q_c\,,\; Q_f\left(+\infty\right) = +\infty\,,$$

(50) $$\frac{dQ_f(r)}{dr} > 0\,,\; \forall r > 0\,,$$

(51) $$0 < \frac{b}{2} < \frac{dQ_f(0^+)}{dr} = \frac{b}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) < b\,.$$

Además, la curva $y = Q_f(r)$ tiene en $r = +\infty$ una asíntota oblicua dada por la recta de ecuación

(52) $$y = a + b\,r$$

que tiene pendiente $b > 0$ y ordenada al origen a, definidos en (9) y (8) respectivamente.

<u>Demostración</u>.-

Debido a las propiedades de la función $f = f(r)$ o en su defecto de la función $F = F\left(r\right)$ se tiene el siguiente resultado:

(53) $$Q_f(0^+) = a + bF(0^+) = a + \frac{b}{n} = \frac{C_f + A}{p - C_v} = Q_c$$

valor límite que resulta ser el punto muerto contable Q_c definido por (48). Por otro lado se tienen las propiedades siguientes:

(54) $$Q_f(+\infty) = a + bF(+\infty) = +\infty$$

(55) $$\frac{dQ_f}{dr}\left(r\right) = bF'(r) > 0\,,\; \forall r > 0$$

(56) $$\frac{b}{2} < \frac{dQ_f}{dr}\left(0^+\right) = bF'(0) = \frac{b}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) < b\,,\; \forall n > 1\,.$$

Además, como la curva $y = F(r)$ tiene en $r = +\infty$ una recta asíntota oblicua de ecuación $y = r$ entonces la curva $y = Q_f(r)$ tendrá en $r = +\infty$ una recta asíntota de ecuación $y = a + br$ pues:

$$\text{i) } \lim_{r \to +\infty} \frac{Q_f\left(r\right)}{r} = \lim_{r \to +\infty} \frac{a + bF\left(r\right)}{r} = b \lim_{r \to +\infty} \frac{F\left(r\right)}{r} = b\,,$$

(57) $$\text{ii) } \lim_{r \to +\infty} \left[Q_f\left(r\right) - br\right] = \lim_{r \to +\infty} \left[a + bF(r) - br\right] = a + b \lim_{r \to +\infty} \left(F(r) - r\right) = a\,. \blacksquare$$

Observación 2:

Por lo visto anteriormente se tiene una interesante propiedad contable-financiera: el límite del punto muerto financiero para la cantidad de unidades vendidas cuando la tasa de descuento tiende a cero (es decir, tasa de descuento despreciable o muy baja) es el punto muerto contable para la cantidad de unidades vendidas. ■

Observación 3:

El punto muerto financiero del proyecto de inversión simple en función de la tasa de descuento r está representado por una función estrictamente creciente $y = Q_f(r)$ que parte en $r = 0$ de $Q_f\left(0^+\right) = a + \frac{b}{n} = Q_c$ (punto muerto contable) y en $r = +\infty$ tiende asíntoticamente a la recta de ecuación $y = a + br$ donde a y b están definidos en (8) y (9) respectivamente.

Por otro lado, la curva $y = Q_f(r)$ parte en $r = 0$ con una pendiente inicial $Q_f{}'(0^+)$ que tiene un valor comprendido entre $\frac{b}{2}$ y b, menor que la pendiente b de la recta asíntota en $r = +\infty$. ■

A continuación, se estudiará el VAN como una función real de dos variables independientes: la tasa de descuento r y la cantidad de unidades vendidas Q.

<u>Teorema 5</u>:

(i) La función real VAN de las dos variables independientes Q(cantidad constante de unidades vendidas por año) y r (tasa de descuento) está dado por:

(58) $$VAN\left(Q,r\right) = \left(p - C_v\right)\left(1 - t_{ig}\right) f(r)\left(Q - a\right) - I$$

donde la función $f = f(r)$ está definida en (4).

(ii) $VAN\left(Q,r\right)$ es una función estrictamente creciente en la variable Q y estrictamente decreciente en la variable r asumiendo para los valores extremos de Q y de r las siguientes expresiones:

(59) $$VAN\left(Q,+\infty\right) = \lim_{r\to+\infty} VAN\left(Q,r\right) = -I < 0,\ \forall Q > 0$$

(60) $$VAN\left(Q,0^+\right) = \lim_{r\to0^+} VAN\left(Q,r\right) = n\left(p - C_v\right)\left(1 - t_{ig}\right)\left(Q - Q_c\right),\ \forall Q > 0$$

(61) $$VAN\left(0^+,r\right) = \lim_{Q\to0^+} VAN\left(Q,r\right) = h(r),\ \forall r > 0$$

(62) $$VAN\left(+\infty,r\right) = \lim_{Q\to+\infty} VAN\left(Q,r\right) = +\infty,\ \forall r > 0$$

donde Q_c es el punto muerto contable definido en (48), y $h = h(r)$ es la función real definida en (2).

(iii) La función real $h = h(r)$ tiene las siguientes propiedades:

(63) $$h\left(0^+\right) = -\left(1-t_{ig}\right)n\left(A+C_f\right)<0,\ h\left(+\infty\right) = -I<0$$

y es estrictamente creciente (decreciente) cuando $At_{ig} < C_f\left(1-t_{ig}\right)$ $\left(At_{ig} > C_f\left(1-t_{ig}\right)\right)$.

En el caso particular $At_{ig} = C_f\left(1-t_{ig}\right)$ se tiene que $h = h(r)$ es una función constante de valor $h\left(r\right) = -I<0$, $\forall r>0$.

Demostración.-

(i) Surge de (11).

(ii) Teniendo en cuenta que $f(+\infty) = 0$ se deduce que:

(64) $$\begin{aligned} VAN\left(Q,+\infty\right) &= \left(p-C_v\right)\left(1-t_{ig}\right)f(+\infty)\left(Q-a\right)-I \\ &= -I = -b\left(p-C_v\right)\left(1-t_{ig}\right)<0. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $f\left(0^+\right) = n$ se deduce que:

(65) $$\begin{aligned} VAN\left(Q,0^+\right) &= -I+\left(p-C_v\right)\left(1-t_{ig}\right)Qn-\left(p-C_v\right)\left(1-t_{ig}\right)an \\ &= \left(1-t_{ig}\right)\left(p-C_v\right)n\left[\ Q-Q_c\ \right] \end{aligned}$$

donde Q_c es el punto muerto contable. Utilizando las definiciones y propiedades previas se deducen las expresiones del VAN para los valores $Q=0^+$ y $Q=+\infty$.

Por otro lado, las derivadas parciales de $VAN\left(Q,r\right)$ respecto de las variables Q y r vienen dadas por las siguientes expresiones:

(66) $$\frac{\partial VAN}{\partial Q}\left(Q,r\right) = \left(p-C_v\right)\left(1-t_{ig}\right)f(r)>0,\ \forall Q,r>0$$

(67) $$\frac{\partial VAN}{\partial r}\left(Q,r\right) = \left(p-C_v\right)\left(1-t_{ig}\right)Q\,f'(r)<0,\ \forall Q,r>0$$

con lo cual el VAN es una función estrictamente creciente en la variable cantidad de unidades vendidas Q y estrictamente decreciente en la variable tasa de descuento r.

(iii) La función $h = h(r)$ tiene los siguientes valores límites:

(68) $$h\left(+\infty\right) = -I + f(+\infty)\left[At_{ig}-\left(1-t_{ig}\right)C_f\right] = -I<0,$$

(69) $$h\left(0^+\right) = -I + f(0^+)\left[At_{ig}-\left(1-t_{ig}\right)C_f\right] = -\left(1-t_{ig}\right)n\left(C_f+A\right)<0$$

y su derivada primera viene dada por:

(70) $$h'(r) = \left[C_f\left(1-t_{ig}\right)-At_{ig}\right]\frac{G\left(r\right)}{r^2\left(1+r\right)^n},\ \forall r>0$$

donde $G = G\left(r\right)$ está definida en (20).

El signo de $h'(r)$ depende del signo de $\left[C_f\left(1-t_{ig}\right)-At_{ig}\right]$, el cual será positivo (es decir

h estrictamente creciente en r) cuando $At_{ig} < C_f\left(1-t_{ig}\right)$ y será negativo (es decir h estrictamente decreciente en r) cuando $At_{ig} > C_f\left(1-t_{ig}\right)$.

Por otro lado, en el caso particular en que $At_{ig} = C_f\left(1-t_{ig}\right)$ se tiene que $h'(r) = 0,\ \forall r > 0$ con lo cual $h(r)$ es una constante $\forall r > 0$ dada por $h(r) = -I$. ■

Observación 5:

En el Teorema 5 se mostró que el comportamiento de crecimiento o decrecimiento de la función real $h = h(r)$ está supeditado al signo de la expresión:

(71) $$C_f\left(1-t_{ig}\right) - At_{ig}.$$

Cada término puede interpretarse de la siguiente manera:

- At_{ig}: es el ahorro impositivo anual debido a la amortización $A = \frac{I}{n}$ de la inversión I;
- $C_f\left(1-t_{ig}\right)$: es el verdadero costo fijo anual después de pagar impuestos a las ganancias. ■

Observación 6:

Como $VAN\left(Q,r\right)$ es una función estrictamente decreciente en la variable r, para cada cantidad $Q > 0$ dada, significa que el VAN tiene menores valores a medida que r crece con lo cual habrá que aumentar la cantidad Q para equilibrarlo. Este hecho se puede apreciar en toda su magnitud en el cálculo explícito, realizado anteriormente, del punto muerto financiero $Q_f\left(r\right)$ que es una función creciente de la tasa de descuento r.

El VAN del proyecto inversión tiene la expresión (11) en función de las dos variables independientes Q, r y de los parámetros $I, n, p, C_v, A = \frac{I}{n}, C_f, t_{ig}$. Es muy importante analizar cuando el VAN es positivo, nulo o negativo en función de sus dos variables independientes.

El VAN nulo puede interpretarse como la **curva de nivel cero** de $VAN = VAN\left(Q,r\right)$, la cual puede deducirse a partir de la siguiente equivalencia:

(72) $$VAN\left(Q,r\right) = 0 \Leftrightarrow \left(p-C_v\right)\left(1-t_{ig}\right) f(r)\left(Q-a\right) = I \Leftrightarrow$$

$$Q = a + \frac{I}{\left(p-C_v\right)\left(1-t_{ig}\right) f(r)} = a + \frac{b}{f(r)} = Q_f\left(r\right)$$

y por ende la curva de nivel cero del $VAN\left(Q,r\right)$ viene expresada por la curva en el plano Q, r de ecuación

(73) $$Q = Q_f\left(r\right),\ \forall r > 0$$

o su equivalente

(74) $$r = Q_f^{-1}\left(Q\right),\ Q > Q_c$$

donde $Q_f(r)$ se interpreta como el punto muerto financiero de la cantidad de unidades vendidas en función de la tasa de descuento r y Q_f^{-1} es la función inversa de Q_f la cual está definida $\forall Q > Q_c$, donde Q_c es el punto muerto contable para la cantidad de unidades vendidas dado por (48). ■

3. CÁLCULO NUMÉRICO Y DE SIMULACIÓN DEL PROYECTO DE INVERSIÓN SIMPLE

A continuación se realizarán los cálculos numéricos correspondientes a los siguientes ejemplos como asimismo las correspondientes simulaciones mediante el software Excel.

Ejemplo 1.-

Se consideran los siguientes datos del proyecto de inversión simple:

- Inversión inicial: $I = 150000\ (\$)$;
- Cantidad de años de duración del proyecto: $n = 10$;
- Amortización anual: $A = 15000\ (\$)$;
- Precio de venta por unidad: $p = 3{,}70\ (\$/unidad)$;
- Costo variable de producción por unidad: $C_v = 3{,}00\ (\$/unidad)$;
- Costo fijo anual: $C_f = 30000\ (\$)$;
- Tasa del impuesto a las ganancias: $t_{ig} = 0{,}35\ (35\%)$;
- Tasa de descuento o costo de oportunidad: $r = 0{,}09$ (9 % anual);

Teniendo en cuenta los resultados teóricos obtenidos en la sección anterior se tienen los siguientes valores:

$$a = \frac{C_f - t_{ig}\left(C_f + A\right)}{\left(p - C_v\right)\left(1 - t_{ig}\right)} = \frac{30000 - 0{,}35\left(30000 + 15000\right)}{\left(3{,}70 - 3\right)0{,}65} = \frac{14250}{0{,}455} = 31318{,}68$$

$$b = \frac{I}{(\mathrm{p} - \mathrm{C_v})\ (1 - \mathrm{t_{ig}})} = \frac{150000}{\left(3{,}70 - 3\right)0{,}65} = \frac{150000}{0{,}455} = 329670{,}33$$

$$Q_c = \frac{C_f + A}{p - C_v} = a + \frac{b}{n} = \frac{30000 + 15000}{3{,}70 - 3} = \frac{45000}{0{,}70} = 64285{,}71$$

$$t_{ig}A - (1 - t_{ig})C_f = -C_f + t_{ig}\left(C_f + A\right) = -14250$$

$$f = f(r) = \frac{1}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right] = \frac{1}{0{,}09}\left[1 - \frac{1}{(1{,}09)^{10}}\right] = 6{,}4177$$

$$h = h(r) = -I + f(r)\left[t_{ig}A - \left(1 - t_{ig}\right)C_f\right] = -241451{,}6222$$

$$m = m(r) = f(r)\left(p - C_v\right)\left(1 - t_{ig}\right) = 2{,}92003425$$

$$Q_f = Q_f(r) = a + \frac{b}{f(r)} = -\frac{h(r)}{m(r)} = 82687,94$$

$$VAN\left(Q\right) = h + mQ = -241451,6222 + 2,92\ Q = 2,92(Q - 82687,94)\ .$$

Cuando además se considera a la tasa de descuento r como una variable independiente extra, se tienen los siguientes resultados:

$$\begin{cases} f(r) = \dfrac{1}{r}\left[1 - \dfrac{1}{(1+r)^{10}}\right], \quad r > 0, \\ f\left(0^+\right) = n = 10, \qquad f\left(+\infty\right) = 0 \\ f'\left(0^+\right) = -\dfrac{n\left(n+1\right)}{2} = -55, \qquad f'\left(+\infty\right) = 0 \\ f''\left(0^+\right) = \dfrac{n\left(n+1\right)\left(n+2\right)}{3} = 440, \qquad f''\left(+\infty\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F\left(r\right) = \dfrac{1}{f(r)} = \dfrac{r}{1 - \dfrac{1}{\left(1+r\right)^{10}}}, \quad r > 0 \\ F\left(0^+\right) = \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{10}, \qquad F\left(+\infty\right) = +\infty \\ F'\left(0^+\right) = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 0,55\ , \qquad F''\left(0^+\right) = \dfrac{n^2 - 1}{6n} = 1,65 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_f\left(r\right) = a + bF\left(r\right) = 31318,68 + 329670,33\ F\left(r\right), \quad r > 0 \\ Q_f\left(0^+\right) = a + \dfrac{b}{n} = Q_c = 64285,71 \\ \text{con recta asíntota en } r = +\infty:\ y = a + br = 31318,68 + 329670,33\ r \end{cases}$$

$$VAN(Q,r) = m(r)\left[Q - Q_f\left(r\right)\right] = \left(p - C_v\right)\left(1 - t_{ig}\right) f(r)\left(Q - a\right) - I$$

$$= -150000 + 0,455\frac{1}{r}\left[1 - \frac{1}{\left(1+r\right)^{10}}\right]\left(Q - 31318,68\right),\ \ r > 0,\ \mathrm{Q} > 0\,.$$

A continuación se muestran los resultados obtenidos a través de una planilla de cálculo Excel programando el correspondiente proyecto de inversión:

Anállisis Proyecto Inversión Simple

DATOS

Cantidad Unidades Vendidas Q	82687,94173
Precio Venta Unitario p =	3,70
Costo Variable Unitario Cv =	3,00
Costo Fijo Cf =	30000,00
Inversión I =	150000,00
Cantidad de Años n =	10
Tasa Impuesto a las ganancias Tig =	0,35
Amortización Anual A = I/n	15000,00
Tasa de Rent. - Descuento (Costo de Oportunidad) r =	0,09
Intereses Anuales	0

I) Determinación del Impuesto a las Ganancias:

	Año 0	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4
Ingresos o Ventas por Año (p * Q)		305.945,38	305.945,38	305.945,38	305.945,38
Costos Fijos (Cf)		30.000,00	30.000,00	30.000,00	30.000,00
Costos Variables (Cv * Q)		248.063,83	248.063,83	248.063,83	248.063,83
BAITA (EBITDA) : Beneficios Antes Int.-Imp.y Amort.		27.881,56	27.881,56	27.881,56	27.881,56
Amortización Lineal por año		15.000,00	15.000,00	15.000,00	15.000,00
BAIT (EBIT) : Beneficios Antes Intereses e Impuestos		12.881,56	12.881,56	12.881,56	12.881,56
Intereses		0,00	0,00	0,00	0,00
BAT (EBT) : Beneficios Antes Impuestos		12.881,56	12.881,56	12.881,56	12.881,56
Impuesto a las Ganancias (BAT * Tig)		4508,55	4508,55	4508,55	4508,55
BN : Beneficio o Utilidad Neta		8.373,01	8.373,01	8.373,01	8.373,01

II) Calculo del VAN del Proyecto

	Año 0	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4
Ingresos o Ventas por Año (p * Q)		305.945,38	305.945,38	305.945,38	305.945,38
Costos Fijos (Cf)		30.000,00	30.000,00	30.000,00	30.000,00
Costos Variables (Cv * Q)		248.063,83	248.063,83	248.063,83	248.063,83
BAITA (EBITDA) : Beneficios Antes Int. Imp.y Amort.		27.881,56	27.881,56	27.881,56	27.881,56
Intereses		0,00	0,00	0,00	0,00
BATA (EBTDA) : Beneficios Antes Impuestos y Amort.		27.881,56	27.881,56	27.881,56	27.881,56
Inversión	-150.000,00	0	0	0	0
Impuesto a las Ganancias		4508,55	4508,55	4508,55	4508,55
FCF = Flujo Neto Operativo (BN + Amortizaciones)	-150.000,00	23.373,01	23.373,01	23.373,01	23.373,01
Factor de Descuento al 9 % anual	1	0,91743119	0,84168	0,77218348	0,7084252
Valor Presente Correspondiente al Flujo del Año t	-150000,00	21443,1316	19672,5978	18048,2549	16558,0320
VAN = Suma de Todos los Valores Presentes	**0,00**	3,638E-12			

Otra Forma de Cálculo del FCF:

FCF = Flujo Neto Operativo (BN + Amortizaciones)	-150.000,00	23373,0135	23373,013	23373,0135	23373,013
(1 - Ti) * ((p-Cv) * Q - Cf) + Ti * A					
Q Punto Muerto Financiero =	82687,94173				
Q Financiero al	50%	60%	70%	80%	90%
Q	41343,97	49612,77	57881,56	66150,35	74419,15
VAN (Q)	-120725,81	-96580,65	-72435,49	-48290,32	-24145,16

Año 5	Año 6	Año 7	Año 8	Año 9	Año 10
305.945,38	305.945,38	305.945,38	305.945,38	305.945,38	305.945,38
30.000,00	30.000,00	30.000,00	30.000,00	30.000,00	30.000,00
248.063,83	248.063,83	248.063,83	248.063,83	248.063,83	248.063,83
27.881,56	27.881,56	27.881,56	27.881,56	27.881,56	27.881,56
15.000,00	15.000,00	15.000,00	15.000,00	15.000,00	15.000,00
12.881,56	12.881,56	12.881,56	12.881,56	12.881,56	12.881,56
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
12.881,56	12.881,56	12.881,56	12.881,56	12.881,56	12.881,56
4508,55	4508,55	4508,55	4508,55	4508,55	4508,55
8.373,01	8.373,01	8.373,01	8.373,01	8.373,01	8.373,01

305.945,38	305.945,38	305.945,38	305.945,38	305.945,38	305.945,38
30.000,00	30.000,00	30.000,00	30.000,00	30.000,00	30.000,00
248.063,83	248.063,83	248.063,83	248.063,83	248.063,83	248.063,83
27.881,56	27.881,56	27.881,56	27.881,56	27.881,56	27.881,56
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
27.881,56	27.881,56	27.881,56	27.881,56	27.881,56	27.881,56
0	0	0	0	0	0
4508,55	4508,55	4508,55	4508,55	4508,55	4508,55
23.373,01	23.373,01	23.373,01	23.373,01	23.373,01	23.373,01
0,64993139	0,59626733	0,547034245	0,50186628	0,46042778	0,42241081
15190,8551	13936,5643	12785,83878	11730,1273	10761,5847	9873,01349
23373,0135	23373,0135	23373,01349	23373,0135	23373,01349	23373,0135

100%	110%	120%	130%	140%	150%	160%	170%
82687,94	90956,74	99225,53	107494,32	115763,12	124031,91	132300,71	140569,50
0,00	24145,16	48290,32	72435,49	96580,65	120725,81	144870,97	169016,14

Ejemplo 2: Teniendo en cuenta los datos siguientes:

Datos:	
Inversión I	150000
Cantidad años n	10
Precio venta unitario p	3,70
Costo variable unitario Cv	3,00
Costo fijo anual Cf	30000
Tasa impuesto ganancias tig	0,35

se obtiene la siguiente Tabla 1.

Tasa Descuento r	Punto Muerto Financiero Qf(r)
0,03	69966,10
0,04	71964,05
0,05	74012,50
0,06	76110,32
0,07	78256,32
0,08	80449,28
0,09	82687,94
0,10	84971,01
0,11	87297,17
0,12	89665,11
0,13	92073,48
0,14	94520,95
0,15	97006,17
0,16	99527,83
0,17	102084,59
0,18	104675,16
0,19	107298,23
0,20	109952,56
0,25	123650,30
0,30	137954,98
0,35	152742,30
0,40	167908,96
0,45	183371,28
0,50	199062,79
0,60	230936,39
0,70	263238,31
0,80	295795,68
0,90	328506,70
1,00	361311,27

Tabla 1: valores del punto muerto financiero $Q_f(r)$ vs la tasa de descuento r

que puede visualizarse en la siguiente Figura 1:

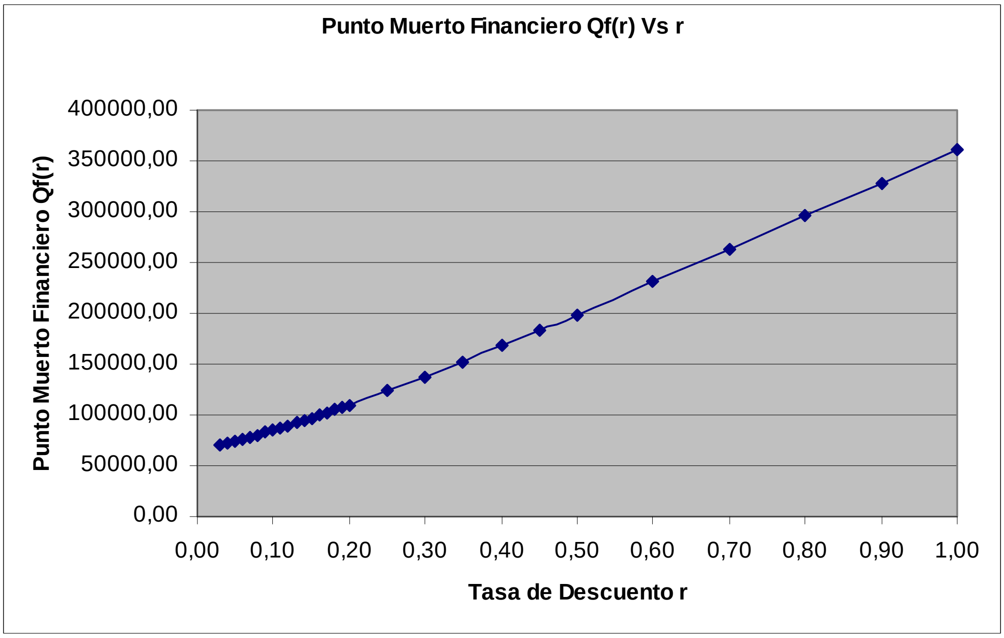

Figura 1: Punto muerto financiero $Q_f\left(r\right)$ vs. r

4. CONCLUSIONES

Se ha demostrado que:

- Cuando la tasa de descuento r es despreciable (es decir, cuando r tiende a cero) el Punto Muerto Financiero, para la variable de cantidad Q, tiende al Punto Muerto Contable.
- Cuando la tasa de descuento r es muy grande (es decir, cuando r tiende a infinito) la gráfica de la función Punto Muerto Financiero $Q_f = Q_f\left(r\right)$, función estrictamente creciente y convexa en la variable r, tiene en $r = +\infty$ una asíntota oblicua dada por la recta de ecuación $y = a + b\,r$ que tiene pendiente $b > 0$ y ordenada al origen a. ■

BIBLIOGRAFIA

Baker, R., and Fox, R. *Capital investment appraisal: a new risk premium model,* Int. Trans. Op. Res., 10 (2003), 115-126.

Brealey, R., and Myers, S., *Fundamentos de financiación empresarial*. Mc Graw- Hill, Madrid, 1993.

Fernandez Blanco, M. *Dirección financiera de la empresa*. Pirámide, Madrid, 1991.

Machain, L., *El valor actual neto como criterio óptimo para seleccionar alternativas de inversión*, Trabajo Final de Especialidad en Finanzas, UNR, Rosario, 2002.

Reichelstein, S., *Providing managerial incentives: cash flows versus accrual accounting*. J. Accounting Res., 38 (2000), 243-269.

Sapag Chain, N., *Evaluación de proyectos de inversión en la empresa*, Prentice Hall, Pearson Education, Buenos Aires, 2001.

Vanhoucke, M., Demeulemeester, E., and Herroelen, W., *On maximizing the net present value of a project under renewablee resource constraints*, Management Sci., 47 (2001), 1113-1121.

Villalobos, J.L., *Matemáticas financieras*, Pearson Educación, Prentice Hall, Segunda Edición, México, 2001.