Asociación Argentina de Mecánica Computacional
Mecánica Computacional Vol XXVI, pp.667-678
Sergio A. Elaskar, Elvio A. Pilotta, Germán A. Torres (Eds.)
Córdoba, Argentina, Octubre 2007

RELACIONES ENTRE LOS TÉRMINOS DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO FINITO TRIDIMENSIONAL HEXAEDRICO DE OCHO NODOS.

Juan Carlos Osorio[1], Miguel Cerrolaza[2]

[1]*Decanato de Ingeniería Civil, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Venezuela*
JCOsorio@ucla.edu.ve, http://www.ucla.edu.ve

[2]*IMME, Facultad de Ingeniería, Universidad Central de Venezuela, Venezuela 50.361*
mcerrola@reacciun.ve http://www.ucv.edu.ve
Palabras Claves: Elementos finitos tridimensionales de 8 nodos, Matriz de Rigidez.

Resumen. El cálculo de los términos de la matriz de rigidez de un elemento finito viene dado por integrales múltiples de funciones racionales, lo cual amerita un alto costo de tiempo de CPU. En el presente trabajo analizaremos esta matriz para el elemento finito hexaédrico de 8 nodos con tres grados de libertad por nodo para problemas de elasticidad tridimensional y para este elemento en particular, el denominador del integrando es un polinomio en tres variables.

La matriz de rigidez es de orden 24x24, simétrica y está particionada en 64 bloques de orden 3x3, correspondientes a la incidencia de los grados de libertad de cada par de nodos. Así, se presenta un conjunto de ecuaciones, donde dado un término de la matriz de Rigidez que no pertenece a la diagonal principal del bloque que le corresponde, se puede calcular directamente el otro término del mismo bloque que esta en posición simétrica con la diagonal principal del bloque. Estas ecuaciones relacionan un total de 84 pares de términos de la matriz de rigidez, lo que representa un ahorro superior al 28% del total de 300 términos que definen la matriz. Además, se mantiene la precisión con que se calculan los términos a introducir en las ecuaciones.

1. INTRODUCCIÓN

El método de los elementos finitos probablemente es una de las técnicas más utilizadas en la ingeniería, la cual permite la definición de un gran número de condiciones de contorno y también la definición de geometrías muy complejas. Uno de los problemas que invierte mayor complejidad es el cálculo de la matriz de rigidez, utilizando elementos finitos tridimensionales, debido a la complejidad de las integrales triples a resolver. Esto se debe a que en el integrando aparecen funciones racionales con un polinomio en tres variables como denominador.

Al analizar las matrices de rigidez de los elementos cuadriláteros planos de 4 y 8 nodos, se observaron que existían términos iguales en las matrices de rigidez para estos elementos finitos, cumpliéndose para cualquier valor de las coordenadas nodales. Esto motivó la búsqueda de relaciones entre los términos de la matriz de rigidez, correspondiente a estos elementos planos; obteniendo ecuaciones lineales que relacionan estos términos, independientemente del método utilizado para calcular la matriz de rigidez.

Este trabajo generaliza los resultados encontrados en trabajos anteriores en el plano extendiéndolo al caso tridimensional. Específicamente en este trabajo se trabaja con el elemento hexaédrico de 8 nodos, cuya matriz de rigidez es de orden 24x24 y simétrica. El uso de está técnica reduce el número de cálculos a efectuar en la busqueda de la matriz de rigidez del elemento finito tratado en este trabajo, y como consecuencia reducirá los tiempos de cálculo en computadora.

2. FORMULACIÓN

Se inicia la formulación con la siguiente configuración de nodos, en los cuales se adoptan tres grados de libertad por cada nodo como se observa en el elemento finito hexaédrico de ocho (8) nodos de la figura 1.

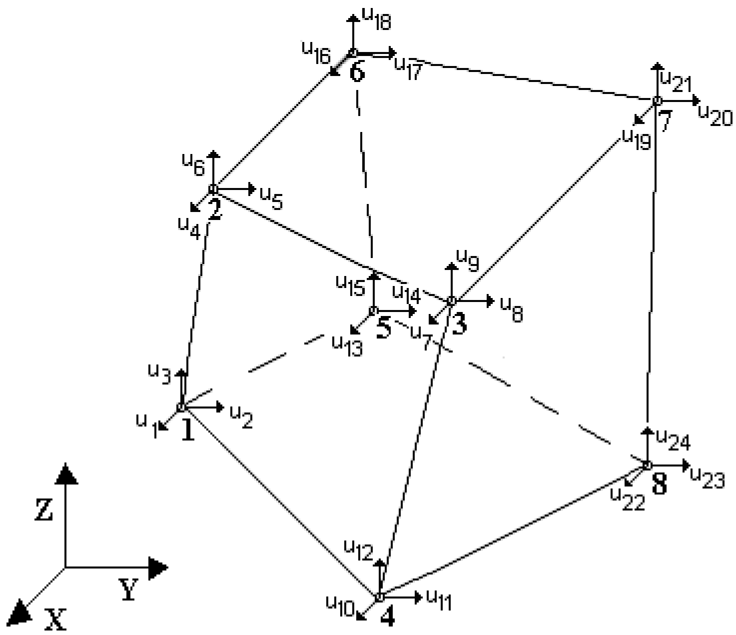

Figura 1: Configuración de nodos y grados de libertad por nodo.

En los medios continuos, se utiliza el método de elementos finitos (M.E.F.) para calcular la matriz de rigidez, el cual se basa en el método de los desplazamientos. Primero se transforma el elemento finito general definido en el espacio Cartesiano XYZ a otro espacio normalizado llamado espacio Gaussiano $\xi\eta\zeta$, relacionando ambos espacios mediante una transformación de coordenadas **T**.

Al ubicarse en el espacio Gaussiano $\xi\eta\zeta$ y tomando la formulación del método de elementos finitos, es necesario usar funciones de forma, las cuales definen la geometría y los campos de desplazamientos. Las funciones de forma dependen de las coordenadas del elemento finito hexaédrico en el espacio normalizado. Una propiedad fundamental de estas funciones es la de tomar el valor "1" en el nodo en estudio y "0" en los demás nodos.

Para obtener esta transformación y poder interpolar el campo de desplazamiento, la geometría y la deformación en cada nodo se utilizan las funciones de forma:

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) & N_2 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\
N_3 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta) & N_4 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \\
N_5 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta) & N_6 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \\
N_7 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta) & N_8 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Así, la transformación isoparamétrica de coordenadas que relaciona los espacios XYZ y $\xi\eta\zeta$ está dada por:

$$
\begin{aligned}
x &= \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi,\eta,\zeta)\, x_i \\
y &= \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi,\eta,\zeta)\, y_i \\
z &= \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi,\eta,\zeta)\, z_i
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Los términos de la matriz de rigidez del elemento finito a trabajar se obtienen al calcular las integrales dadas en los bloques siguientes para un par de nodos i, j con i=1..8 , j=1..8.

$$K_{ij} = \iiint_S B_i^t D B_j \, dxdydz \tag{3}$$

Donde la matriz constitutiva de parámetros elásticos (**D**), es como sigue:

$$
D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}
\begin{pmatrix}
1 & E_1 & E_1 & 0 & 0 & 0 \\
E_1 & 1 & E_1 & 0 & 0 & 0 \\
E_1 & E_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & E_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & E_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_2
\end{pmatrix}
\tag{4}
$$

y $$E_1 = \frac{\nu}{1-\nu} \tag{5}$$

$$E_2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \tag{6}$$

Siendo **E** el modulo de Young y ν el coeficiente de Poisson y con la matriz **B** deformación desplazamiento dada por:

$$B_i^t = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{7}$$

Mediante la transformación dada en (2) las integrales (3) son equivalentes a:

$$K_{ij} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} B_i^t(\xi,\eta,\zeta)DB_j(\xi,\eta,\zeta)\,|J|\,d\xi d\eta\, d\zeta \tag{8}$$

Donde, el escalar |J| es el determinante de la matriz Jacobiano J, dada por:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \tag{9}$$

A manera de simplificar se utiliza la siguiente notación:

$$N_{ix} = \frac{\partial N_i}{\partial x}$$
$$N_{iy} = \frac{\partial N_i}{\partial y} \tag{10}$$
$$N_{iz} = \frac{\partial N_i}{\partial z}$$

Si se desarrollan los integrandos dados en (8), se obtiene:

$$B_i^t DB_j\,|J| = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}|J|\,.\,\overline{K} \tag{11}$$

con

$$\overline{K} = \begin{pmatrix} N_{ix}N_{jx} + E_2(N_{iy}N_{jy} + N_{iz}N_{jz}) & E_1N_{ix}N_{jy} + E_2N_{iy}N_{jx} & E_1N_{ix}N_{jz} + E_2N_{iz}N_{jx} \\ E_1N_{iy}N_{jx} + E_2N_{ix}N_{jy} & N_{iy}N_{jy} + E_2(N_{ix}N_{jx} + N_{iz}N_{jz}) & E_1N_{iy}N_{jz} + E_2N_{iz}N_{jy} \\ E_1N_{iz}N_{jx} + E_2N_{ix}N_{jz} & E_1N_{iz}N_{jy} + E_2N_{iy}N_{jz} & N_{iz}N_{jz} + E_2(N_{ix}N_{jx} + N_{iy}N_{jy}) \end{pmatrix} \tag{12}$$

3. ALCANCES

Adoptaremos la siguiente notación para las integrales de los bloques dados en (8),

$$\begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \\ M_4 & M_5 & M_6 \\ M_7 & M_8 & M_9 \end{pmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} K^* \tag{13}$$

Con K^*=

$$\begin{pmatrix} \iiint_S [N_{ix}N_{jx} + E_2(N_{iy}N_{jy} + N_{iz}N_{jz})]\left|J\right| dV & \iiint_S [E_1 N_{ix}N_{jy} + E_2 N_{iy}N_{jx}]\left|J\right| dV & \iiint_S [E_1 N_{ix}N_{jz} + E_2 N_{iz}N_{jx}]\left|J\right| dV \\ \iiint_S [E_1 N_{iy}N_{jx} + E_2 N_{ix}N_{jy}]\left|J\right| dV & \iiint_S [N_{iy}N_{jy} + E_2(N_{ix}N_{jx} + N_{iz}N_{jz})]\left|J\right| dV & \iiint_S [E_1 N_{iy}N_{jz} + E_2 N_{iz}N_{jy}]\left|J\right| dV \\ \iiint_S [E_1 N_{iz}N_{jx} + E_2 N_{ix}N_{jz}]\left|J\right| dV & \iiint_S [E_1 N_{iz}N_{jy} + E_2 N_{iy}N_{jz}]\left|J\right| dV & \iiint_S [N_{iz}N_{jz} + E_2(N_{ix}N_{jx} + N_{iy}N_{jy})]\left|J\right| dV \end{pmatrix} \tag{14}$$

Donde S es el cubo unitario [-1,1]x[-1,1]x[-1,1]. Ahora, con un simple desarrollo algebraico y de las ecuaciones (5) y (6) se demuestra que:

$$M_2 – M_4 == \frac{E(4\nu\ \ 1)}{2(1+\nu)(1\ \ 2\nu)} \int\int\int_S (N_{ix}N_{jy} - N_{iy}N_{jx})\left|J\right| dV$$

$$M_3 – M_7 == \frac{E(4\nu\ \ 1)}{2(1+\nu)(1\ \ 2\nu)} \int\int\int_S (N_{ix}N_{jz} - N_{iz}N_{jx})\left|J\right| dV \tag{15}$$

$$M_6 – M_8 == \frac{E(4\nu\ \ 1)}{2(1+\nu)(1\ \ 2\nu)} \int\int\int_S (N_{iy}N_{jz} - N_{iz}N_{jy})\left|J\right| dV$$

El teorema que se presenta a continuación representa las relaciones anteriores en términos de las coordenadas nodales multiplicadas por coeficientes obtenidos por integraciones.

Teorema. Dadas los coordenadas nodales (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4), (x_5, y_5, z_5), (x_6, y_6, z_6), (x_7, y_7, z_7), (x_8, y_8, z_8) del elemento finito en estudio, entonces se tiene que

$$M_2 - M_4 = \frac{E(4\nu - 1)}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \sum_{k=1}^{8} z_k C_{[i,j]}(k)$$

$$M_3 - M_7 = \frac{E(4\nu - 1)}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \sum_{k=1}^{8} y_k C_{[i,j]}(k) \tag{16}$$

$$M_6 - M_8 = \frac{E(4\nu - 1)}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \sum_{k=1}^{8} x_k C_{[i,j]}(k)$$

Donde

$$C_{[i,j]}(k) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(N_{i\eta}N_{j\zeta} - N_{i\zeta}N_{j\eta}\right)N_{k\xi} - \left(N_{i\xi}N_{j\zeta} - N_{i\zeta}N_{j\xi}\right)N_{k\eta} + \left(N_{i\xi}N_{j\eta} - N_{i\eta}N_{j\xi}\right)N_{k\zeta} dV \tag{17}$$

Demostración

Recordemos que por la regla de la cadena, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{18}$$

De donde

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{1}{|J|} \mathrm{Adj}(J) \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \tag{19}$$

Retomando la notacion dada en (10), generalizada con

$$k_\rho = \frac{\partial k}{\partial \rho} \tag{20}$$

Además de utilizar las letras en negritas para denotar filas o columna conformada por derivadas y |A| para denotar el determinante de la matriz A, por ejemplo

$$\mathbf{dk} = \begin{pmatrix} k_\varepsilon & k_\eta & k_\zeta \end{pmatrix} \tag{21}$$

Así,

$$N_{ix} = \frac{1}{|J|} \begin{vmatrix} \mathbf{N_{i\xi}} & \mathbf{N_{i\eta}} & \mathbf{N_{i\zeta}} \\ \mathbf{y_\xi} & \mathbf{y_\eta} & \mathbf{y_\zeta} \\ \mathbf{z_\xi} & \mathbf{z_\eta} & \mathbf{z_\zeta} \end{vmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{vmatrix} \mathbf{dN_i} \\ \mathbf{dy} \\ \mathbf{dz} \end{vmatrix} \tag{22}$$

$$N_{iy} = \frac{1}{|J|} \begin{vmatrix} \mathbf{x_\xi} & \mathbf{x_\eta} & \mathbf{x_\zeta} \\ \mathbf{N_{i\xi}} & \mathbf{N_{i\eta}} & \mathbf{N_{i\zeta}} \\ \mathbf{z_\xi} & \mathbf{z_\eta} & \mathbf{z_\zeta} \end{vmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{vmatrix} \mathbf{dx} \\ \mathbf{dN_i} \\ \mathbf{dz} \end{vmatrix} \tag{23}$$

$$N_{iz} = \frac{1}{|J|} \begin{vmatrix} \mathbf{x_\xi} & \mathbf{x_\eta} & \mathbf{x_\zeta} \\ \mathbf{y_\xi} & \mathbf{y_\eta} & \mathbf{y_\zeta} \\ \mathbf{N_{i\xi}} & \mathbf{N_{i\eta}} & \mathbf{N_{i\zeta}} \end{vmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{vmatrix} \mathbf{dx} \\ \mathbf{dy} \\ \mathbf{dN_i} \end{vmatrix} \tag{24}$$

Luego, parte del integrando de la primera ecuación de (15), se puede expresar como:

$$N_{ix} N_{jy} - N_{iy} N_{jx} = \frac{1}{|J|^2} \begin{vmatrix} \mathbf{dN_i} \\ \mathbf{dy} \\ \mathbf{dz} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{dx} & \mathbf{dN_j} & \mathbf{dz} \end{vmatrix} - \frac{1}{|J|^2} \begin{vmatrix} \mathbf{dx} \\ \mathbf{dN_i} \\ \mathbf{dz} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{dN_j} & \mathbf{dy} & \mathbf{dz} \end{vmatrix} \tag{25}$$

Es fácil probar que el determinante del producto de dos matrices cuadradas es el producto del determinante de las matrices, el determinante de la transpuesta de una matriz es igual al determinante de la matriz y usando el punto para identificar el producto escalar entre filas y columnas, tenemos

$$N_{ix}\,N_{jy}-N_{iy}\,N_{jx}=\frac{1}{|J|^2}\begin{vmatrix} \mathbf{dN_i.dx} & \mathbf{dN_i.dN_j} & \mathbf{dN_i.dz} \\ \mathbf{dy.dx} & \mathbf{dy.dN_j} & \mathbf{dy.dz} \\ \mathbf{dz.dx} & \mathbf{dz.dN_j} & \mathbf{dz.dz} \end{vmatrix} - \frac{1}{|J|^2}\begin{vmatrix} \mathbf{dx.dN_j} & \mathbf{dx.dy} & \mathbf{dx.dz} \\ \mathbf{dN_i.dN_j} & \mathbf{dN_i.dy} & \mathbf{dN_i.dz} \\ \mathbf{dz.dN_j} & \mathbf{dz.dy} & \mathbf{dz.dz} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{|J|^2}\begin{vmatrix} \mathbf{dz.dx} & \mathbf{dz.dy} & \mathbf{dz.dz} \\ \mathbf{dN_i.dx} & \mathbf{dN_i.dy} & \mathbf{dN_i.dz} \\ \mathbf{dN_j.dx} & \mathbf{dN_j.dy} & \mathbf{dN_j.dz} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{|J|^2}\begin{vmatrix} \mathbf{dz} \\ \mathbf{dN_i} \\ \mathbf{dN_j} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \mathbf{dx} & \mathbf{dy} & \mathbf{dz} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{|J|^2}\,|J|\begin{vmatrix} z_\xi & z_\eta & z_\zeta \\ N_{i\xi} & N_{i\eta} & N_{i\zeta} \\ N_{j\xi} & N_{j\eta} & N_{j\zeta} \end{vmatrix} \tag{26}$$

$$=\frac{1}{|J|}\sum_{k=1}^{8} z_k \begin{vmatrix} N_{k\xi} & N_{k\eta} & N_{k\zeta} \\ N_{i\xi} & N_{i\eta} & N_{i\zeta} \\ N_{j\xi} & N_{j\eta} & N_{j\zeta} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{|J|}\sum_{k=1}^{8} z_k \left(\left(N_{i\eta}N_{j\zeta}-N_{i\zeta}N_{j\eta}\right)N_{k\xi}+\left(N_{i\xi}N_{j\zeta}-N_{i\zeta}N_{j\xi}\right)N_{k\eta}+\left(N_{i\xi}N_{j\eta}-N_{i\eta}N_{j\xi}\right)N_{k\zeta}\right)$$

Por último

$$M_2–M_4=\frac{E(4\nu-1)}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\iiint_S (N_{ix}N_{jy}-N_{iy}N_{jx})|J|dV$$

$$=\frac{E(4\nu-1)}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\int\int_S\int\frac{1}{|J|}\sum_{k=1}^{8} z_k\left(\left(\left(N_{i\eta}N_{j\zeta}-N_{i\zeta}N_{j\eta}\right)N_{k\xi}+\left(N_{i\eta}N_{j\zeta}-N_{i\zeta}N_{j\eta}\right)N_{k\xi}+\left(N_{i\eta}N_{j\zeta}-N_{i\zeta}N_{j\eta}\right)N_{k\xi}\right)\right)|J|dV$$

$$=\frac{E(4\nu\quad 1)}{2(1+\nu)(1\quad 2\nu)}\sum_{k=1}^{8} z_k C_{[i,j]}(k)$$

Con $C_{[i,j]}(k)$ dado como en (17).

Análogamente se pueden demostrar las otras dos igualdades.

Observación. En total 224 coeficientes que acompañan a las coordenadas nodales son calculados una única vez con el paquete matemático Maple V, para luego ser utilizados de manera directa en las ecuaciones (16). A continuación en la tabla 1, se presenta el valor de cada $C_{[i,j]}(k)$ para cada par de nodos, como se podrá apreciar en su mayoría todos son iguales a cero o toman el valor 1/12 o -1/12.

i	j	$C_{[i,j]}(1)$	$C_{[i,j]}(2)$	$C_{[i,j]}(3)$	$C_{[i,j]}(4)$	$C_{[i,j]}(5)$	$C_{[i,j]}(6)$	$C_{[i,j]}(7)$	$C_{[i,j]}(8)$
1	**2**	0	0	-1/12	-1/12	1/12	1/12	0	0
1	**3**	0	1/12	0	-1/12	0	0	0	0
1	**4**	0	1/12	1/12	0	-1/12	0	0	-1/12
1	**5**	0	-1/12	0	1/12	0	-1/12	0	1/12
1	**6**	0	-1/12	0	0	1/12	0	0	0
1	**7**	0	0	0	0	0	0	0	0
1	**8**	0	0	0	1/12	-1/12	0	0	0
2	**3**	-1/12	0	0	-1/12	0	1/12	1/12	0
2	**4**	-1/12	0	1/12	0	0	0	0	0
2	**5**	1/12	0	0	0	0	-1/12	0	0
2	**6**	1/12	0	-1/12	0	1/12	0	-1/12	0
2	**7**	0	0	-1/12	0	0	1/12	0	0
2	**8**	0	0	0	0	0	0	0	0
3	**4**	-1/12	-1/12	0	0	0	0	1/12	1/12
3	**5**	0	0	0	0	0	0	0	0
3	**6**	0	1/12	0	0	0	0	-1/12	0
3	**7**	0	1/12	0	-1/12	0	1/12	0	-1/12
3	**8**	0	0	0	-1/12	0	0	1/12	0
4	**5**	-1/12	0	0	0	0	0	0	1/12
4	**6**	0	0	0	0	0	0	0	0
4	**7**	0	0	1/12	0	0	0	0	-1/12
4	**8**	-1/12	0	1/12	0	-1/12	0	1/12	0
5	**6**	-1/12	-1/12	0	0	0	0	1/12	1/12
5	**7**	0	0	0	0	0	-1/12	0	1/12
5	**8**	1/12	0	0	1/12	0	-1/12	-1/12	0
6	**7**	0	-1/12	-1/12	0	1/12	0	0	1/12
6	**8**	0	0	0	0	1/12	0	-1/12	0
7	**8**	0	0	-1/12	-1/12	1/12	1/12	0	0

Tabla 1. Valores de los coeficientes

Observando las filas que son completamente nulas concluimos, que los bloques correspondientes a los pares de nodos (1,7), (2,8), (3,5) y (4,6) deben ser simétricos ya que los términos de lado derecho en las ecuaciones (16) dan cero.

Ejemplo. Dado el elemento finito hexaédrico con nodos en la tabla 2, con E=1 y ν=0, podemos calcular los términos de la matriz de rigidez por cuadratura Guassiana de orden 2x2(tabla 3), y expresarla en bloques para cada par de nodos.

	x_k	y_k	z_k
1	-1	-2	-1
2	-2	-2	3
3	3	-1	4
4	3	-1	-2
5	-2	3	-1
6	-2	3	3
7	5	3	3
8	4	3	-2

Tabla 2 .Coordenadas de los nodos.

Recordemos que la matriz de rigidez es simétrica, por lo que los bloques correspondientes a nodos iguales son también simétricos.

Se puede ver también que efectivamente se cumple la observación dada antes del ejemplo ya que los pares de nodos (1,7), (2,8), (3,5) y (4,6) son simétricos.

Para comprobar la veracidad del teorema tomaremos el bloque correspondiente a los nodos i=3 y j=7. Si tomamos de la tabla solo los términos
M_4= 0.2370207428, M_7=0.1089046801, M_8=-0.2467547179

Ahora por el teorema,

M_2= -1/2(1/12 z_2 + (-1/12) z_4 + 1/12 z_6 + (-1/12) z_8)+ M_4
=-1/24(3-(-2) + 3-(-2)) + 0.2370207428
=-0.1796459239

M_3= -1/2(1/12 y_2 + (-1/12) y_4 + 1/12 y_6 + (-1/12) y_8) + M_7
=-1/24(-2-(-1)+3-(3))+ 0.1089046801
=0.06723801343

M_6= -1/2(1/12 x_2 + (-1/12) x_4 + 1/12 x_6 + (-1/12) x_8) + M_8
= -1/24(-2-3 + (-2) -4)- 0.2467547179
= 0.2115761543

Para una mayor precisión de los resultados obtenidos, se puede extraer el factor común 1/12 y reeditar la tabla 1, de manera que la conformen solo los valores 0, 1 y -1.

La siguiente tabla muestra la matriz de rigidez del elemento finito dado, en bloques para cada par de nodos.

i= 1, j = 1

$$\begin{bmatrix} 1.101606492 & 0.1690629318 & 0.1862628091 \\ 0.1690629318 & 1.142212760 & 0.2311750041 \\ 0.1862628091 & 0.2311750042 & 1.192208546 \end{bmatrix}$$

i= 1, j = 2

$$\begin{bmatrix} -0.00930707378 & 0.05889225248 & 0.1626519858 \\ 0.05889225249 & 0.05213849026 & 0.2047042595 \\ -.1706813476 & -.2119624077 & -.3845023494 \end{bmatrix}$$

i= 1, j = 3

$$\begin{bmatrix} -.3509719538 & -.1036810647 & -.2161674093 \\ 0.1046522686 & -.1492835334 & 0.1162881836 \\ -.1745007426 & -0.09204514973 & -.3705860606 \end{bmatrix}$$

i= 1, j = 4

$$\begin{bmatrix} -.2956523186 & -.1812629157 & -.2199760843 \\ 0.2354037513 & 0.09384447225 & 0.1096960706 \\ 0.1550239158 & 0.06802940409 & 0.07970331533 \end{bmatrix}$$

i= 1, j = 5

$$\begin{bmatrix} 0.2113179876 & 0.2296070118 & 0.1360541971 \\ -.1870596552 & -.1992205734 & -.2134385204 \\ 0.09438753038 & 0.2448948135 & 0.2423793649 \end{bmatrix}$$

i= 1, j = 6

$$\begin{bmatrix} -.2174645448 & 0.08134639626 & 0.1183158842 \\ -0.08532027039 & -.4216279414 & -.2396072978 \\ -0.09001744914 & -.2396072981 & -.4297810528 \end{bmatrix}$$

i= 1, j = 7

$$\begin{bmatrix} -.2313135997 & -0.09555535988 & -0.08603038009 \\ -0.09555535980 & -.2566354128 & -.1081900785 \\ -0.08603038002 & -.1081900785 & -.2612642409 \end{bmatrix}$$

i= 1, j = 8

$$\begin{bmatrix} -.2082149890 & -.1584092522 & -0.08111100249 \\ -.2000759187 & -.2614282609 & -.1006276210 \\ 0.08555566416 & 0.1077057123 & -0.06815752239 \end{bmatrix}$$

i= 2, j = 2

$$\begin{bmatrix} 0.9385735177 & 0.1201661119 & -.1496713174 \\ 0.1201661119 & 0.9871570665 & -.1882522108 \\ -.1496713174 & -.1882522108 & 1.000891973 \end{bmatrix}$$

i= 2, j = 3

$$\begin{bmatrix} -.2234662709 & -.1449636811 & 0.1989010980 \\ 0.2300363189 & 0.1209728922 & -.1172162731 \\ -.1760989021 & -0.07554960648 & 0.1573604692 \end{bmatrix}$$

i= 3, j = 6

$$\begin{bmatrix} -.4621955059 & 0.2320076703 & -.1041420444 \\ 0.2320076703 & -.5727160623 & 0.1498560992 \\ 0.1041912889 & -.1418105674 & -.2413652768 \end{bmatrix}$$

i= 3, j = 7

$$\begin{bmatrix} -.1058038829 & -.1796459238 & 0.06723801353 \\ 0.2370207428 & -.5880919676 & 0.2115786153 \\ 0.1089046801 & -.2467547179 & -0.07173950408 \end{bmatrix}$$

i= 3, j = 8

$$\begin{bmatrix} -.1699121836 & -0.08422118802 & 0.05765336692 \\ 0.1241121453 & -.3671134780 & 0.1841990471 \\ -.1090132997 & 0.2675323805 & -.3440106706 \end{bmatrix}$$

i= 4, j = 4

$$\begin{bmatrix} 1.261739691 & -.2680988922 & -.1905516746 \\ -.2680988922 & 1.425287980 & 0.2582922384 \\ -.1905516746 & 0.2582922385 & 1.175363278 \end{bmatrix}$$

i= 4, j = 5

$$\begin{bmatrix} -.4404092191 & 0.2439960106 & 0.1031759833 \\ 0.2023293441 & -.4726415152 & -.1010904878 \\ -.1051573500 & 0.1072428456 & -.2168120984 \end{bmatrix}$$

i= 4, j = 6

$$\begin{bmatrix} -.3371680765 & 0.1185955411 & 0.09962539526 \\ 0.1185955412 & -.3980136027 & -.1296278069 \\ 0.09962539532 & -.1296278070 & -.3400089731 \end{bmatrix}$$

i= 4, j = 7

$$\begin{bmatrix} -.2484438552 & -.1183515078 & -0.06745497775 \\ 0.1316484921 & -.5289108716 & -.2117729110 \\ 0.09921168884 & -.2534395776 & -.4258771124 \end{bmatrix}$$

i= 4, j = 8

$$\begin{bmatrix} -0.06627529144 & -.1530205914 & -0.05662215522 \\ 0.2219794087 & -.4997043102 & -.1830053068 \\ -0.09828882188 & 0.2753280266 & -0.01319202826 \end{bmatrix}$$

i= 5, j = 5

$$\begin{bmatrix} 1.170822637 & -.2407584544 & 0.2224208720 \\ -.2407584544 & 1.155733867 & -.2252129558 \\ 0.2224208720 & -.2252129558 & 1.264014714 \end{bmatrix}$$

i= 5, j = 6

$$\begin{bmatrix} -0.03640240778 & -0.08625941590 & 0.1817057474 \\ -.1279260825 & 0.02108158710 & -.2750707984 \\ -.2349609194 & 0.2249292019 & -.4951180817 \end{bmatrix}$$

i= 2, j = 4

$$\begin{bmatrix} -.2818667838 & -0.07885927437 & 0.2015397333 \\ 0.1294740589 & -.1075923372 & -.1116821209 \\ 0.1598730664 & 0.05498454571 & -.2715974981 \end{bmatrix}$$

i= 2, j = 5

$$\begin{bmatrix} -.2010988927 & 0.09943757556 & -.1318755859 \\ -0.06722909114 & -.3726746263 & 0.1976702046 \\ 0.07645774742 & 0.2393368712 & -.4186435961 \end{bmatrix}$$

i= 2, j = 6

$$\begin{bmatrix} 0.1069554105 & 0.1798377015 & -.1147025649 \\ -.1951622986 & -.3017883268 & 0.2234246640 \\ -0.07303589822 & -.2349086695 & 0.1448804528 \end{bmatrix}$$

i= 2, j = 7

$$\begin{bmatrix} -.1519548763 & -.1577133615 & 0.08620395146 \\ -.1993800281 & -.1830956493 & 0.1083455150 \\ -0.08046271516 & -0.09998781827 & -0.00730913256 \end{bmatrix}$$

i= 2, j = 8

$$\begin{bmatrix} -.1778350308 & -0.07679732432 & 0.08028603314 \\ -0.07679732426 & -.1951175088 & 0.09967262876 \\ 0.08028603309 & 0.09967262876 & -.2210803187 \end{bmatrix}$$

i= 3, j = 3

$$\begin{bmatrix} 1.247471928 & -.2720290306 & 0.2246524424 \\ -.2720290306 & 1.422658118 & -.2430302122 \\ 0.2246524424 & -.2430302123 & 1.191610872 \end{bmatrix}$$

i= 3, j = 4

$$\begin{bmatrix} 0.4080758526 & -.1463317039 & 0.2135971133 \\ -.1879983706 & 0.4877301837 & -.2558096758 \\ -.2030695531 & 0.2441903241 & 0.01242111736 \end{bmatrix}$$

i= 3, j = 5

$$\begin{bmatrix} -.3431979836 & 0.1155315885 & -.1083992472 \\ 0.1155315886 & -.3541561525 & 0.1208008826 \\ -.1083992473 & 0.1208008826 & -.3336909464 \end{bmatrix}$$

i= 5, j = 7

$$\begin{bmatrix} -.2234662709 & -.1449636811 & 0.1989010980 \\ 0.2300363189 & 0.1209728922 & -.1172162731 \\ -.1760989021 & -0.07554960648 & 0.1573604692 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -.2937559110 & 0.1004142226 & -.1914460786 \\ -.1079191107 & -0.08138890327 & -.1131635032 \\ -.1914460785 & 0.1368364967 & -.3204213362 \end{bmatrix}$$

i= 5, j = 8

$$\begin{bmatrix} -0.06727621075 & 0.1630314613 & -.1699692212 \\ -.2119685389 & 0.3032663168 & -0.09882815514 \\ 0.2050307788 & -.1404948218 & 0.2782919797 \end{bmatrix}$$

i= 6, j = 6

$$\begin{bmatrix} 1.152879173 & -.2537241723 & -.1930114059 \\ -.2537241723 & 1.318895240 & 0.2767669484 \\ -.1930114060 & 0.2767669484 & 1.321872809 \end{bmatrix}$$

i= 6, j = 7

$$\begin{bmatrix} 0.03724008075 & 0.2131265374 & 0.2060134312 \\ -.2035401295 & 0.4419282987 & 0.1312500210 \\ -.1689865689 & 0.1729166877 & 0.3911982311 \end{bmatrix}$$

i= 6, j = 8

$$\begin{bmatrix} -.2438441292 & 0.09840307522 & 0.1811955573 \\ -0.06826359141 & -0.08775919310 & 0.1130081704 \\ 0.1811955572 & -.1786584962 & -.3516781080 \end{bmatrix}$$

i= 7, j = 7

$$\begin{bmatrix} 0.9550266905 & 0.1591901603 & 0.1742589595 \\ 0.1591901602 & 1.122815908 & 0.2174475085 \\ 0.1742589595 & 0.2174475085 & 1.035202089 \end{bmatrix}$$

i= 7, j = 8

$$\begin{bmatrix} 0.03900535405 & 0.07853523288 & 0.1445504140 \\ 0.07853523290 & 0.07337859774 & 0.1811714996 \\ -.1887829192 & -.2354951671 & -.3397889930 \end{bmatrix}$$

i= 8, j = 8

$$\begin{bmatrix} 0.8943524813 & 0.1324785866 & -.1559829924 \\ 0.1324785866 & 1.034477836 & -.1955902628 \\ -.1559829924 & -.1955902628 & 1.059615662 \end{bmatrix}$$

Tabla 3 .Bloques que conforman la matriz de rigidez del elemento

4. CONCLUSIONES

Como conclusión podemos resaltar que se encontró una nueva forma de cálculo de algunos de los términos que conforman la matriz de rigidez del elemento finito de forma hexaédrica de ocho nodos, la cual puede seguir extendiéndose a otro tipo de elementos finitos tridimensionales o planos.

Las ecuaciones obtenidas para este elemento finito nos proporciona una reducción del 28% de los cálculos de los términos de la matriz de rigidez del elemento, la cual se transforma en un ahorro sustancial del tiempo de CPU, cuando el continuo en estudio es discretizado en un número excesivamente alto de elementos finitos.

La precisión de los resultados es la misma de los términos introducidos en las ecuaciones obtenidas.

REFERENCIAS

D.V.Griffiths, Stiffness matrix of the four-node quadrilateral element in closed form, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 37, 1027-1038, 1994

J.C. Osorio, I. Lozada, M. Cerrolaza, D.V. Griffiths, Semi-Analytical Integration of the 8-Node Plane Element Stiffness Matrix Using Symbolic Computation. *Num. Methods for Partial Eqns*, 21.2004.

J.C. Osorio, I. Lozada, M. Cerrolaza, D.V. Griffiths, One equation among terms of stiffness matrix of the 8-nodes.(Submitted). *J. of Finite Elements in Anal. And Design*. 2005