

## ANÁLISIS NO-LINEAL DE VIGAS ANISÓTROPAS DE LAMINADOS COMPUESTOS SEGÚN UNA TEORÍA MODIFICADA DE DEFORMACIONES POR CORTE

**Alejandro Verri Kozłowski**

*Mecánica de Laminados Compuestos. Departamento de Estabilidad, Facultad de Ingeniería.  
Universidad de Buenos Aires, Paseo Colón 850, 1063 Buenos Aires, Argentina  
[averri@fi.uba.ar](mailto:averri@fi.uba.ar), <http://www.fi.uba.ar/materias/mlc>*

**Palabras Clave:** Laminados Compuestos, Viga de Timoshenko, Torsión, Deformaciones por corte, Elementos Finitos, Análisis no-lineal.

**Resumen.** El presente trabajo trata sobre la formulación e implementación numérica de un elemento finito de viga 3D de eje recto para el análisis geoméricamente no-lineal de secciones prismáticas anisótropas no homogéneas que exhiben acoplamiento en torsión, flexión, extensión y corte. El elemento de viga propuesto se formula a partir de una teoría de vigas laminadas equivalente al modelo de viga de Timoshenko, y utiliza una teoría modificada de deformaciones por corte no-lineal que permite considerar de manera simplificada el acoplamiento de torsión-extensión-flexión y corte sobre el campo de desplazamientos del elemento. El modelo propone un conjunto de funciones de forma con continuidad clase C1 particulares que incorporan las distorsiones de corte no lineales del plano de la sección transversal a las relaciones diferenciales existentes entre giros y desplazamientos transversales de la formulación hermítica clásica. La ecuación constitutiva de la sección transversal del elemento (punto de Gauss) se obtiene a partir de una integración selectiva de las ecuaciones constitutivas (ortótropas) de cada lámina, incluyendo las componentes tensoriales del tensor constitutivo asociadas a las tensiones interlaminares y considerando además los términos de deformaciones iniciales resultantes de los gradientes de temperatura y humedad originados en el proceso de curado de un laminado compuesto. A partir de un planteo Lagrangiano total (TL) fue formulada e implementada numéricamente una matriz tangente rigidez que incluye términos de tensiones y desplazamientos iniciales para el análisis geoméricamente no-lineal de vigas anisótropas de sección transversal inicialmente torsionadas o curvadas. Finalmente, el modelo propuesto fue implementado sobre un programa de código abierto para el análisis de estructuras de elementos finitos de materiales compuestos desarrollado en la cátedra de Mecánica de Laminados Compuestos de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires (FIUBA), con el que se obtuvieron resultados para algunos problemas de la bibliografía clásica de laminados

## 1 INTRODUCCIÓN

En los últimos años, la industria aeronáutica ha venido incorporado a los materiales compuestos como parte integral de los procesos de diseño y fabricación de los diversos elementos estructurales de aeronaves comerciales. (S. Steinke and M. Gründer, 2003) El reemplazo progresivo de los materiales tradicionales (aleaciones de aluminio) por secciones de laminados compuestos han producido cambios importantes en el diseño de aeronaves comerciales, debido principalmente a la reducción del peso (entre un 15% y 20 %) y el aumento de la rigidez y la resistencia de los elementos estructurales del fuselaje y las alas, que resultan en diseños de aeronaves con mejor performance y mayor autonomía de vuelo, debido al menor consumo de combustible (S. Steinke, 2004)

En la estructura resistente del fuselaje y las alas de una aeronave comercial, se requieren componentes estructurales que deben poder soportar esfuerzos combinados de flexión, torsión, corte y extensión, vibraciones, fatiga, etc. habitualmente en condiciones extremas de temperatura. En algunos casos, configuraciones geométricas particulares (secciones transversales fuertemente curvadas o torsionadas) requieren la consideración adicional de efectos geoméricamente no-lineales sobre la rigidez de los elementos estructurales (P. Masarati and M. Morandini, 2002) La utilización de materiales anisótropos formado por laminados compuestos reforzados con fibras, establece la necesidad adicional de modelos de material con la capacidad de análisis de problemas de tensiones interlaminares, delaminación, falla progresiva, etc. característicos de estos materiales. Los materiales anisótropos formados por laminados compuestos reforzados, brindan la ventaja adicional de diseñar el material juntamente con la estructura a partir del diseño de secuencias de laminación óptimas (orientación del refuerzo) pero al mismo tiempo requieren de modelos de análisis relativamente más sofisticados para el análisis y el diseño.

El objeto del presente trabajo consiste en formular e implementar un modelo numérico para el análisis por elementos finitos de vigas anisótropas, formadas por laminados compuestos reforzados, que puedan estar sometidas a esfuerzos combinados de flexión, torsión, extensión y corte, y que puedan estar dispuestos según configuraciones geométricas que requieran de un análisis geoméricamente no-lineal basado en deformaciones finitas.

## 2 REVISIÓN DE LA TEORÍA DE VIGAS LAMINADAS

En los últimos años, un importante número de formulaciones de elementos finitos de viga de secciones anisótropas han sido propuestas. Una revisión detallada de la literatura existente sobre el análisis de vigas, inclusive cuando fuera particularizada al análisis de aplicaciones en laminados compuestos, excede el alcance del presente trabajo. Sin embargo una breve discusión sobre las hipótesis cinemáticas utilizadas es necesaria para determinar los requisitos mínimos que debiera poseer un modelo para el análisis geoméricamente no-lineal de vigas no homogéneas de laminados compuestos.

La teoría clásica de vigas parte de la hipótesis cinemática fundamental del mantenimiento de las secciones planas luego de la deformación, la cual permite formular un campo completo de desplazamientos aproximado en función de las rotaciones de flexión y desplazamientos transversales del eje de referencia de la viga. Las hipótesis de secciones planas aplicadas a las secciones anisótropas de laminados compuestos determinan un conjunto de modelos denominados de Lámina Equivalente o ESL (acrónimo del término en inglés *Equivalent Single Layer*) Si no se consideran las deformaciones por corte en los planos de flexión transversal, se verifican las hipótesis de Euler-Bernoulli y se corresponde con la Teoría Clásica de Placas Laminadas CLPT (*Classical Laminate Plate Theory*) (J.N. Reddy, 1997).

Cuando se consideran las deformaciones por corte, deben efectuarse hipótesis adicionales sobre la distribución de las mismas sobre el plano de la sección transversal. Una revisión sobre las teorías de deformaciones por corte empleadas en vigas laminadas, puede consultarse en [Ghugal and Shimpi \(2001\)](#). En primera aproximación se puede admitir la existencia de una distorsión de corte constante en toda la sección. Esta distorsión por corte del plano transversal modifica el giro de flexión y causa que las secciones planas ya no sean perpendiculares al eje medio de la viga, y permiten en definitiva, considerar de manera lineal los efectos de las deformaciones por corte sobre los desplazamientos del elemento. Estas hipótesis corresponden a la teoría de Vigas de Timoshenko y equivalen a una teoría de laminados con deformaciones de corte de primer orden o FSDT (*First-order Shear Deformation Theory*). Una de las limitaciones de esta teoría es que la distribución de tensiones tangenciales de la sección transversal viola las condiciones de borde libre de tensiones y requiere de factores de corrección de la energía de deformación. La obtención de dichos factores de corrección no es una tarea sencilla cuando las relaciones constitutivas son de naturaleza anisótropa. ([P.T. Mendonça, 2005](#))

Las limitaciones de los modelos FSDT dieron origen a otros modelos cinemáticos que postulan una distribución de distorsiones en el plano mediante correcciones *ad hoc* del campo de desplazamientos longitudinal, denominadas teorías de orden superior o HSDT (*High-order Shear Deformation Theory*). Estas formulaciones consideran una distribución arbitraria del campo de desplazamientos en el plano de la sección transversal mediante una discretización adicional al nivel de las láminas, lo cual y a diferencia de las teorías ESL, implica abandonar las hipótesis de secciones planas. Estas formulaciones, conocidas como Teorías de Laminados Multicapa (*Layerwise Theories*) incorporan grados de libertad adicionales en la altura de la sección con una discretización que podrá ser mayor, igual o menor al número de láminas. Las hipótesis cinemáticas de los modelos HSDT, junto a la relajación de la hipótesis de indeformabilidad de las normales equivalen en la práctica a un análisis tridimensional condensado del elemento de viga ([J.N. Reddy, 1997](#); [O. O. Ochoa and J.N. Reddy, 1992](#)). Sin embargo, ninguna de estas formulaciones considera el efecto de la torsión sobre el campo de desplazamientos.

Un modelo de análisis que considere los efectos de las deformaciones por corte y la torsión combinadas puede obtenerse en algunos casos, a partir de la integración de las ecuaciones de elasticidad tridimensional anisótropa de un sólido tridimensional homogéneo anisótropo sometido a cargas y desplazamientos en sus extremos ([E. Petrov and M. Geradin, 1998](#)). La implementación de elementos de viga basados en este tipo de soluciones de elasticidad tridimensional puede llegar a ser extremadamente compleja para el análisis de secciones anisótropas de laminados compuestos.

En relación al material, la naturaleza no-homogénea de las secciones transversales de un elemento de viga laminada requiere siempre de un nivel de discretización adicional en la altura y el ancho de la sección transversal. En lo relativo a las ecuaciones constitutivas de cada lámina, la teoría de laminados clásica sólo requiere de tres componentes del tensor de tensiones y deformaciones. Sin embargo, la anisotropía de los materiales compuestos, principalmente en los esquemas de laminación cruzados (*Cross Ply Laminates*) establece fuertes gradientes entre las propiedades mecánicas de láminas contiguas, que inducen la aparición de tensiones interlaminares en las regiones cercanas a los bordes libres, produciéndose fenómenos de falla por delaminación. El análisis de problemas de falla con tensiones interlaminares requiere sobre cada lámina, una ecuación constitutiva ortótropa con todas las componentes del tensor constitutivo, lo que equivale de hecho a un modelo constitutivo de material tridimensional, independientemente de la formulación cinemática utilizada ([R. Jones, 1999](#)).

Como conclusión preliminar, puede decirse que la anisotropía de las secciones transversales de laminados compuestos, sumada a la necesidad de formulaciones geoméricamente no-lineales, hace atractiva desde el punto de vista computacional a las formulaciones del tipo ESL que cuentan con un número mínimo de parámetros cinemáticos a diferencia de las formulaciones (HSDT) o de elasticidad tridimensional anisótropa.

Sin embargo, la consideración adicional de las deformaciones de torsión establece una serie de relaciones cinemáticas (acoplamientos) entre los giros de torsión, las distorsiones de corte, los giros de flexión y las extensiones, que a excepción de los modelos basados en la teoría de elasticidad tridimensional, no son tomados en cuenta por ninguna de las demás formulaciones. Luego, la utilización de modelos basados en teorías ESL requiere de formulaciones cinemáticas que consideren, en alguna medida, la pérdida de las secciones planas y su influencia sobre el campo de desplazamientos y de deformaciones del elemento. La formulación de un campo de desplazamientos modificado por la existencia de esfuerzos de torsión en secciones prismáticas es el objeto del siguiente parágrafo.

### 3 FORMULACIÓN DEL CAMPO DE DESPLAZAMIENTOS

En la presente formulación se propone un campo de desplazamientos aproximado para el elemento de viga tridimensional prismático de eje recto, a partir de un conjunto de funciones definidas sobre un sistema de coordenadas local del elemento  $\{ {}^t\hat{x}, {}^t\hat{y}, {}^t\hat{z} \}$ , solidario al eje medio de la barra, según se indica en la [Figura 1](#).

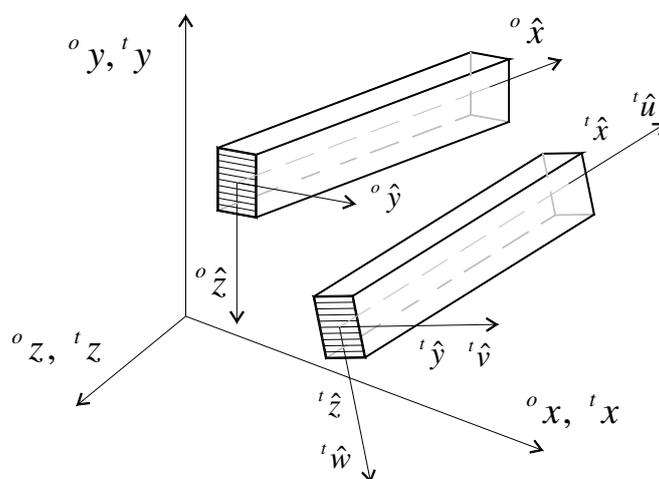


Figura 1 Sistemas de coordenadas global  $\{x\}$  y local  $\{\hat{x}\}$  del elemento. Configuración inicial de referencia y configuración espacial para un instante  $t$ .

$${}^t\hat{u}_1 \equiv {}^t\hat{u}, {}^t\hat{u}_2 \equiv {}^t\hat{v}, {}^t\hat{u}_3 \equiv {}^t\hat{w} \quad {}^o\hat{x}_1 \equiv {}^o\hat{x}, {}^o\hat{x}_2 \equiv {}^o\hat{y}, {}^o\hat{x}_3 \equiv {}^o\hat{z}$$

El campo de desplazamientos propuesto supone inicialmente la hipótesis del mantenimiento de secciones planas luego de la deformación, la cual permite expresar todos los desplazamientos de la sección transversal a partir de los desplazamientos del eje medio del elemento  ${}^t\hat{u}^o, {}^t\hat{v}^o, {}^t\hat{w}^o$ . Para considerar los efectos de la torsión sobre la sección transversal, se ha incorporado a la componente de desplazamientos longitudinales (1) un término de corrección que sólo dependerá de las variables del plano de la sección transversal  ${}^t\chi_x = {}^t\chi_x({}^t\hat{y}, {}^t\hat{z})$ . La inclusión de este término equivale a relajar la hipótesis de secciones planas inicial.

$${}^t\hat{u} \approx {}^t\hat{u}^o + {}^t\hat{y} \cdot {}^t\hat{\theta}_z - {}^t\hat{z} \cdot {}^t\hat{\theta}_y + {}^t\hat{\chi}_x \cdot {}^t\hat{\theta}_{x,x} \quad (1)$$

$${}^t\hat{v} \approx {}^t\hat{v}^o - {}^t\hat{z} \cdot {}^t\hat{\theta}_x \quad (2)$$

$${}^t\hat{w} \approx {}^t\hat{w}^o + {}^t\hat{y} \cdot {}^t\hat{\theta}_x \quad (3)$$

En una formulación lagrangiana total (TL), las derivadas de las funciones que definen el campo de desplazamientos se refieren a las variables configuración inicial de referencia, con la notación habitual  $(*)_{,x} = d*/d^o\hat{x}$ . Las relaciones cinemáticas entre los giros y los desplazamientos del campo de desplazamientos propuesto, se pueden obtener a partir de la medida de deformación (lineal) del tensor de pequeñas deformaciones.

$${}^t\hat{e}^{ij} = \frac{1}{2} \cdot ({}^t\hat{u}^{j,i} + {}^t\hat{u}^{i,j}) \quad (4)$$

Desarrollando las componentes  ${}^t\hat{u}^{j,i}$  del tensor gradiente de desplazamientos de la expresión (4) y asumiendo la hipótesis de indeformabilidad del plano de la sección transversal (el plano se alabea pero no cambia de forma) se obtienen las expresiones de las distorsiones angulares.

$${}^t\hat{\gamma}_{xy} = 2 \cdot {}^t\hat{e}^{xy} = \hat{v}_{,x}^o + {}^t\hat{\theta}_z + {}^t\hat{\theta}_{x,x} \cdot ({}^t\hat{\chi}_{x,y} - {}^t\hat{z}) \quad (5)$$

$${}^t\hat{\gamma}_{xz} = -2 \cdot {}^t\hat{e}^{xz} = -{}^t\hat{w}_{,x}^o + {}^t\hat{\theta}_y - {}^t\hat{\theta}_{x,x} \cdot ({}^t\hat{\chi}_{x,z} + {}^t\hat{y}) \quad (6)$$

La distribución de deformaciones de corte obtenida, es una función no-lineal en el plano de la sección transversal, debido a que incorpora a las derivadas de la función de alabeo no-lineal. Esta hipótesis cinemática es básicamente una adaptación de los modelos FSDT para los problemas de torsión acoplada con flexión y extensión, en donde el alabeo modifica el campo de desplazamientos longitudinales, sino también las distorsiones por corte, lo que equivale en definitiva, a un acoplamiento torsión-extensión-corte. En la obtención de las expresiones dadas en (6), se asumió que el giro específico de torsión es constante dentro del elemento ( $d^2\theta_x/dx^2 = 0$ ). De lo contrario, existirán derivadas no nulas de las distorsiones angulares ( $\partial^t\hat{\gamma}_{xz}/\partial^o\hat{x} \neq 0$ ,  $\partial^t\hat{\gamma}_{xy}/\partial^o\hat{x} \neq 0$ ) que violan la ecuación de equilibrio diferencial del elemento. El signo negativo de la expresión (6) se debe a que la distorsión de corte simple debe producir trabajo positivo para un esfuerzo de corte positivo. Con las hipótesis efectuadas, el campo de desplazamientos propuesto verifica la hipótesis de indeformabilidad del plano transversal ( ${}^t\hat{\gamma}_{yz} = 0$ ) según se verifica en la expresión (7)

$${}^t\hat{\gamma}_{yz} = 2 \cdot {}^t\hat{e}^{yz} = ({}^t\hat{v}_{,z} + {}^t\hat{w}_{,y}) = -{}^t\hat{\theta}_x + {}^t\hat{\theta}_x = 0 \quad (7)$$

El término de corrección  $\chi_x(y, z)$ , se denomina función de *Warping* o alabeo y puede obtenerse como la solución del problema de la viga sometida a un par torsor en sus extremos (Tercer Problema de Saint-Venant). Para el caso particular de un sólido tridimensional prismático y homogéneo, se obtiene como solución una serie infinita dada por la expresión (8) La determinación del término de alabeo para secciones de forma arbitraria, puede consultarse en los textos clásicos sobre la teoría matemática de elasticidad.

$${}^t\hat{\chi}_x = {}^t\hat{\chi}_x({}^t\hat{y}, {}^t\hat{z}) = {}^t\hat{y} \cdot {}^t\hat{z} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n \cdot \sin(k_n \cdot {}^t\hat{y}) \cdot \sinh(k_n \cdot {}^t\hat{z})}{\frac{b_o}{2} \cdot (k_n)^3 \cdot \cosh\left(k_n \cdot \frac{h_o}{2}\right)} \quad k_n = \frac{(2n+1) \cdot \pi}{b_o} \quad (8)$$

La serie infinita converge rápidamente y requiere de pocos términos para obtener resultados de precisión razonable. No obstante, la elección del número de términos adecuado dependerá de la relación de lados de las secciones transversales del problema analizado ( $b_o/h$ ), por lo que la implementación numérica de la formulación propuesta en (8) debería admitir un número variable de términos. En el caso particular de la torsión uniforme en secciones transversales de sección circular, se verifican las hipótesis de la teoría elemental de Coulomb y la función de alabeo debe ser nula en todo el dominio.

#### 4 INTERPOLACIÓN DEL CAMPO DE DESPLAZAMIENTOS.

El campo completo de desplazamientos del elemento de viga tridimensional puede representarse mediante un vector (9) cuyas componentes son los desplazamientos longitudinales y transversales, medidos desde el origen de sistema de coordenadas locales solidario con el elemento y en una configuración espacial en un tiempo  $t$ , como se muestra en la Figura 1.

$$\{ {}^t\hat{\mathbf{u}} \}^T = \{ {}^t\hat{u} \quad {}^t\hat{v} \quad {}^t\hat{w} \} = \{ {}^t\hat{u}({}^t\hat{x}, {}^t\hat{y}, {}^t\hat{z}) \quad {}^t\hat{v}({}^t\hat{x}, {}^t\hat{y}, {}^t\hat{z}) \quad {}^t\hat{w}({}^t\hat{x}, {}^t\hat{y}, {}^t\hat{z}) \} \quad (9)$$

En un contexto de elementos finitos basados en desplazamientos, el campo continuo propuesto en (1) podrá ser obtenido de manera aproximada mediante la interpolación de variables cinemáticas discretas definidas en cada nodo del elemento. La elección del esquema de interpolación adoptado será crítica en lo que respecta al costo computacional del modelo.

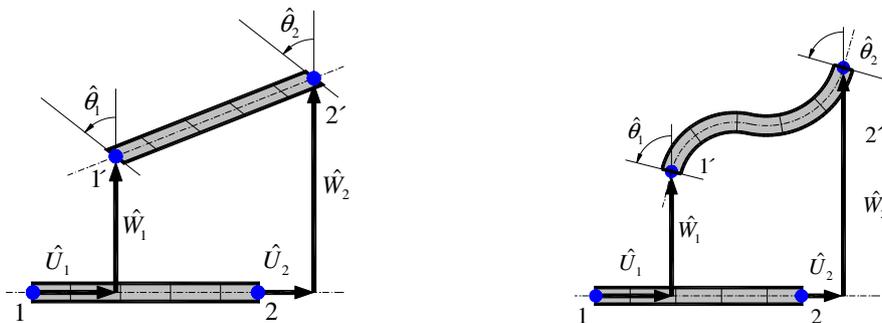


Figura 2 Desplazamientos y giros según una formulación de continuidad clase C0 y una formulación hermítica de clase C1, considerando deformaciones por corte.

En la presente formulación se adoptará un esquema de interpolación hermítico con continuidad clase C1 para la interpolación (cúbica) de las componentes transversales de los desplazamientos,  ${}^t\hat{v}^o$  y  ${}^t\hat{w}^o$  definidas en el eje del elemento, en el sistema de coordenadas local. El esquema elegido es el más adecuado para elementos de eje recto, debido a que los desplazamientos se interpolan de manera consistente con los giros y las distorsiones de corte y a diferencia de las formulaciones del tipo C0, no requiere de esquemas de integración reducida para subestimar la energía de deformación por corte en la determinación de la matriz de rigidez del elemento (K. Bathe, 1996). Las hipótesis cinemáticas efectuadas para las deformaciones por corte  ${}^t\hat{\gamma}_{xz}$  y  ${}^t\hat{\gamma}_{xy}$  asume una distribución constante a lo largo del elemento

y para un punto arbitrario de la sección transversal. Luego, deberán ser interpoladas y almacenadas según un nodo central (con dos grados de libertad internos) que deberán ser condensados estáticamente previo al proceso de ensamblaje de la matriz de rigidez.

Tanto para los desplazamientos longitudinales como para los giros de torsión, se utilizarán esquemas de interpolación con continuidad de clase C0 (funciones de forma lineales). La función C0 elegida para los giros de torsión garantiza el cumplimiento de la hipótesis de indeformabilidad de las secciones transversales ( $d^2\theta_x/dx^2 = 0$ ).

Las condiciones de borde del problema de interpolación se establecen para cada grado de libertad del elemento. Considerando el problema del elemento de viga de dos nodos con seis grados de libertad por nodo y asumiendo además dos distorsiones constantes en todo elemento, se tienen catorce grados de libertad.

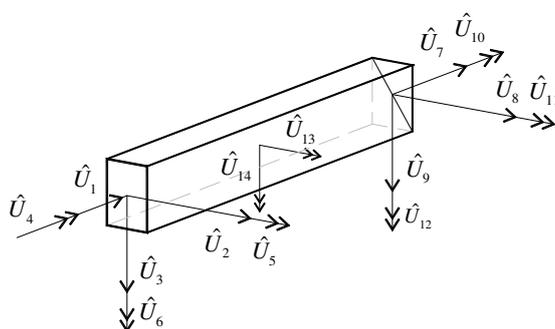


Figura 3 Grados de libertad medidos sobre el sistema de coordenadas locales del elemento. Los grados de libertad internos  ${}^t\hat{U}_{13}$  y  ${}^t\hat{U}_{14}$  corresponden a las distorsiones  ${}^t\hat{\gamma}_{xz}$ ,  ${}^t\hat{\gamma}_{xy}$ .

El campo completo de desplazamientos en un punto arbitrario de la sección transversal se podrá aproximar mediante una interpolación numérica empleando un conjunto de funciones de interpolación  $h_m^{(i)} = h_m^{(i)}({}^t\hat{x}, {}^t\hat{y}, {}^t\hat{z})$  según (10).

$$\hat{u}^{(i)} \approx h_m^{(i)} \cdot \hat{U}_m \quad (10)$$

En la presente formulación se sigue la convención de la suma, salvo que se indique expresamente lo contrario. Los índices superiores (superíndices a derecha) se refieren en general a las componentes de desplazamiento del campo y los índices inferiores (subíndices a derecha), a los grados de libertad del elemento que se indican en la Figura 3. En particular, en la expresión (10) el índice  $m$  suma desde 1 hasta  $N$  siendo  $N = 14$  el número de grados de libertad del elemento de viga tridimensional, y el índice  $i$  varía desde 1 hasta  $i = 3$ .

$$[\mathbf{H}]^T = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^{(1)} \\ \mathbf{h}^{(2)} \\ \mathbf{h}^{(3)} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} h_1^{(1)} & h_2^{(1)} & \dots & h_N^{(1)} \\ h_1^{(2)} & h_2^{(2)} & \dots & h_N^{(2)} \\ h_1^{(3)} & h_1^{(3)} & \dots & h_N^{(3)} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Los vectores  $h_m^{(i)}$  serán arreglos de  $1 \times N$  asociados a cada uno de las componentes del campo de desplazamientos y podrán agruparse en una matriz de interpolación de  $3 \times N$ . Las componentes de la matriz de interpolación del campo de desplazamientos, se detallan en la Figura 4. Las funciones de forma evaluadas en el eje de referencia, verifican las condiciones de suma unitaria en todo el dominio del elemento y satisfacen uno de los requisitos

fundamentales de convergencia de convergencia monotonica (completitud) (K. Bathe, 1996).

$$\sum_{k=1}^N h_k^{(i)} = 1 \quad (12)$$

En problemas de naturaleza membranar, la interpolación del campo de desplazamientos longitudinales podría modificarse adoptando un esquema jerárquico, mediante la incorporación de nodos internos adicionales (M. A. Crisfield, 1991) aunque en general, este tipo de funciones de forma no verifica las condiciones de completitud.

$$[\mathbf{H}] = \begin{bmatrix} 1-\frac{x}{L} & \frac{6 \cdot \varphi_1}{L} \cdot y & \frac{6 \cdot \varphi_1}{L} \cdot z & -\varphi_2 & -\varphi_3 \cdot z & \varphi_3 \cdot y & \frac{x}{L} & -\frac{6 \cdot \varphi_1}{L} \cdot y & -\frac{6 \cdot \varphi_1}{L} \cdot z & \varphi_2 & \varphi_4 \cdot z & -\varphi_4 \cdot y & -6 \cdot \varphi_1 \cdot z & 6 \cdot \varphi_1 \cdot y \\ 0 & \varphi_5 & 0 & -\left(1-\frac{x}{L}\right) \cdot z & 0 & -\varphi_6 & 0 & \varphi_7 & 0 & -\frac{x}{L} \cdot z & 0 & \varphi_1 \cdot x & 0 & \varphi_8 \\ 0 & 0 & \varphi_5 & \left(1-\frac{x}{L}\right) \cdot y & \varphi_6 & 0 & 0 & 0 & \varphi_7 & \frac{x}{L} \cdot y & -\varphi_1 \cdot x & 0 & -\varphi_8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{(L-x) \cdot x}{L^2} & \varphi_2(y, z) &= \frac{1}{L} \left( x-z \cdot \frac{\partial \chi}{\partial z} - y \cdot \frac{\partial \chi}{\partial y} \right) & \varphi_3(x) &= \frac{(L-3x) \cdot (L-x)}{L^2} & \varphi_4(x) &= \frac{(2L-3x) \cdot x}{L^2} \\ \varphi_5(x) &= \frac{(L-x)^2 \cdot (L+2x)}{L^3} & \varphi_6(x) &= \frac{(L-x)^2 \cdot x}{L^2} & \varphi_7(x) &= \frac{(3L-2x) \cdot x^2}{L^3} & \varphi_8(x) &= \frac{(L-2x) \cdot (L-x) \cdot x}{L^2} \end{aligned}$$

Figura 4 Funciones de forma modificadas para el elemento de viga tridimensional, considerando deformaciones por corte y torsión con alabeo.

## 5 INTERPOLACIÓN DEL CAMPO DE DEFORMACIONES

En una formulación geoméricamente no-lineal, las componentes del tensor de deformaciones para una configuración deformada arbitraria pueden obtenerse a partir de la medida de deformación de Green Lagrange, definida sobre la configuración de referencia en  ${}^o\hat{x}$ ,  ${}^o\hat{y}$ ,  ${}^o\hat{z}$  según

$${}^{t+\Delta t}\hat{\epsilon}^{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left( {}^{t+\Delta t}\hat{u}^{j,i} + {}^{t+\Delta t}\hat{u}^{i,j} + {}^{t+\Delta t}\hat{u}^{k,i} \cdot {}^{t+\Delta t}\hat{u}^{k,j} \right) \quad (13)$$

En una formulación incremental del equilibrio, el campo de desplazamientos en una configuración desconocida en  $t+\Delta t$  podrá formularse a partir de una deformación conocida en la configuración  $t$  según el incremento finito  ${}^{t+\Delta t}\hat{u}^i = {}^t\hat{u}^i + \Delta\hat{u}^i$ . Del mismo modo, la deformación en una configuración no-conocida en  $t+\Delta t$  queda determinada según  ${}^{t+\Delta t}\hat{\epsilon}^{ij} = {}^t\hat{\epsilon}^{ij} + \Delta\hat{\epsilon}^{ij}$ . El incremento finito de deformaciones queda determinado según la expresión (14). Según la definición del tensor de Green Lagrange, las derivadas de las componentes del campo de desplazamientos se refieren a las variables de la configuración de referencia y se indican según la notación (15):

$$\Delta\hat{\epsilon}^{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left( \Delta\hat{u}^{j,i} + \Delta\hat{u}^{i,j} + \Delta\hat{u}^{k,i} \cdot {}^t\hat{u}^{k,j} + \Delta\hat{u}^{k,j} \cdot {}^t\hat{u}^{k,i} + \Delta\hat{u}^{k,i} \cdot \Delta\hat{u}^{k,j} \right) \quad (14)$$

$${}^{t+\Delta t}\hat{u}^{i,k} = \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\hat{u}^i}{\partial {}^o\hat{x}^k} \quad \Delta\hat{u}^{i,j} = \frac{\partial \Delta\hat{u}^i}{\partial {}^o\hat{x}^j} \quad (15)$$

En un contexto de elementos finitos, el campo de deformaciones podrá ser interpolado a partir de las variables nodales independientes del elemento mediante las funciones de forma

dadas en (10) y el incremento de desplazamientos interpolado según  $\Delta \hat{u}^{i,j} \approx h_m^{i,j} \cdot \Delta \hat{U}_m$

$$\Delta \hat{\varepsilon}^{ij} \approx \frac{1}{2} \cdot (h_m^{j,i} + h_m^{i,j} + h_m^{k,i} \cdot {}^t \hat{u}^{k,j} + {}^t \hat{u}^{k,i} \cdot h_m^{k,j}) \cdot \Delta \hat{U}_m + \frac{1}{2} \cdot \Delta \hat{U}_m \cdot (h_m^{k,i} \cdot h_n^{k,j}) \cdot \Delta \hat{U}_n \quad (16)$$

El símbolo de igualdad aproximada  $\approx$  en las expresiones anteriores refiere al hecho de que se ha aproximado el campo de desplazamientos mediante funciones de interpolación a partir de valores conocidos del campo en los nodos del elemento, a diferencia de la igualdad estricta en la expresión (14) que no involucra ningún tipo de aproximación. En las expresiones anteriores, los términos asociados a las derivadas  ${}^t \hat{u}^{k,i}$  serán luego los términos que formaran la matriz de deformaciones o desplazamientos iniciales, en la formulación de la matriz tangente de rigidez. Estos términos podrán interpolarse también con las funciones de forma dadas en (11)

$${}^t \hat{u}^{k,i} \approx h_p^{k,i} \cdot \hat{U}_p \quad (17)$$

En adelante se hace conveniente el empleo de notación contraída (o notación de Vöigt) la cual permite representar a los tensores de segundo y cuarto orden mediante arreglos unidimensionales (vectores) y bidimensionales (matrices) respectivamente. En un abuso de notación, las expresiones tensoriales expresadas en notación contraída llevan los índices superiores contraídos entre paréntesis. Las componentes del tensor de deformaciones en notación contraída, podrán expresarse según el arreglo unidimensional (18):

$$\{\Delta \hat{\varepsilon}\}^T = \{\Delta \hat{\varepsilon}^{(1)} \Delta \hat{\varepsilon}^{(2)} \Delta \hat{\varepsilon}^{(3)} \Delta \hat{\varepsilon}^{(4)} \Delta \hat{\varepsilon}^{(5)} \Delta \hat{\varepsilon}^{(6)}\} \equiv \{\Delta \hat{\varepsilon}^{11} \Delta \hat{\varepsilon}^{22} \Delta \hat{\varepsilon}^{33} 2\Delta \hat{\varepsilon}^{23} 2\Delta \hat{\varepsilon}^{13} 2\Delta \hat{\varepsilon}^{12}\} \quad (18)$$

Desarrollando las expresiones anteriores, las componentes del incremento de deformaciones en notación de Vöigt, pueden expresarse según una matriz de interpolación de deformaciones, dependiente del campo de desplazamientos al inicio del incremento  ${}^t \hat{U}$ . Las componentes de las matrices de interpolación de deformaciones quedan determinadas según las expresiones (20) a (22)

$$\Delta \hat{\varepsilon}^{(i)} \approx ({}^t \hat{B}_m^{(i)} + \Delta \hat{U}_n \cdot {}^t \hat{D}_{mn}^{(i)}) \cdot \Delta \hat{U}_m \quad (19)$$

$${}^t \hat{B}_p^{(i)} = h_p^{i,i} + {}^t \hat{U}_q \cdot (h_p^{k,i} \cdot h_q^{k,i}) \quad {}^t \hat{D}_{pq}^{(i)} = \frac{1}{2} \cdot (h_p^{k,i} \cdot h_q^{k,i}) \quad i = 1, 2, 3 \text{ (no sum.)} \quad (20)$$

$${}^t \hat{B}_p^{(5)} = (h_p^{3,1} + h_p^{1,3}) + {}^t \hat{U}_q \cdot (h_p^{k,1} \cdot h_q^{k,3} + h_q^{k,1} \cdot h_p^{k,3}) \quad {}^t \hat{D}_{pq}^{(5)} = (h_p^{k,1} \cdot h_q^{k,3}) \quad (21)$$

$${}^t \hat{B}_p^{(6)} = (h_p^{2,1} + h_p^{1,2}) + {}^t \hat{U}_q \cdot (h_p^{k,1} \cdot h_q^{k,2} + h_q^{k,1} \cdot h_p^{k,2}) \quad {}^t \hat{D}_{pq}^{(6)} = (h_p^{k,1} \cdot h_q^{k,2}) \quad (22)$$

La relación no-lineal dada en (19), obligará luego en la formulación incremental del equilibrio, a encontrar una expresión aproximada lineal del incremento finito de deformaciones, de modo tal que pueda ser utilizado en una ecuación constitutiva incremental lineal.

## 6 FORMULACIÓN DE LAS ECUACIONES CONSTITUTIVAS DEL LAMINADO

En un planteo incremental, el estado de tensiones para una configuración  $t + \Delta t$  puede determinarse según un estado de tensiones en una configuración conocida en  $t$  y un incremento finito de tensiones. Para el material anisótropo particular que aquí se trata, resultante de un apilamiento de láminas ortótropas orientadas arbitrariamente según sus ejes materiales, las ecuaciones constitutivas deberán definirse para cada una de las láminas constitutivas de la sección transversal. Luego, el incremento finito de tensiones en un punto de una lámina  $n$ -ésima, queda determinado según (23)

$${}^{t+\Delta t}{}_{(n)}\hat{S}^{ij} = {}^t{}_{(n)}\hat{S}^{ij} + {}_{(n)}\Delta\hat{S}^{ij} \quad (23)$$

En esta expresión, el subíndice a derecha,  $(n)$  refiere al número de lámina dentro de la secuencia de laminación de la sección transversal anisótropa, y determinado según una ordenada local  ${}^o_{(n)}\hat{z}$  de la sección transversal y los tensores  ${}^{t+\Delta t}{}_{(n)}\hat{S}^{ij}$  y  ${}^t{}_{(n)}\hat{S}^{ij}$  corresponden al segundo tensor de Piola-Kirchoff referido a la configuración inicial y final, respectivamente.

En un planteo incremental, la relación constitutiva para un material anisótropo general puede formularse según una ley constitutiva lineal dentro de algún incremento finito de tensiones y deformaciones. Los efectos de los gradientes de temperatura y humedad que existen durante el proceso de curado del laminado se consideran mediante la ley de Hooke generalizada para el caso no isotérmico.

$${}_{(n)}\Delta\hat{S}^{ij} = {}_{(n)}{}^t\hat{C}^{ijkl} \cdot \left[ {}_{(n)}\Delta\hat{\epsilon}^{kl} - {}_{(n)}{}^t\hat{\alpha}^{kl} \cdot ({}^tT - {}^0T) - {}_{(n)}{}^t\hat{\beta}^{kl} \cdot ({}^tc - {}^0c) \right] \quad (24)$$

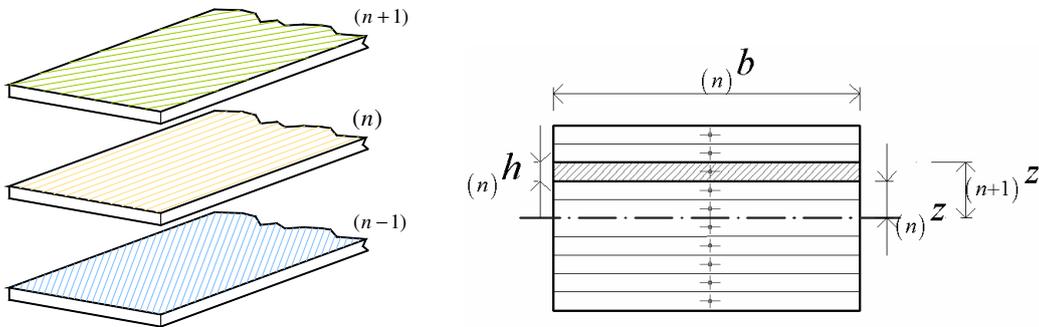


Figura 5 Sistema de coordenadas locales de la sección transversal (derecha) para un esquema de laminación arbitrario.

La ecuación incremental (24) incluye el efecto de acoplamiento térmico, higroscópico y mecánico que tienen lugar durante el proceso de curado del laminado compuesto. En esta expresión  ${}_{(n)}\Delta\hat{S}^{ij}$  es el incremento de tensiones,  ${}_{(n)}{}^t\hat{C}^{ijkl}$  es la matriz tangente de elasticidad,  ${}_{(n)}{}^t\hat{\alpha}^{kl}$  y  ${}_{(n)}{}^t\hat{\beta}^{kl}$  son los tensores de dilatación térmica e higroscópica de la lámina respectivamente,  $({}^tT - {}^0T)$  es el gradiente térmico y  $({}^tc - {}^0c)$  es el gradiente de humedad que actúan sobre toda la sección transversal durante el incremento. En la formulación propuesta, se asumirá como hipótesis que la temperatura y la humedad no varían durante todo el proceso incremental y se considerarán los efectos mecánicos del curado únicamente a partir de un estado de tensiones y deformaciones iniciales.

$${}_{(n)}\Delta\hat{S}^{ij} = {}_{(n)}{}^t\hat{C}^{ijkl} \cdot {}_{(n)}\Delta\hat{\epsilon}^{kl} \quad (25)$$

Los tensores constitutivos  ${}_{(n)}^t\hat{C}^{ijkl}$ ,  ${}_{(n)}^t\hat{\alpha}^{kl}$  y  ${}_{(n)}^t\hat{\beta}^{kl}$  presentes en las expresiones (23) a (25) están referidos a un punto medido según el sistema de coordenadas arbitrario local del elemento en una configuración arbitraria en el instante  $t$ . Los coeficientes materiales medidos en laboratorio que determinan las propiedades constitutivas (ortótropas) de cada lámina, se definen en general según las direcciones principales de la lámina, definidas según un sistema de coordenadas local de cada lámina  $\{{}^t\tilde{x}_1, {}^t\tilde{x}_2, {}^t\tilde{x}_3\}$  en donde la dirección principal 1 coincide con la dirección del refuerzo longitudinal y la dirección principal 3 se orienta según el eje local arbitrario z según  ${}_{(n)}^t\tilde{C}^{rspq}$ ,  ${}_{(n)}^t\tilde{\alpha}^{pq}$  y  ${}_{(n)}^t\tilde{\beta}^{pq}$

Debido a que las láminas del laminado son específicamente orientadas según un ángulo  $\Theta^{(n)}$  referido a sus direcciones materiales, se define una matriz de transformación entre el sistema de coordenadas material de cada lámina y el sistema de coordenadas local del elemento según la expresión (26)

$${}_{(n)}A^{ij} = \{\hat{\mathbf{e}}^i\} \cdot \{{}_{(n)}\tilde{\mathbf{e}}^j\} = \cos(\hat{\mathbf{e}}^i, {}_{(n)}\tilde{\mathbf{e}}^j) \quad \hat{x}_i = A^{ij} \cdot \tilde{x}_j \quad (26)$$

En esta expresión,  $\hat{\mathbf{e}}^{(j)}$  son los vectores base del sistema de coordenadas local del elemento y  ${}_{(n)}\tilde{\mathbf{e}}^{(i)}$  los vectores base del sistema de coordenadas material de la lámina ortótropa.

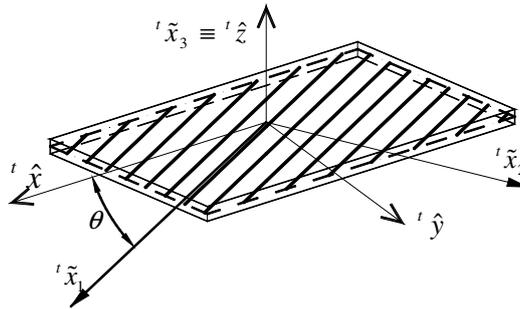


Figura 6 Sistema de coordenadas materiales (principales) y locales de la lámina. Los ejes locales de la lámina coinciden con el sistema de coordenadas local del elemento.

Las ecuaciones constitutivas de las láminas constitutivas del laminado orientadas arbitrariamente quedarán determinadas según las leyes de transformación de los tensores de 2<sup>do</sup> y 4<sup>to</sup> orden (27) y (29):

$${}_{(n)}^t\hat{\alpha}^{kl} = {}_{(n)}A^{kp} \cdot {}_{(n)}A^{lq} \cdot {}_{(n)}^t\tilde{\alpha}^{pq} \quad (n \text{ no sum.}) \quad (27)$$

$${}_{(n)}^t\hat{\beta}^{kl} = {}_{(n)}A^{kp} \cdot {}_{(n)}A^{lq} \cdot {}_{(n)}^t\tilde{\beta}^{pq} \quad (n \text{ no sum.}) \quad (28)$$

$${}_{(n)}^t\hat{C}^{ijkl} = {}_{(n)}A^{ir} \cdot {}_{(n)}A^{js} \cdot {}_{(n)}A^{kp} \cdot {}_{(n)}A^{lq} \cdot {}_{(n)}^t\tilde{C}^{rspq} \quad (n \text{ no sum.}) \quad (29)$$

Los productos de matrices de transformación de las expresiones se pueden condensar en una única matriz de rotación de tensiones  $[T_\sigma]$  y deformaciones  $[T_\epsilon]$  Debido al uso de componentes no tensoriales en notación de Voigt, estas matrices de transformación no son ortogonales sino a través de la relación  $[T_\sigma]^{-1} = [T_\epsilon]^T$

En la Figura 7 se muestran las componentes de los tensores constitutivos y de los tensores

de deformación térmica e higroscópica en notación de Voigt para el sistema de coordenadas material de la lámina y para el sistema de coordenadas local del elemento.

$$\begin{aligned}
{}_{(n)}[\tilde{\mathbf{C}}] &= \begin{bmatrix} \tilde{C}^{1111} & \tilde{C}^{1122} & \tilde{C}^{1133} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}^{1122} & \tilde{C}^{2222} & \tilde{C}^{2233} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}^{1133} & \tilde{C}^{2233} & \tilde{C}^{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{C}^{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}^{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}^{1212} \end{bmatrix} & \quad {}_{(n)}[\hat{\mathbf{C}}] = \begin{bmatrix} \hat{C}^{1111} & \hat{C}^{1122} & \hat{C}^{1133} & 0 & 0 & \hat{C}^{1112} \\ \hat{C}^{1122} & \hat{C}^{2222} & \hat{C}^{2233} & 0 & 0 & \hat{C}^{2212} \\ \hat{C}^{1133} & \hat{C}^{2233} & \hat{C}^{3333} & 0 & 0 & \hat{C}^{3312} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{C}^{2323} & \hat{C}^{2313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{C}^{2313} & \hat{C}^{1313} & 0 \\ \hat{C}^{1112} & \hat{C}^{2212} & \hat{C}^{3312} & 0 & 0 & \hat{C}^{1212} \end{bmatrix} \\
{}_{(n)}\{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}\}^T &= \{ {}_n\tilde{\alpha}^{(1)} \quad {}_n\tilde{\alpha}^{(2)} \quad {}_n\tilde{\alpha}^{(3)} \quad {}_n\tilde{\alpha}^{(4)} \quad {}_n\tilde{\alpha}^{(5)} \quad {}_n\tilde{\alpha}^{(6)} \} \equiv \{ {}_n\tilde{\alpha}^{11} \quad {}_n\tilde{\alpha}^{22} \quad {}_n\tilde{\alpha}^{33} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \} \\
{}_{(n)}\{\tilde{\boldsymbol{\beta}}\}^T &= \{ {}_n\tilde{\beta}^{(1)} \quad {}_n\tilde{\beta}^{(2)} \quad {}_n\tilde{\beta}^{(3)} \quad {}_n\tilde{\beta}^{(4)} \quad {}_n\tilde{\beta}^{(5)} \quad {}_n\tilde{\beta}^{(6)} \} \equiv \{ {}_n\tilde{\beta}^{11} \quad {}_n\tilde{\beta}^{22} \quad {}_n\tilde{\beta}^{33} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \} \\
{}_{(n)}\{\hat{\boldsymbol{\alpha}}\}^T &= \{ {}_n\hat{\alpha}^{(1)} \quad {}_n\hat{\alpha}^{(2)} \quad {}_n\hat{\alpha}^{(3)} \quad {}_n\hat{\alpha}^{(4)} \quad {}_n\hat{\alpha}^{(5)} \quad {}_n\hat{\alpha}^{(6)} \} \equiv \{ {}_n\hat{\alpha}^{11} \quad {}_n\hat{\alpha}^{22} \quad {}_n\hat{\alpha}^{33} \quad 0 \quad 0 \quad 2 \cdot {}_n\hat{\alpha}^{12} \} \\
{}_{(n)}\{\hat{\boldsymbol{\beta}}\}^T &= \{ {}_n\hat{\beta}^{(1)} \quad {}_n\hat{\beta}^{(2)} \quad {}_n\hat{\beta}^{(3)} \quad {}_n\hat{\beta}^{(4)} \quad {}_n\hat{\beta}^{(5)} \quad {}_n\hat{\beta}^{(6)} \} \equiv \{ {}_n\hat{\beta}^{11} \quad {}_n\hat{\beta}^{22} \quad {}_n\hat{\beta}^{33} \quad 0 \quad 0 \quad 2 \cdot {}_n\hat{\beta}^{12} \} \\
{}_{(n)}\{\hat{\mathbf{S}}\}^T &= \{ {}_n\hat{S}^{(1)} \quad {}_n\hat{S}^{(2)} \quad {}_n\hat{S}^{(3)} \quad {}_n\hat{S}^{(4)} \quad {}_n\hat{S}^{(5)} \quad {}_n\hat{S}^{(6)} \} \equiv \{ {}_n\hat{S}^{11} \quad {}_n\hat{S}^{22} \quad {}_n\hat{S}^{33} \quad {}_n\hat{S}^{23} \quad {}_n\hat{S}^{13} \quad {}_n\hat{S}^{12} \}
\end{aligned}$$

Figura 7 Tensores constitutivos y tensores de deformación térmica e higroscópica en notación contraída

Las matrices constitutivas de la figura muestran los coeficientes aparentes que producen un acoplamiento adicional entre distorsiones y dilataciones por temperatura o humedad diferencial, en una lámina ortótropa arbitrariamente orientada.

La ecuación constitutiva de la sección transversal del elemento quedará determinada a partir de la integración de las diferentes ecuaciones constitutivas de las láminas que forman el laminado. Esta integración se efectúa numéricamente sobre el volumen elemental del elemento en la configuración inicial durante la formulación de la matriz de rigidez tangente del elemento, y es el objeto de los parágrafos siguientes.

## 7 FORMULACIÓN INCREMENTAL DEL EQUILIBRIO

En una formulación lagrangiana total (TL), el equilibrio y la compatibilidad del elemento quedan expresados a partir del principio de los desplazamientos virtuales (30) mediante la integración del trabajo de las tensiones sobre una variación virtual de las deformaciones, para una configuración en  $t + \Delta t$  y sobre el volumen de referencia inicial  $V_o$ .

$$\int_{{}^oV} {}^{t+\Delta t}\hat{S}^{ij} \cdot \delta {}^{t+\Delta t}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{ij} \cdot d{}^oV = \int_{{}^oV} {}^{t+\Delta t}\hat{S}^{(i)} \cdot \delta {}^{t+\Delta t}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(i)} \cdot d{}^oV = {}^{t+\Delta t}R \quad (30)$$

En esta expresión,  ${}^{t+\Delta t}\hat{S}^{ij}$ ,  ${}^{t+\Delta t}\hat{S}^{(i)}$  representan al segundo tensor de Piola Kirchoff en notación tensorial y contraída respectivamente;  ${}^{t+\Delta t}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{ij}$ ,  ${}^{t+\Delta t}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(i)}$  representan al tensor de deformaciones de Green-Lagrange en notación tensorial y contraída y  ${}^{t+\Delta t}R$  es el trabajo virtual de las fuerzas exteriores sobre la configuración en  $t + \Delta t$ , en cada punto del volumen del elemento.

En general, la ecuación de equilibrio (30) no podrá resolverse directamente y deberá ser

linealizada. Planteando una aproximación de Taylor de primer orden y reordenando los términos de manera más conveniente, se tiene una formulación lineal de las ecuaciones incrementales de movimiento en (31). A partir de las funciones de forma obtenidas previamente, los términos de la expresión (31) podrán ser interpolados mediante de las variables nodales incrementales del elemento. Reemplazando las expresiones incrementales del campo de tensiones y deformaciones, se obtiene la ecuación de equilibrio incremental linealizada, expresada a partir de una matriz de rigidez tangente según (32). Luego de la aproximación de Taylor, las componentes de la matriz (simétrica) de rigidez tangente del elemento quedan definidas en (33) a partir de las integrales de volumen del elemento en la configuración inicial de referencia. Finalmente, la integración del trabajo virtual del incremento de tensiones con la componente lineal de deformaciones, resulta en el vector de fuerzas internas, cuyas componentes quedan determinadas según la expresión (34)

$$\int_{^oV} \Delta \hat{S}^{(i)} \cdot \delta \Delta \hat{e}^{(i)} \cdot d^oV + \int_{^oV} {}^t \hat{S}^{(i)} \cdot \delta \Delta \hat{\eta}^{(i)} \cdot d^oV \approx {}^{t+\Delta t} R - \int_{^oV} {}^t \hat{S}^{(i)} \cdot \delta \Delta \hat{e}^{(i)} \cdot d^oV \quad (31)$$

$${}^t \hat{K}_{rs} \cdot \Delta \hat{U}_s \approx {}^{t+\Delta t} \hat{R}_r - {}^t \hat{Q}_r \quad (32)$$

$${}^t \hat{K}_{pq} \approx \int_{^oV} {}^t \hat{B}_p^{(i)} \cdot {}^t \hat{C}^{(ij)} \cdot {}^t \hat{B}_q^{(j)} \cdot d^oV + \int_{^oV} {}^t \hat{S}^{(i)} \cdot ({}^t \hat{D}_{pq}^{(i)} + {}^t \hat{D}_{qp}^{(i)}) \cdot d^oV \quad (33)$$

$${}^t \hat{Q}_m \approx \int_{^oV} {}^t \hat{S}^{(i)} \cdot {}^t \hat{B}_m^{(i)} \cdot d^oV \quad (34)$$

Las integrales definidas en las expresiones (33) y (34), no podrán determinarse de manera analíticamente y deberán ser evaluadas numéricamente según algún esquema de cuadratura, lo cual es el objeto de los parágrafos siguientes.

## 8 IMPLEMENTACION NUMÉRICA

En una sección anisótropa formada por un conjunto de láminas ortótropas, las integrales definidas sobre el volumen elemental en las expresiones (33) y (34) podrán reemplazarse por una suma de integrales sobre el espesor de cada lámina. La expresión resultante de la integración numérica de la matriz tangente elemental queda determinada en forma general a partir de dos arreglos multidimensionales de integración,  ${}_{(n)}^{rsu} \Omega_{pq}$  y  ${}_{(n)}^{rsu} \Lambda_{pq}$  según (35):

$${}^t \hat{K}_{pq} \approx {}_{(n)} \omega \cdot \alpha^r \cdot \beta^s \cdot \gamma^u \cdot \left( {}_{(n)}^{rsu} \Omega_{pq} + {}_{(n)}^{rsu} \Lambda_{pq} \right) \quad (35)$$

En la expresión (35) se mantiene la convención de la suma para los índices  $(n, r, s, u)$  los cuales suman según  $n = 1 \dots NL - 1$   $r = 1 \dots N_1$   $s = 1 \dots N_2$  y  $u = 1 \dots N_3$ , siendo  $NL$  el número de láminas de la sección y  $N_1, N_2, N_3$  el número de puntos de integración para las dimensiones  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  respectivamente. Los arreglos multidimensionales están asociados a la integración de las matrices de rigidez de desplazamientos iniciales y de tensiones iniciales, respectivamente.

Los parámetros  $\alpha^r, \beta^s, \gamma^u$  son las funciones de peso para las integraciones en cada una de las tres dimensiones del volumen elemental. El parámetro  ${}_n \omega$  resulta del cambio de variable para el dominio de integración, definido luego en (40) a (42)

$${}^{rsu} \Lambda_{pq} \approx {}^{rsu} \hat{S}^{(i)} \cdot \left( {}^{rsu} \hat{D}_{pq}^{(i)} + {}^{rsu} \hat{D}_{qp}^{(i)} \right) \quad (n, r, s, u \text{ no sum.}) \quad (36)$$

$${}^{rsu} \Omega_{pq} \approx {}^{rsu} \hat{B}_p^{(i)} \cdot {}^{(i)} \hat{C}^{(ij)} \cdot {}^{rsu} \hat{B}_q^{(j)} \quad (n, r, s, u \text{ no sum.}) \quad (37)$$

Las matrices de interpolación evaluadas en los puntos de integración se determinan por única vez al comienzo del proceso incremental. Los puntos de integración resultan del esquema de integración adoptado, siendo necesario un único cambio de variable que permite unificar los límites de integración.

$${}^{rsu} \hat{B}_q^{(i)} \approx \left[ {}^o \hat{B}_L \left( {}^o \hat{x}(\xi^r), {}^o \hat{y}(\psi^s), {}^o \hat{z}(\zeta^u) \right) \right]_q^{(i)} \quad (38)$$

$${}^{rsu} \hat{D}_{pq}^{(i)} \approx \left[ {}^o \hat{D} \left( {}^o \hat{x}(\xi^r), {}^o \hat{y}(\psi^s), {}^o \hat{z}(\zeta^u) \right) \right]_{pq}^{(i)} \quad (39)$$

La elección del número de puntos de integración de cada dimensión será crítica en el costo computacional de cada iteración de la matriz tangente y dependerá del tipo de problema a analizar. El índice  $r$  representa a la variable discreta de integración sobre la longitud del elemento según el cambio de variable dado por (40) y donde serán recomendables esquemas abiertos de Gauss con  $N_1 = 2$  o bien, esquemas cerrados de Gauss-Lobatto con  $N_1 = 4$ . El índice  $s$  representa a la variable discreta de integración en el ancho del elemento con el cambio de variable dado en (41). En este caso puede utilizarse un esquema cerrado de Newton-Cotes con  $N_2 = 3$  o bien, un esquema de Gauss-Lobatto, con  $N_2 = 4$ . El índice  $u$  representa a la variable discreta de integración sobre el espesor de la fibra. En este caso particular, un esquema de Gauss con  $N_3 = 1$  será suficiente para cada fibra.

En los problemas de análisis de tensiones interlaminares, es computacionalmente más eficiente utilizar un esquema de Newton-Cotes con  $N_3 = 2$  y en los problemas de pocas láminas gruesas, será recomendable un esquema de Gauss con  $N_3 = 2$ .

$${}^o \hat{x}(\xi^r) = \frac{{}^o L}{2} \cdot (\xi^r + 1) \quad (r = 1 \dots N_1) \quad (40)$$

$${}^{(n)} \hat{y}(\psi^s) = \frac{{}^{(n)} b}{2} \cdot \psi^s \quad (s = 1 \dots N_2 ; n = 1 \dots NL - 1) \quad (41)$$

$${}^{(n)} \hat{z}(\zeta^u) = \frac{{}^{(n)} h}{2} \cdot \zeta^u + \frac{{}^{(n+1)} \hat{z} + {}^{(n)} \hat{z}}{2} \quad (u = 1 \dots N_3 ; n = 1 \dots NL - 1) \quad (42)$$

En secciones tipo *sándwich*, formadas por un núcleo o lámina central con espesor mucho mayor a las láminas de refuerzo externas, es conveniente formular una integración de cuadratura de Gauss con  $N_2 > 2$  y  $N_3 > 2$  para el núcleo del laminado. En la expresión (42)  $b_o$  es el ancho de la viga y  ${}^{(n+1)} \hat{z}, {}^{(n)} \hat{z}$  son las coordenadas superior e inferior respectivamente y  ${}_n h$  el espesor de la lámina  $n$ -ésima, medidos en el sistema de coordenadas local del elemento.

En un proceso de cargas monotónico es posible considerar la degradación de la rigidez del elemento a partir de la falla sucesiva de cada lámina del laminado, mediante la incorporación

de un criterio de fluencia y un indicador de falla, que deberán almacenarse para cada punto de integración, junto con el tensor constitutivo de la fibra, entendiéndose por fibra a un punto arbitrario de la lámina ortótropa seleccionado como punto de integración. En este tipo de análisis, los tensores constitutivos deberán almacenarse para cada punto de integración al igual que los tensores de tensiones y deformaciones iniciales, que forman parte de la historia de cargas de la fibra y las matrices de integración se modifican según (43)

$${}^{rsu}_n \Omega_{pq} \approx {}^{rsu}_n \hat{B}_p^{(i)} \cdot {}^{rsu}_n \hat{C}^{(ij)} \cdot {}^{rsu}_n \hat{B}_q^{(j)} \quad (n, r, s, u \text{ no sum.}) \quad (43)$$

Para la evaluación según un criterio de falla particular basado en invariantes de tensión, las tensiones y deformaciones en coordenadas materiales (principales) de cada lámina, podrán ser determinadas en su forma incremental a partir de las transformaciones inversas según (44).

$$\Delta \tilde{S}^{(k)} = T_e^{(ki)} \cdot \Delta \hat{S}^{(i)} \quad \Delta \tilde{\epsilon}^{(k)} = T_\sigma^{(ki)} \cdot \Delta \hat{\epsilon}^{(i)} \quad (44)$$

La ecuación de equilibrio será resuelta en un esquema iterativo incremental, donde la última configuración conocida en  $t$  corresponderá a la primer iteración (0) de una configuración desconocida en  $t + \Delta t$ .

$$\begin{aligned} \langle 0 \rangle \{ {}^{t+\Delta t} \hat{U} \} &= \{ {}^t \hat{U} \} & \langle 0 \rangle \{ {}^{t+\Delta t} \hat{S} \} &= \{ {}^t \hat{S} \} & \langle 0 \rangle \{ {}^{t+\Delta t} \hat{\epsilon} \} &= \{ {}^t \hat{\epsilon} \} \\ \langle k \rangle \{ \Delta \hat{U} \} &\approx \langle k-1 \rangle [ {}^{t+\Delta t} \hat{K} ]^{-1} \cdot \left( \{ {}^{t+\Delta t} \hat{R} \} - \langle k-1 \rangle \{ {}^{t+\Delta t} \hat{R}_1 \} \right) \\ \langle k \rangle \{ \Delta \hat{\epsilon} \} &\approx \left( [ {}^t \hat{B}_L ] + [ {}^t \hat{B}_{NL} ]^T \cdot \langle k \rangle \{ \Delta \hat{U} \} \right) \cdot \langle k \rangle \{ \Delta \hat{U} \} \\ \langle k \rangle \{ \Delta \hat{S} \} &\approx \langle k-1 \rangle [ {}^t \hat{C} ] \cdot \langle k \rangle \{ \Delta \hat{\epsilon} \} \\ \langle k \rangle \{ {}^{t+\Delta t} \hat{\epsilon} \} &\approx \langle k-1 \rangle \{ {}^{t+\Delta t} \hat{\epsilon} \} + \langle k \rangle \{ \Delta \hat{\epsilon} \} & \langle k \rangle \{ {}^{t+\Delta t} \hat{S} \} &\approx \langle k-1 \rangle \{ {}^{t+\Delta t} \hat{S} \} + \langle k \rangle \{ \Delta \hat{S} \} \end{aligned} \quad (45)$$

Las ecuaciones deberán resolverse repetidamente para  $k = 1, 2, 3, \dots$  hasta cumplir cierto criterio de corte. Los criterios de convergencia basados en el control de la energía serán preferibles a los criterios basados en desbalance de fuerzas o desplazamientos.

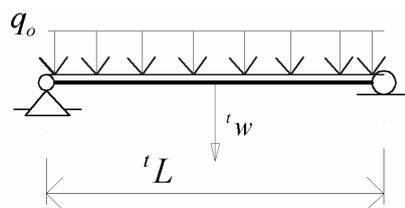
El modelo numérico formulado en el presente trabajo fue implementado en un programa de elementos finitos para el análisis no lineal de estructuras de materiales compuestos desarrollado en la cátedra de Mecánica de Laminados Compuestos de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires (FIUBA). El programa admite la modelación de estructuras espaciales de barras, con la definición de secciones transversales (simétricas) arbitrarias compuestas de materiales ortótropos en secuencias de laminación arbitrarias, y permite considerar esquemas de integración selectiva, número variable de términos de las funciones de alabeo, funciones de carga cíclica y análisis no-lineal de degradación y falla de laminados, entre otras características de la implementación.

## 9 RESULTADOS OBTENIDOS

En el presente capítulo se analizan algunos problemas y se comparan diferentes soluciones correspondientes a una teoría no lineal de deformaciones por corte de primer orden (FSDT\*) y soluciones correspondientes al modelo del campo de deformaciones por corte modificado (MSDT: *Modified Shear Deformation Theory*). En primer lugar, se analiza el problema correspondiente a una viga simplemente apoyada sometida a esfuerzos de flexión y corte (Ochoa y Reddy (1992)). En segundo lugar, se analiza el problema de una ménsula sometida a flexión, corte y torsión para signos alternados de un par torsor en sus extremos. La influencia del acoplamiento flexión-torsión pudo cuantificarse a partir de la diferencia entre la flecha para uno y otro signo del par torsor. La influencia del alabeo pudo cuantificarse a partir de la diferencia de la flecha entre un modelo MSDT y un modelo FSDT para idéntico signo del par torsor.

### 9.1 Problema 1. Viga laminada en flexión y corte.

En la [Tabla 1](#) se muestran los resultados obtenidos para la flecha central de una viga simplemente apoyada de longitud  ${}^tL$  con una carga uniformemente distribuida  ${}^tq_o$  y con una sección transversal laminada según diferentes secuencias de laminación.



$$E_1/E_2 = 25$$

$$G_{12} = G_{13} = 0.5 \cdot E_2$$

$$G_{23} = 0.2 \cdot E_2 \quad \nu_{12} = 0.25$$

$$L/h = 10 \quad b = 1.5 \quad h = 0.1$$

$$q_o = 1.0$$

LAM. SEQ.	Ochoa y Reddy (1992)				Presente formulación		
	CLPT (A)		FSDT (B)			FSDT(C)	MSDT(D)
	mallá	${}^t w_{\max}$	mallá	${}^t w_{\max}$	mallá	${}^t w_{\max}$	${}^t w_{\max}$
0	2	0.6234	2Q	0.9234	2	0.8708	0.8708
	4	0.6234	4Q	0.9234	4	0.8708	0.8708
(0/90)	2	3.3216	2Q	3.7502	2	3.1882	3.1882
	4	3.3216	4Q	3.7502	4	3.4957	3.4957
$(\pm 45)_T$	2	5.3959	2Q	5.8245	2	4.9917	4.9992
	4	5.3959	4Q	5.8245	4	5.4648	5.4642
(0/90) <sub>s</sub>	2	0.7084	2Q	1.1370	2	1.0624	1.0624
	4	0.7084	4Q	1.1370	4	1.0624	1.0624
$(\pm 45)_s$	2	2.1879	2Q	2.6165	2	2.5833	2.6165
	4	2.1879	4Q	2.6165	4	2.6156	2.6571

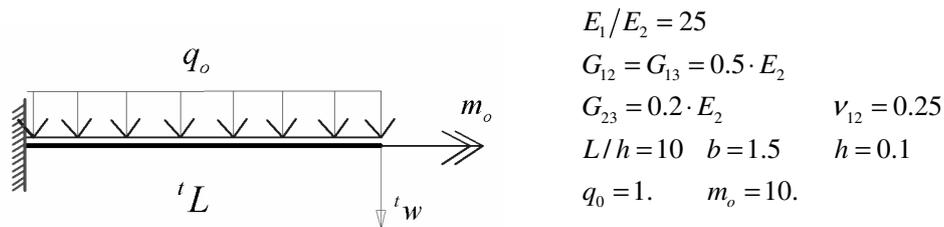
Tabla 1 Flecha central en una viga simplemente apoyada (Ochoa y Reddy, 1992)

Las soluciones obtenidas en la columna (A) corresponden a los desplazamientos del centro de la viga para una mallá de elementos hermíticos de 2 y 4 elementos sin considerar deformaciones por corte (CLPT). En la columna (B) se muestran los resultados obtenidos para una placa en flexión cilíndrica (*strip*) con mallás de 2 y 4 elementos lagrangianos (cuadráticos) considerando deformaciones por corte (FSDT). Las columnas (C) y (D) muestran los resultados de la presente formulación para el modelo FSDT\* y el modelo MSDT con mallás de 2 y 4 elementos de viga.

## 9.2 Problema 2. Ménsula laminada en flexión, corte y torsión.

Para evaluar la influencia de los esfuerzos de torsión sobre el campo de desplazamientos transversales del elemento, fue formulado un problema sencillo de flexión recta para una ménsula con carga uniformemente distribuida y un par torsor aplicado en el extremo libre.

Para poner en evidencia los acoplamientos entre flexión y torsión inherentes a los materiales anisótropos (e independientes de la consideración del alabeo) el problema fue analizado para un par torsor actuando en diferentes sentidos ( $\pm m_o$ ) y los resultados se compararon además con los desplazamientos de la ménsula sin torsión ( $m_o = 0$ )



	FSDT(*)			MSDT		
	$+m_o$	$-m_o$	$m_o = 0$	$+m_o$	$-m_o$	$m_o = 0$
$(\pm 45/\pm 45)_T$	25.534	(25.750)	25.691	25.609	(25.754)	25.690
$(\pm 45/\pm 45/\pm 45)_T$	23.505	(23.624)	23.604	23.558	(23.635)	23.604
$(\pm 45/\pm 45/\pm 45/\pm 45)_T$	22.878	(22.962)	22.958	22.924	(22.977)	22.958
$(0/90/0/90/0/90)_T$	13.696	(13.696)	13.706	13.697	(13.697)	13.706
$(0/30/60/90/0/-60/-30/90)_T$	21.382	(15.588)	18.609	24.200	(12.937)	18.635

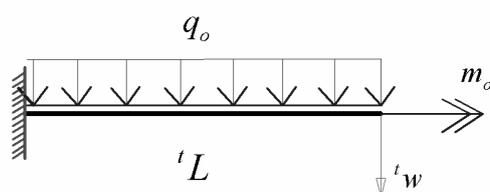
Tabla 2 Flecha en el extremo de una ménsula sometida a flexión, corte y torsión combinadas (laminados antisimétricos)

La [Tabla 2](#) muestra los desplazamientos del extremo de la ménsula, modelada con una malla de cuatro elementos de viga FSDT y MSDT, para diferentes secuencias de laminados balanceados antisimétricos de cuatro, seis y ocho láminas. Como es sabido de la teoría clásica de laminadas, los laminados balanceados no exhiben acoplamiento extensión-corte ( $A_{16} = A_{26} = 0$ ), como así tampoco acoplamientos de flexión-torsión ( $D_{16} = D_{26} = 0$ ).

En el caso del problema analizado con un modelo de viga no-lineal FSDT, el acoplamiento flexión-torsión se manifestó en secuencias de laminados balanceados  $(0/30/60/90/0/-60/-30/90)_T$ . Los resultados del modelo de viga no-lineal MSDT muestran además que en el acoplamiento flexión-torsión la influencia del alabeo fue significativa, incluso con apilamientos de ocho láminas.

La [Tabla 3](#) muestra los desplazamientos del extremo de la ménsula, modelada con una malla de cuatro elementos de viga FSDT y MSDT, para diferentes secuencias de laminación simétricas de cuatro, seis y ocho láminas.

Las secuencias balanceadas del primer y tercer problema mostraron un importante acoplamiento flexión-torsión, a diferencia del caso balanceado antisimétrico. Las secuencias simétricas no balanceadas también mostraron un acoplamiento flexión-torsión considerable. El laminado cruzado  $(0/90)$  no indicó acoplamientos de esta naturaleza.



$$E_1/E_2 = 25$$

$$G_{12} = G_{13} = 0.5 \cdot E_2$$

$$G_{23} = 0.2 \cdot E_2 \quad \nu_{12} = 0.25$$

$$L/h = 10 \quad b = 1.5 \quad h = 0.1$$

$$q_0 = 1. \quad m_o = 10.$$

	FSDT(*)			MSDT		
	+ $m_o$	- $m_o$	$m_o = 0$	+ $m_o$	- $m_o$	$m_o = 0$
$(\pm 45)_S$ (*)	4.742	(39.737)	22.608	-4.191	(50.091)	23.006
$(45/-45/45)_S$	6.629	(38.184)	22.503	3.034	(42.124)	25.599
$(\pm 45/\pm 45)_S$ (*)	13.352	(31.054)	22.285	10.809	(33.819)	22.239
$(0/90/0)_S$	9.171	(9.171)	9.178	9.175	(9.175)	9.178
$(0/30/60/90)_S$	-0.139	(18.828)	9.349	-3.516	(22.341)	9.416

Tabla 3 Flecha en el extremo de una ménsula sometida a flexión, corte y torsión (laminados simétricos)

Los resultados obtenidos con elementos del tipo FSDT para laminados simétricos oblicuos muestran un fuerte acoplamiento flexión-torsión debido principalmente a la anisotropía del material. Los resultados obtenidos con elementos MSDT aumentan el efecto del acoplamiento torsión-flexión aunque su efecto disminuyó a medida que aumentó el número de láminas en los laminados cruzados (comportamiento pseudo-isótropo).

## 10 CONCLUSIONES

- Fue presentada la formulación de un elemento finito de viga de eje recto tridimensional, para el análisis geoméricamente no-lineal de secciones prismáticas anisótropas de laminados compuestos, que exhiben acoplamiento en flexión, torsión, extensión y corte combinados. El elemento incorporó una formulación cinemática del campo de desplazamientos que permitió considerar la influencia de las deformaciones de corte y torsión acopladas sobre los desplazamientos transversales, mediante una teoría modificada de deformaciones de corte (MSDT).
- Los resultados obtenidos para los problemas de flexión y corte sin torsión (Tabla 1), informaron desplazamientos transversales muy similares a las soluciones de la teoría de primer orden (FSDT). La formulación MSDT convergió a los resultados de la teoría FSDT ante la ausencia de esfuerzos de torsión. El modelo propuesto convergió a la solución con un número igual o menor de elementos que los utilizados en modelos de placas bajo flexión cilíndrica. En todas las secuencias de laminación analizadas, la existencia de esfuerzos de torsión, requirió un mayor número de elementos para converger a la solución. Para las formas de secciones transversales analizadas, la utilización de dos a tres términos en la función de alabeo, fueron suficientes para converger a la solución.
- Los resultados obtenidos para problemas de flexión, corte y torsión combinados mediante un modelo MSDT indicaron que puede existir una fuerte influencia de la torsión sobre la rigidez a flexión (acoplamiento torsión-flexión) para determinados esquemas de laminación. La influencia del corte en este tipo de acoplamientos, debe ser investigada. A excepción de los laminados cruzados, la rigidez flexional de una viga laminada puede verse fuertemente afectada por la existencia de momentos torsores. Los resultados obtenidos indicaron un fuerte acoplamiento de flexión-torsión en laminados no balanceados simétricos y en algunos laminados balanceados oblicuos.
- Los resultados obtenidos para laminados balanceados oblicuos  $\pm 45$  y laminados cruzados

(0/90) no mostraron acoplamiento en flexión-torsión. Los desplazamientos transversales obtenidos fueron independientes del signo del momento torsor y de la consideración del alabeo de la sección. La influencia del acoplamiento corte-flexión-torsión y el incremento efectivo de rigidez en secciones pre-torsionadas con este tipo de secuencias de laminación, debe ser investigado.

- En todos los casos, la influencia del acoplamiento tanto material, como mecánico debido al alabeo de la sección, disminuyó a medida que aumentó el número de láminas (comportamiento pseudo-isótropo), aunque no desaparece.
- La influencia de esfuerzos combinados sobre la degradación de rigidez y la falla de un laminado debe ser investigada. La influencia real de los mecanismos de acoplamiento material y mecánico del tipo torsión-corte-flexión, debe ser evaluado.

-----//-----

## REFERENCIAS

- K. Bathe and S. Bolourchi "Large Displacement analysis of three-dimensional beam structures." *Intl. Journal for Numerical Methods in Engineering*. Vol. **14**, 961-986, (1979).
- K. Bathe, *Finite Element Procedures*. Prentice Hall. New Jersey (1996)
- M. A. Crisfield, *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, Vol. **I**, John Wiley & Sons, New York (1991).
- Y.M. Ghugal and R.P. Shimpi "A review of refined shear deformation theories for isotropic and anisotropic Laminated Beams." *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. Vol.**20**, No. 03 (2001)
- R. Jones, *Mechanics of Composite Materials*. 2/E Taylor & Francis.(1999)
- P. Masarati and M. Morandini, "On the Modeling of Rotating Beams for Rotorcraft Blade Analysis", European Rotorcraft Forum 2002, Bristol, UK (2002)
- P.T. Mendonça, *Materiais Compostos & Estruturas-Sanduiche*. Ed. Manole. Brasil (2005)
- O. O. Ochoa and J.N. Reddy "Finite Element Analysis of Composite Laminates." *SMIA*. Vol.7. Kluwer Academic Press (1992)
- E. Petrov and M. Geradin, "Finite element theory for curved and twisted beams based on exact solutions for three-dimensional solids. Part I: Beam Concept and geometrically exact nonlinear formulation", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* Vol. **165** 43-92 (1998)
- J.N. Reddy *Mechanics of Laminated Composite Plates. Theory and Analysis*. CRC Press (1997)
- S. Steinke and M. Gründer, "A380 Production Under Way", *FLUG REVUE*, Bonn, Germany, Vol **11** (2003)
- S. Steinke, "Boeing 7E7: More efficient than the A380", *FLUG REVUE*, Bonn, Germany, Vol **8** (2004)
- A. Verri Kozłowski, "Funciones de forma clase C1 considerando deformaciones por corte y torsión", *Monografías de Mecánica de Laminados Compuestos, Departamento de Estabilidad, FIUBA* (2005)
- A. Verri Kozłowski, "Un modelo numérico simple para el análisis no-lineal de vigas prismáticas de laminados compuestos", *CMNE/CILAMCE 2007*, Porto, Portugal (2007)