

ASPECTOS CINEMÁTICOS Y DINÁMICOS DEL CONTROL DE UNA TOBERA MÓVIL PARA VEHÍCULOS ESPACIALES

Jorge L. Naguil^{a,b,c}, Walter J. D. Cova^{a,d}, Juan P. Pedroni^{a,c},
Jorge J. Jazni^{a,d} y Mario Modesti^e

^aDepartamento Sistemas Electromecánicos, Centro de Investigaciones Aplicadas, Instituto Universitario Aeronáutico. Av. Fuerza Aérea 6500 – CP(5022) Córdoba – Argentina.

^bDepartamento Electrónica, Facultad de Ingeniería, Instituto Universitario Aeronáutico. Av. Fuerza Aérea 6500 – CP(5022) Córdoba – Argentina, jnaguil@gmail.com

^cGRSI – Grupo Robótica y Sistemas Integrados, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba. Av. Vélez Sarsfield 1611 – CP (5000) Córdoba – Argentina.

^dCUDAR - Centro Universitario de Desarrollo en Automación y Robótica, Universidad Tecnológica Nacional, FRC. Maestro Marcelo López y Cruz Roja Argentina – CP(5016) Córdoba – Argentina

^eLabSen - Centro de Investigación en Informática para la Ingeniería, Universidad Tecnológica Nacional, FRC. Maestro Marcelo López y Cruz Roja Argentina – CP(5016) Córdoba – Argentina
jnaguil@iua.edu.ar, wcova@iua.edu.ar, jppedroni@gmail.com, jazni@iua.edu.ar, mmodesti@scdt.frc.utn.edu.ar

Palabras Clave: Tobera orientable, control optimal, accionamiento cruzado.

Resumen. A partir de las especificaciones generales del sistema, se analizan las restricciones cinemáticas y cargas dinámicas impuestas por la utilización de dos actuadores dispuestos ortogonalmente entre sí para la orientación del eje de una tobera que pivota alrededor de una cruceta. Se discute la realización de las funciones de cinemática directa e inversa mediante diferentes aproximaciones a las formulaciones analíticas, con el objeto de reducir los requerimientos sobre el procesador digital de comandos. Se estudia la influencia de los componentes mecánicos del conjunto y las simplificaciones aplicables y se discute la utilización de los métodos de Euler y Kane para obtener el modelo dinámico del sistema. Se estudian las condiciones de ortodromicidad aplicables a la trayectoria descrita por el eje de la tobera y se genera la correspondiente ley de control para el movimiento combinado de los actuadores, sometida a las especificaciones de comportamiento dinámico y restricciones cinemáticas derivadas de los requerimientos de diseño. Se aseguran las condiciones de estabilidad global del sistema controlado con el concepto de seguimiento de trayectoria y linealización por realimentación no lineal. Se validan los resultados obtenidos mediante simulaciones en condiciones de funcionamiento no lineal y lineal, que incluyen el cálculo del índice de comportamiento, definido en función del desvío de la trayectoria real del eje de la tobera respecto de la ortodrómica.

1 INTRODUCCION

Los antecedentes referidos al control de actitud de vehículos lanzadores mediante la orientación del vector empuje empleando ya sea toberas individualmente pivotantes (swiveling nozzle) o bien moviéndose conjuntamente con su cámara de combustión (gimballed motor), se remontan a los lanzadores Viking (1949) (Caidin, 1957); sin embargo los aspectos relativos al control de posicionamiento de la(s) tobera(s) no se encuentran cubiertos explícitamente. En Greensite, 1970 se describe la linealización de un actuador electrohidráulico para la tobera de la primera etapa de un lanzador, limitando su análisis al movimiento en un plano. En Rodriguez, 2006 se presenta una descripción genérica de diferentes aplicaciones espaciales de actuadores electromecánicos. Roth, 1990 y Weir, 1993 enfocan sus aportes al diseño y ensayo de electromotores especiales para actuadores. A su vez, Byrd, 1997 estudia la influencia de las fuerzas transitorias originadas por el encendido y apagado del motor de reacción sobre un actuador electromecánico.

El tratamiento de esta temática, integrada en los aspectos generales de guiado y control, es incipiente en nuestro País, apareciendo como más viable desde el punto de vista tecnológico local la realización de posicionadores basados en actuadores electromecánicos que facilitan la ejecución de montajes destinados a la validación experimental de los conceptos desarrollados.

El presente trabajo tiene por objeto el estudio de las relaciones cinemáticas y dinámicas que rigen el movimiento de un motor de reacción orientable, como asimismo la determinación formal de los comandos a ser suministrados por el autopiloto al objeto de garantizar que la trayectoria descrita por el eje de la tobera sea tal que minimice las componentes del empuje en direcciones no deseadas. Se introduce como novedad la utilización del método de Kane (Kane, 2005) en la generación de las ecuaciones dinámicas.

Por otra parte, el trabajo cubre objetivos adicionales. En primer lugar, disponer de un modelo dinámico que permita la futura integración de los efectos de perturbaciones derivadas de la propulsión (encendido y apagado del chorro de gases, desalineación del eje de empuje, etc.) y, en segunda instancia, favorecer la implementación de un modelo hardware-in-the-loop de carácter general, que permita no sólo verificar el lazo de posición de la tobera, sino también diferentes estrategias de guiado.

2 CONSIDERACIONES GENERALES

La Figura 1 muestra un montaje experimental que simula la cámara de combustión y la tobera de la segunda etapa a propulsante líquido de un vehículo lanzador.

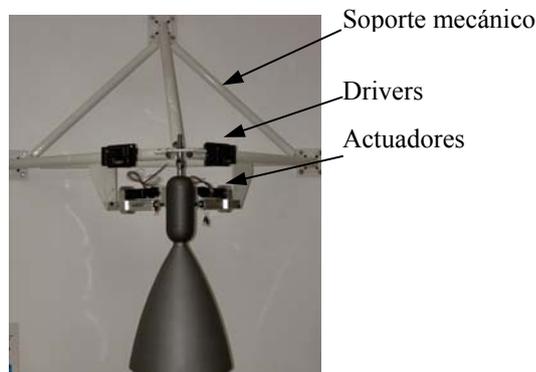


Figura 1: Maqueta experimental con actuadores cruzados.

Mediante los actuadores se posiciona el eje de la tobera y durante la propulsión, la dirección del vector empuje. Debe ser aclarado que este montaje es sólo una de las múltiples realizaciones posibles.

El problema de control se sintetiza en la Figura 2. El estado de actitud y posición del vehículo junto con la orientación actual del vector empuje alimentan a la Computadora de Guiado y Control (CGC) la que, de acuerdo a la trayectoria nominal perseguida, genera las variables de comando (α_{yc} , α_{zc}) correspondientes a la orientación angular deseada del eje de la tobera. El subsistema de electrónica y actuadores, a través de una ley de control adecuada, debe producir las elongaciones o fuerzas que lleven la orientación actual de la tobera (α_y , α_z) a reproducir los valores angulares comandados. La ley de control de orientación del vector empuje, debe tener en cuenta las relaciones (en general no lineales) existentes entre las elongaciones de los actuadores y los ángulos rotados. Surge entonces la necesidad de explicitar las formulaciones cinemáticas directa e inversa que definen el posicionamiento de la tobera con respecto de los ejes del vehículo.

Por lo que respecta a los requerimientos de diseño impuestos a los actuadores y su operación bajo carga, se encuentran detallados en la Tabla 1 y Tabla 2. El rango de posiciones alcanzables por el eje de la tobera ha de corresponder al sector esférico subtendido por un cono cuyo vértice coincida con el punto de pivotamiento y que posea una apertura angular total de 20°.

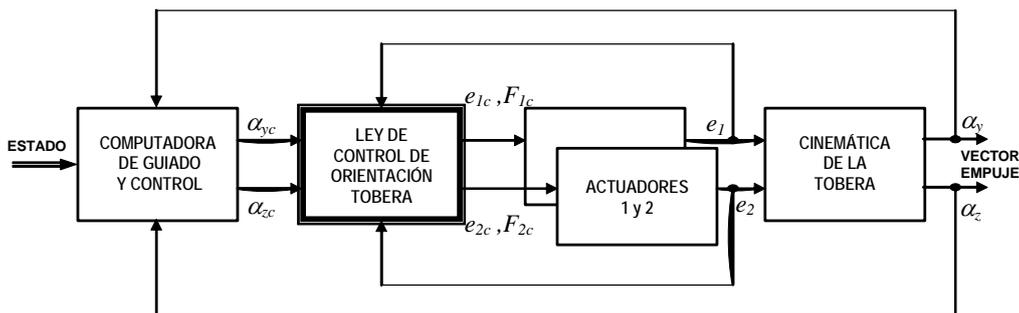


Figura 2: Lazo de control del vector empuje.

Características	Valores	Equivalente ángulo
Desplazamiento (elongación) total	42 mm	≈ 0.4369 rad
Desplazamiento controlado	40 mm	≈ 0.4160 rad
Precisión de posicionamiento	± 0.05 mm	≈ 0.0054 rad

Tabla 1: Especificaciones Estáticas.

Características bajo carga	Valores	Equivalente ángulo
Velocidad de posicionamiento (1)	≥ 0.2 m/s	≈ 2.08 rad/s
Aceleración de posicionamiento (1)	≥ 12 m/s ²	≈ 154.57 rad/s ²
Ancho de banda de -6dB (2)	≥ 10 Hz	

(1) Valores máximos en condiciones de error de posicionamiento por fuera de la banda de linealidad.
(2) Para valores de error de posicionamiento dentro del 10% del rango de desplazamiento controlado (± 2 mm).

Tabla 2: Especificaciones Dinámicas

3 CONTROL DEL VECTOR EMPUJE – CINEMATICA

3.1 Planteamiento Geométrico

En la posición neutra o de reposo se considera que el eje de la tobera es vertical y pasa por O, **Figura 3**. Los puntos A y B son los puntos de fijación de los actuadores 1 y 2 a la estructura del vehículo, mientras que P y Q corresponden a las fijaciones contra el cuerpo de la cámara de combustión, solidaria a la tobera. En situación de reposo los puntos A, B, P y Q son coplanares y las elongaciones (e_1 y e_2) proporcionadas por los actuadores son por definición nulas.

La **Figura 4** esquematiza la terna de referencia y la disposición (distancias de montaje) de los componentes. El origen O corresponde al centro de la cruceta de suspensión. La terna $\{x_f, y_f, z_f\}$ se toma paralela a los ejes del vehículo $\{x_b, y_b, z_b\}$, coincidiendo y_f y z_f con los ejes de giro de la cruceta.

De acuerdo a la convención adoptada, el actuador 2 (QB) hace rotar al eje de la tobera alrededor del eje Oy_f mientras que el actuador 1 (PA) lo hace rotar alrededor del eje Oz_f . El punto R corresponde a la intersección del eje de la tobera con el plano APQB en la situación neutra o de reposo.

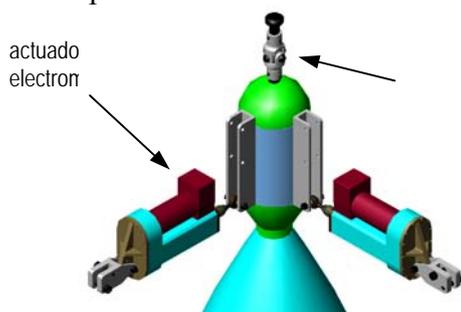


Figura 3: Disposición esquemática.

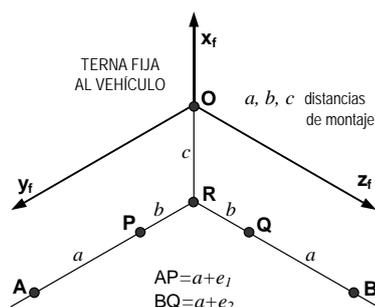


Figura 4: Geometría.

3.2 Rotaciones

Sea la terna $\{x_p, y_p, z_p\}$, solidaria a la tobera móvil, con origen en el punto de pivotamiento O y coincidente con la terna fija al vehículo $\{x_f, y_f, z_f\}$ en el estado neutro, **Figura 5**.

Para pasar de $\{x_f, y_f, z_f\}$ a $\{x_p, y_p, z_p\}$ de acuerdo a los movimientos que permite la cruceta han de realizarse las rotaciones δ_1 y δ_2 según el esquema

$$\{x_f, y_f, z_f\} \xrightarrow{T_1(\delta_1)} \{x, y, z\} \xrightarrow{T_2(\delta_2)} \{x_p, y_p, z_p\} \quad (1)$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} c\delta_1 & 0 & s\delta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\delta_1 & 0 & c\delta_1 \end{bmatrix}; \quad T_2 = \begin{bmatrix} c\delta_2 & -s\delta_2 & 0 \\ s\delta_2 & c\delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad [x_f \ y_f \ z_f]^T = T_1 T_2 \cdot [x_p \ y_p \ z_p]^T; \quad (2)$$

donde se abrevia $s\delta \equiv \sin\delta$ y $c\delta \equiv \cos\delta$.

La **Figura 6** muestra las coordenadas de R en el sistema fijo. Los ángulos α_y y α_z son las deflexiones de la tobera comandadas por el autopiloto y valen las relaciones:

$$R_x = \frac{-c}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha_y + \tan^2 \alpha_z}}; \quad (3)$$

$$R_y = -R_x \tan \alpha_y; \quad R_z = -R_x \tan \alpha_z .$$

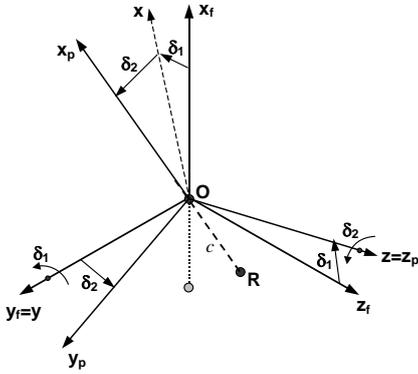


Figura 5: Ternas fija y pivotante.

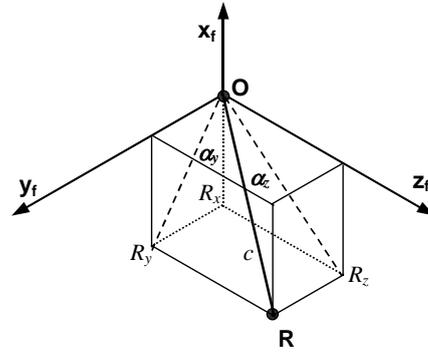


Figura 6: Orientación del eje de la tobera.

Por otra parte, de (2) se sabe que

$$\begin{bmatrix} R_x & R_y & R_z \end{bmatrix}_f^T = T_1 T_2 \cdot \begin{bmatrix} -c & 0 & 0 \end{bmatrix}_p^T \quad (4)$$

operando, resulta para los ángulos δ_1 y δ_2

$$\delta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{-R_z}{R_x} \right); \quad \delta_2 = \sin^{-1} \left(\frac{-R_y}{c} \right); \quad (5)$$

que, escritos en función de α_y y α_z dan

$$\delta_1 = \alpha_z; \quad \delta_2 = \sin^{-1} \left(\frac{\tan \alpha_y}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha_y + \tan^2 \alpha_z}} \right). \quad (6)$$

3.3 Elongaciones

Los puntos P y Q son solidarios a la tobera, y tienen coordenadas constantes en el sistema pivotante:

$P_p = [-c \ b \ 0]^T$; $Q_p = [-c \ 0 \ b]^T$; mientras que sus coordenadas en el sistema fijo son variables y pueden ser evaluadas mediante las matrices T_1 y T_2 para, a partir de ellas, calcular luego las elongaciones de los actuadores 1 y 2.

Dados α_y y α_z se determinan δ_1 y δ_2 mediante las (6) y consecuentemente las matrices T_1 y T_2 con las que se calculan las coordenadas de los puntos P y Q en la terna fija al vehículo,

$$P_f = T_1 T_2 \cdot P_p; \quad Q_f = T_1 T_2 \cdot Q_p \quad (7)$$

Para los puntos A y B (fijos al vehículo) vale

$$A_f = [-c \ a+b \ 0]^T; \quad B_f = [-c \ 0 \ a+b]^T, \quad (8)$$

con lo que las elongaciones para lograr la orientación deseada del eje de la tobera, podrán calcularse mediante normas euclídeas aplicando las expresiones

$$\begin{aligned} a + e_1 &= \|A - P\| \Rightarrow e_1 = \|A - P\| - a \\ a + e_2 &= \|B - Q\| \Rightarrow e_2 = \|B - Q\| - a \end{aligned} \quad (9)$$

Debe observarse que de acuerdo a (9), la posición de los puntos A y B puede ser cualquiera, ya que las elongaciones están definidas en función de distancias y del parámetro de montaje a (uno solo en este caso). Es concebible que otras formas de montaje puedan resultar más convenientes desde un punto de vista constructivo, por lo que en general esas realizaciones no poseerán la propiedad de simetría ortogonal supuesta en el caso considerado y será:

$$\begin{aligned} e_1 &= \|A - P\| - a_1 \\ e_2 &= \|B - Q\| - a_2 ; \quad a_1 \neq a_2 . \end{aligned} \quad (10)$$

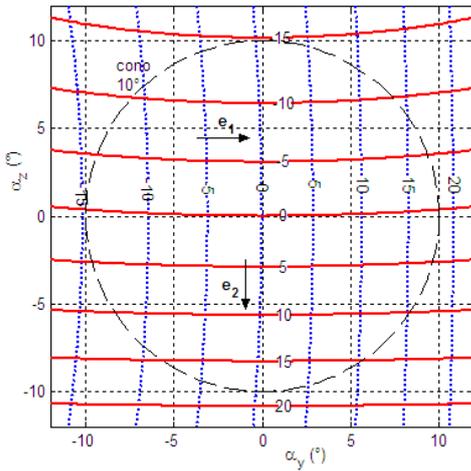


Figura 7: Curvas de nivel de las elongaciones.

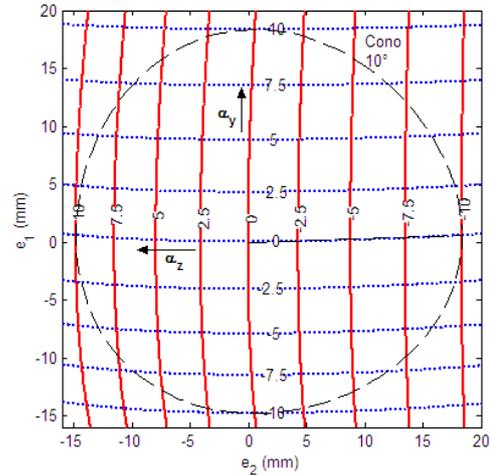


Figura 8. Curvas de nivel de los ángulos deflectados.

El cálculo de las elongaciones que originan el barrido de un cono de 20° por parte del eje longitudinal de la tobera, para las distancias de diseño $a=243.11\text{mm}$, $b=85.89\text{mm}$, $c=96.14\text{mm}$, arroja los resultados de la [Figura 7](#). El rango angular especificado es perfectamente alcanzable con elongaciones en el intervalo de $[-16, +20]\text{mm}$ alrededor de la posición neutra.

3.4 Cinemática inversa

El cálculo de la cinemática inversa es imprescindible para el control de elongaciones, ya que resulta necesario conocer las posiciones angulares alcanzadas a fin de compararlas con los ángulos comandados por el autopiloto, cerrando de esta manera el lazo de realimentación. Tal como se ha demostrado en 3.3 la cinemática directa resulta en la composición de funciones trigonométricas y cuadráticas, cuya inversión es no trivial:

$$e_1 = \psi_1(\alpha_y, \alpha_z); \quad e_2 = \psi_2(\alpha_y, \alpha_z) \quad (11)$$

En aras de la simplicidad, se ha optado por la inversión numérica de las tablas que originan la [Figura 7](#). La [Figura 8](#) muestra los gráficos resultantes para las funciones

$$\alpha_y = \xi_y(e_1, e_2); \quad \alpha_z = \xi_z(e_1, e_2) \quad (12)$$

Para evaluar los errores cometidos en el procedimiento de inversión numérica se implementó en Simulink® el algoritmo sintetizado en la Figura 9. Los errores así calculados fueron menores en valor absoluto que 2 segundos de arco. Este valor de precisión numérica es más que un orden de magnitud mejor que la precisión mecánica de posicionamiento angular (~100 segundos de arco para las condiciones de montaje adoptadas), que se deduce a partir de las especificaciones estáticas de los actuadores (véase Tabla 1).

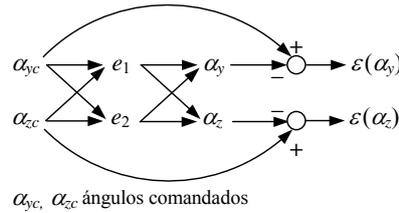


Figura 9. Cálculo de errores de cinemática.

3.5 Alternativas de implementación

De acuerdo a lo discutido precedentemente, una de las posibles maneras de implementar los cálculos cinemáticos en el controlador de posicionamiento es emplear una búsqueda en tabla con interpolación lineal. Este método requiere de poco procesamiento, pero como contrapartida es grande la memoria insumida por las tablas bidimensionales. Así, para el cálculo de errores del punto precedente fueron empleadas 4 tablas, con un requerimiento total de memoria cercano a los 128 kbytes.

Se ha investigado el reemplazo de las tablas por polinomios aproximantes, lo que posibilita una drástica reducción de la memoria ocupada.

Se observa en las tablas de las funciones (11) que cada elongación es fuertemente dependiente de un ángulo en particular, actuando el otro como parámetro. Así, e_1 resulta principalmente dependiente de α_y y lo propio ocurre con e_2 respecto de α_z . Conforme a ello, se han planteado aproximaciones bipolinómicas del tipo

$$e_1 = \psi_1(\alpha_y, \alpha_z) \approx \sum_{k=0}^n \left(\sum_{m=0}^n c_{km} \alpha_z^m \right) \alpha_y^k \quad (13)$$

con expresiones similares para e_2 , α_y y α_z .

Ajustando las aproximaciones por mínimos cuadrados, se obtuvieron diferentes cotas de error en función del grado de los polinomios utilizados. La Tabla 3 da los errores y el número de coeficientes correspondiente a cada aproximación.

Grado del polinomio n	Error total máximo (seg. arco)	Número de coeficientes a almacenar
2	515	36
3	50	64
4	1	100
5	0.1	144

Tabla 3. Aproximaciones polinómicas.

Se concluye entonces que el empleo de aproximantes de cuarto grado, garantiza un error numérico del mismo orden de magnitud que el obtenido aplicando tablas de valores, reduciendo el requerimiento de memoria auxiliar a cero, ya que los coeficientes de los polinomios se pueden almacenar en la misma memoria de programa.

3.6 Posicionamiento de la tobera

Se definirá al *vector de posicionamiento* OR como un versor cuya dirección coincide con el eje de simetría de la tobera, véase la [Figura 10](#). El vector de posicionamiento podrá adoptar cualquiera de las orientaciones pertenecientes a un sector esférico de 20° de apertura angular total (requerimiento de diseño).

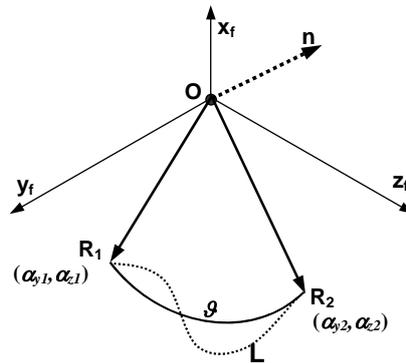


Figura 10. Trayectorias del eje de la tobera.

La orientación del vector empuje corresponde a la dirección del vector OR de la [Figura 10](#). Para cambiar ese vector de la posición $R_1 (\alpha_{y1}, \alpha_{z1})$ a la posición $R_2 (\alpha_{y2}, \alpha_{z2})$, se describirá una trayectoria sobre la superficie del sector esférico de las orientaciones alcanzables. Como la distancia mínima entre dos puntos sobre una esfera está dada por la longitud del segmento de círculo máximo que los une, la trayectoria de mínima distancia (ortodrómica) será entonces un arco de círculo perteneciente al plano definido por O , R_1 y R_2 . Consecuentemente, toda otra trayectoria que describa el extremo del vector de posicionamiento resultará no-mínima y será menester contar con un índice de performance que permita evaluar en cuánto se aparta de una ortodrómica.

A su vez, al recorrer una ortodrómica, se minimizan las componentes transitorias del vector empuje en direcciones indeseadas. Los aspectos variacionales de la cuestión ya han sido desarrollados exhaustivamente ([Rey Pastor, 1959](#); [Tolle, 1971](#)) y no se insistirá sobre ellos.

Finalmente, la ley de control a determinar debe tener en cuenta tanto la dinámica como los límites estáticos de los actuadores, según lo especificado en las [Tabla 1](#) y [Tabla 2](#).

3.7 Trayectorias del eje de tobera – Índices de bondad

En la [Figura 10](#), el arco de círculo con centro en O que une los extremos de los vectores de posicionamiento inicial R_1 y final R_2 del eje de la tobera, define una trayectoria ortodrómica. R_1 y R_2 quedan determinados por los ángulos $(\alpha_{y1}, \alpha_{z1})$ y $(\alpha_{y2}, \alpha_{z2})$ comandados por la CGC. La ortodrómica pertenece al plano R_1OR_2 , cuyo vector normal n también se ha representado:

$$|n| = |R_1 \times R_2| = \sin(\theta) \text{ por ser } |R_1| = |R_2| = 1 \quad (14)$$

por lo que la medida del arco que subtiende la ortodrómica y que, expresada en radianes es

igual a su longitud, está dada por

$$\mathcal{G} = \sin^{-1}(|\mathbf{n}|) = \sin^{-1}(|\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2|) \quad (15)$$

Si el eje de la tobera entre las posiciones inicial y final describe una trayectoria no ortodrómica cualquiera L, un índice de calidad para la misma queda definido por la relación entre su longitud y el largo de la ortodrómica que posee iguales puntos extremos:

$$Q_L = \frac{\int_L dS}{\int_O dS}; \quad dS = [(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2]^{1/2} \quad (16)$$

La longitud de la ortodrómica está dada por (15):

$$\int_O dS = \int_0^{\mathcal{G}} R d\theta = \mathcal{G} = \sin^{-1}(|\mathbf{R}_{inicial} \times \mathbf{R}_{final}|), \quad (17)$$

Siendo en la [Figura 12](#): $\mathbf{R}_{inicial} = \mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_{final} = \mathbf{R}_2$. A su vez, el largo de L puede ser calculado discretizando la trayectoria en pequeños tramos cuyas longitudes se aproximan por el arco del correspondiente círculo osculador:

$$\int_L dS = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N R \cdot \Delta\theta_k \quad (18)$$

y con N suficientemente elevado, se puede aproximar

$$\int_L dS \approx \sum_{k=1}^N R \cdot \Delta\theta_k = \sum_{k=1}^N \sin^{-1}(|\mathbf{R}_{k-1} \times \mathbf{R}_k|) \quad (19)$$

siendo $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_{inicial}$ y $\mathbf{R}_N = \mathbf{R}_{final}$.

Finalmente,

$$Q_L = \frac{\sum_{k=1}^N \sin^{-1}(|\mathbf{R}_{k-1} \times \mathbf{R}_k|)}{\sin^{-1}(|\mathbf{R}_{inicial} \times \mathbf{R}_{final}|)} \quad (20)$$

Se observa que siempre es $Q_L \geq 1$, haciéndose tanto mayor su valor cuanto más se aparta la trayectoria de una ortodrómica. Ese apartamiento puede expresarse como porcentaje, llamando δ_o a la discrepancia respecto de la ortodrómica:

$$\delta_o = 100 \cdot (Q_L - 1). \quad (21)$$

3.8 Modelado de los Actuadores

El funcionamiento de los actuadores a lazo cerrado en dominio lineal queda descrito por la función de transferencia

$$\frac{E_o(s)}{E_c(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (22)$$

donde $E_o(s)$ y $E_c(s)$ son las transformadas de Laplace de las elongaciones de salida y de comando, respectivamente. Introduciendo los valores límites estipulados por la [Tabla 2](#), se llega al modelo no lineal en variables de estado de la [Figura 11](#). Los bloques *Saturación*

Aceleración y Saturación Velocidad implementan los valores mínimos de la Tabla citada (12 m/s² y 0.2 m/s respectivamente). Para la frecuencia natural y relación de amortiguamiento se han tomado $\omega_n=2\pi\cdot 10\text{Hz}$ y $0.71 \leq \zeta \leq 1$ al objeto de asegurar transitorios prácticamente aperiódicos y de buena velocidad de respuesta.

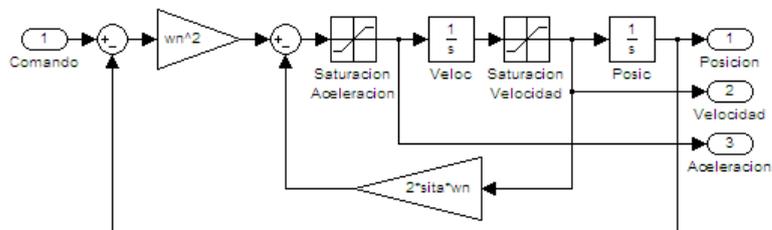


Figura 11. Modelo de actuador.

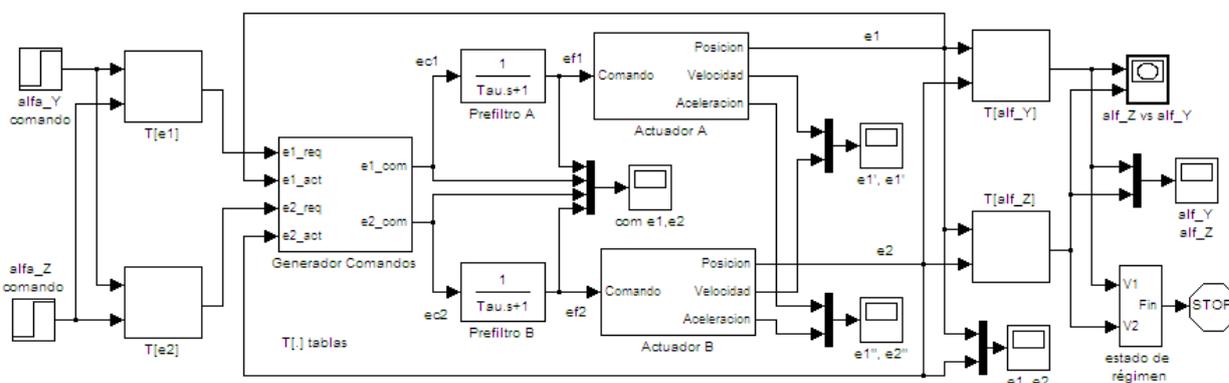


Figura 12. Modelo del control de posicionamiento.

3.9 Control de orientación - Concepción

Aunque el subsistema de control de orientación de tobera se estructurará con un controlador digital operando a una frecuencia de muestreo de 100 Hz, es conducente considerar los resultados obtenidos mediante simulaciones ‘continuas’ para señales grandes, en las que se observan con claridad los efectos de las no-linealidades de saturación de los servoactuadores. El esquema de simulación empleado se muestra en la [Figura 12](#). el bloque del *Generador de Comandos*, de tal manera que sus salidas reprodujeran exactamente las entradas con independencia de su amplitud relativa y cancelando los prefiltros de ambos canales, se obtuvieron los resultados mostrados en las [Figura 13](#) y [Figura 14](#), destacándose la gran discrepancia respecto de la ortodrómica ($\delta_o=60\%$) que presenta la trayectoria descrita por el eje de la tobera.

Se alcanzó una importante mejora implementando una ley de control que además de limitar las variables para evitar saturaciones genera los comandos de ambos canales de modo tal que sus actuadores alcancen simultáneamente los valores finales de elongación. Empleando un algoritmo como el listado en (23), se obtuvo una discrepancia tan pequeña como $\delta_o=0.03\%$.

$$\begin{aligned}
\Delta e_1 &= e_{1,\text{req}} - e_{1,\text{actual}} ; & \Delta e_2 &= e_{2,\text{req}} - e_{1,\text{actual}} ; \\
\Delta m &= \max \{ |\Delta e_1|, |\Delta e_2| \} ; & q &= \text{sii} \left(e_{c,\text{sat}} < \Delta m, \frac{e_{c,\text{sat}}}{\Delta m}, 1 \right) \\
e_{1c} &= e_{1,\text{actual}} + q \cdot \Delta e_1 ; & e_{2c} &= e_{2,\text{actual}} + q \cdot \Delta e_2
\end{aligned}
\tag{23}$$

Considerando la modalidad de funcionamiento discreto del controlador, se ajustaron los Prefiltros de los canales A y B [Figura 12](#) con una constante de tiempo de 2.5 milisegundos, compatible con el período de muestreo de 10 ms.

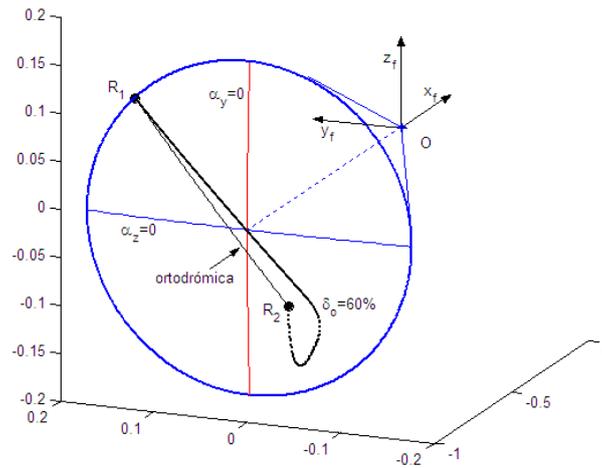


Figura 13. En trazo grueso se muestra la trayectoria obtenida para condiciones iniciales $(\alpha_{y1}, \alpha_{z1})=(-7.07^\circ, -7.07^\circ)$ y finales $(\alpha_{y2}, \alpha_{z2})=(2.5^\circ, 4.33^\circ)$. La correspondiente ortodrómica se indica con trazo fino.

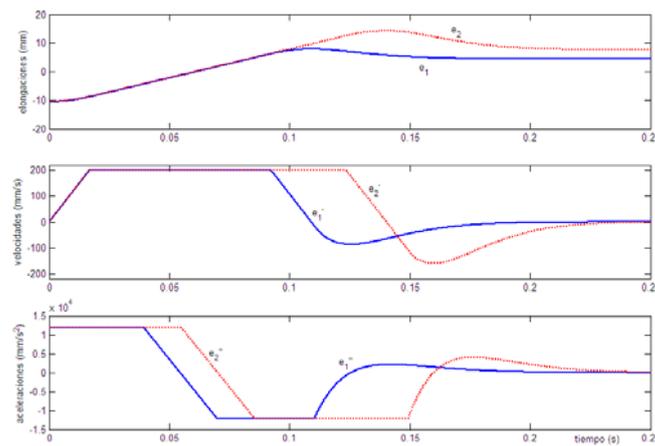


Figura 14. Elongaciones y sus derivadas.

Ulteriormente se verificó el funcionamiento del modelo de la [Figura 12](#) para excitaciones de bajo nivel. Las simulaciones realizadas tuvieron por objeto obtener la respuesta en frecuencia del sistema para pequeñas amplitudes. Se constató una buena coincidencia entre los resultados analíticos y las respuestas medidas en el modelo, lo que contribuye a su validación.

4 CONTROL DEL VECTOR EMPUJE – DINAMICA

Para la obtención del modelo dinámico de la [Figura 1](#) se supuso, en primera aproximación, al vehículo en una trayectoria suave sin perturbaciones importantes, y se toma como punto de referencia inercial al centro de masa del vehículo C_gTr . Se considera la actitud del vehículo con los ángulos ϕ , ángulo del eje longitudinal respecto de la vertical y θ ángulo de rolido del vehículo [Figura 15](#).

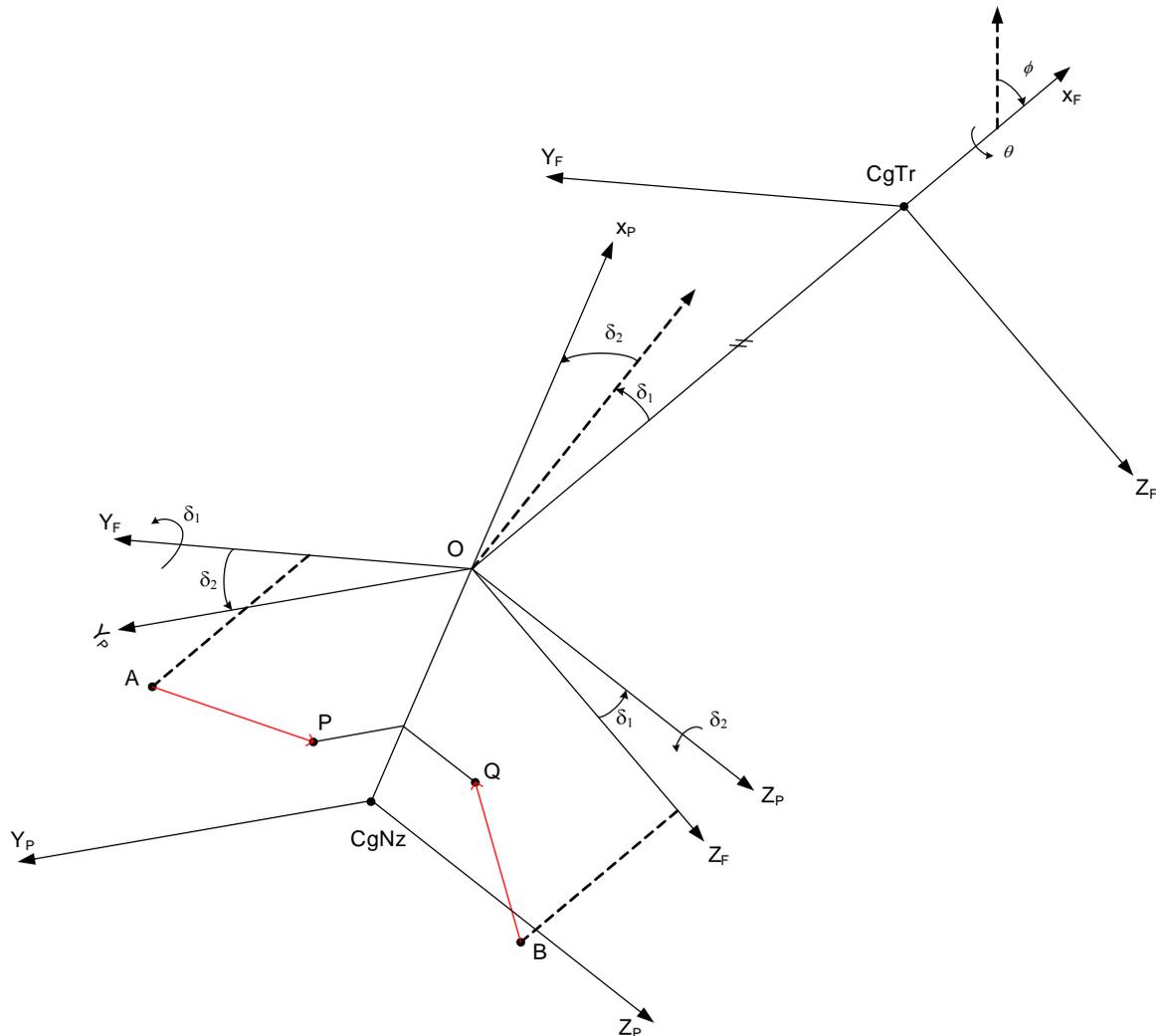


Figura 15: Sistemas de referencia.

4.1 El método de Kane

El modelado dinámico de sistemas puede ser obtenido mediante diferentes métodos, tales como las ecuaciones de Newton-Euler, ecuaciones de Lagrange o el método de Kane ([Kane, 2005](#)). El procedimiento de Kane es muy efectivo para el modelado dinámico de sistemas ([Nukulwuthiopas, 2002](#); [Kondak, 2005](#)). Las coordenadas generalizadas empleadas corresponden al mínimo conjunto de coordenadas que describen el sistema. Para sistemas con restricciones no-holonómicas, el uso de velocidades generalizadas representa el mínimo número de variables de velocidad para describir el movimiento del cuerpo. Este número es

llamado grados de libertad del sistema. Las ecuaciones dinámicas de Kane pueden ser representadas como:

$$\tilde{F}_r + \tilde{F}_r^* = 0 \quad (24)$$

Con $(r=1, \dots, p)$, siendo:

$$\tilde{F}_r = \sum_{i=1}^N v_r^{P_i} \cdot R_i \quad \tilde{F}_r^* = \sum_{i=1}^N v_r^{P_i} \cdot R_i^* \quad (25)$$

Donde \tilde{F}_r son las fuerzas generalizadas activas o externas y \tilde{F}_r^* son las fuerzas generalizadas de inercia; R_i son las fuerzas activas; R_i^* son las fuerzas de inercia; P_i es la partícula i del sistema; $v_r^{P_i}$ es la velocidad parcial de la partícula P_i respecto a un sistema inercial, siendo N el numero de partículas.

4.2 Modelado por Kane

Se considerará al modelo mecánico como un único cuerpo rígido, el conjunto tobera-cámara de combustión con masa MT , lo cual se justificara mas adelante. Se define a I como la matriz de inercia del sistema. Se asume simetría axial alrededor de x_p

El movimiento de la tobera se describe desde un marco inercial, la terna $\{x_f, y_f, z_f\}$, y no inercial terna $\{x_p, y_p, z_p\}$, coincidiendo los ejes Oy_f y Oz_p con los ejes de rotación de la cruceta, [Figura 3](#) y [Figura 15](#).

Se emplearán dos coordenadas generalizadas $q_{1,2}$ para la descripción de la posición y dos velocidades generalizadas $u_{1,2}$ para la descripción del movimiento del sistema. Las coordenadas generalizadas son los ángulos δ_1 y δ_2 que definen la posición de la tobera respecto de la terna $\{x_f, y_f, z_f\}$. La velocidad angular está dada por:

$$\bar{\omega} = u_1 e_{y_f} + u_2 e_{z_p}; \quad e_{y_f}, e_{z_p} \text{ vectores unitarios} \quad (26)$$

Teniéndose

$$q_j = \delta_j; \quad u_j = \dot{q}_j; \quad j = 1, 2. \quad (27)$$

La fuerza F_P es paralela al vector AP y actúa sobre el punto P . La fuerza F_Q es paralela al vector BQ y actúa sobre el punto Q , [Figura 15](#). En situación de reposo los puntos A, B, P y Q son coplanares y las fuerzas (F_P y F_Q) proporcionadas por los actuadores son nulas. Se define Cg como centro de masa

De acuerdo a lo precedente, las ecuaciones dinámicas de Kane quedan definidas por el sistema (29), para determinarlas formalmente se utilizó la herramienta para modelado dinámico de sistemas mecánicos [Autolev®](#) y [Kane, 2005](#).

$$\tilde{F}_r + \tilde{F}_r^* = 0 \quad (28)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{K_{n1}}{K_{d1}} F_P + \frac{K_{n2}}{K_{d2}} F_Q + R_1 &= 0 \\ \frac{K_{n3}}{K_{d3}} F_P + \frac{K_{n4}}{K_{d4}} F_Q + R_2 &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

Donde:

$$K_{n1} = c.s\delta_1.[b.s\delta_2 + c.c\delta_2]$$

$$K_{d1} = [b^2 + 2.c^2 + (a+b)^2 + 2.c.(a+b).s\delta_2 - 2.b.(a+b).c\delta_2 - 2.b.c.s\delta_2.c\delta_1 - 2.c^2.c\delta_1.c\delta_2]^{1/2}$$

$$K_{n2} = c.c\delta_1[b - (a+b).c\delta_2] + s\delta_1[b.(a+b). + c^2.c\delta_2]$$

$$K_{d2} = [b^2 + 2.c^2 + (a+b)^2 + 2.b.c.s\delta_1 - 2.b.(a+b).c\delta_1 - 2.c.(a+b).s\delta_1.c\delta_2 - 2.c^2.c\delta_1.c\delta_2]^{1/2}$$

$$K_{n3} = -c.c\delta_2[b.c\delta_1 + (a+b)] - s\delta_2[b.(a+b). + c^2.c\delta_1]$$

$$K_{d3} = K_{d1}$$

$$K_{n4} = c.s\delta_2.[(a+b).s\delta_1 + c.c\delta_1]$$

$$K_{d4} = K_{d2}$$

$$R_1 = -g.c.g_x.MT.c\delta_2.(s\delta_1.c\phi - s\phi.c\delta_1.c\theta) - (I_{xx} - I_{yy} - 2.MT.c.g_x^2)s\delta_2.c\delta_2.\dot{\delta}_1\dot{\delta}_2 -$$

$$- (I_{xx}.s\delta_2^2 + (I_{yy} + MT.c.g_x^2)c\delta_2^2).\ddot{\delta}_1 + (I_{xx} - I_{yy})s\delta_1.s\delta_2.c\delta_2.\ddot{\delta}_2$$

$$R_2 = -g.c.g_x.MT(s\delta_2.c\delta_1.c\phi - s\phi.(s\theta.c\delta_2 - s\delta_1.s\delta_2.c\theta)) + (I_{xx} - I_{yy} - MT.c.g_x^2)s\delta_2.c\delta_2.\dot{\delta}_1^2 -$$

$$- (MT.c.g_x^2 + I_{zz}.c\delta_1).\ddot{\delta}_2$$

Estas ecuaciones se utilizan para generar la ley de control dinámico.

4.3 Modelado por Newton-Euler

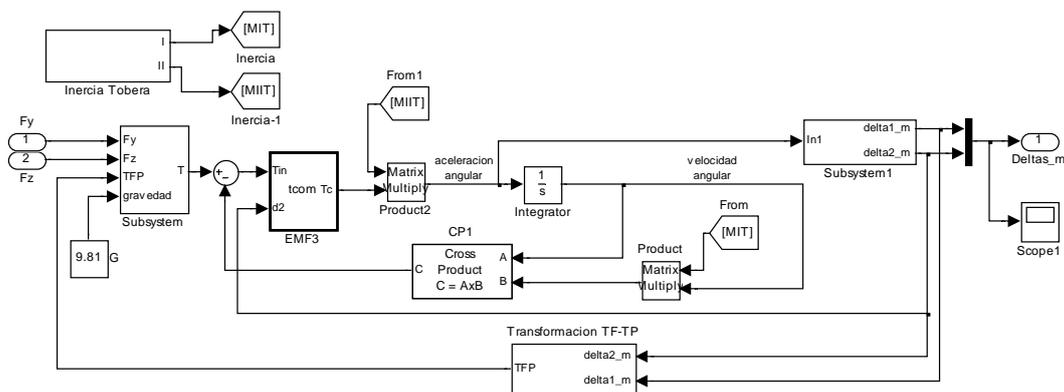


Figura 16: Modelo Simulink®

En la [Figura 16](#) se muestra el modelo generado en Simulink® a partir de la ecuación de Newton-Euler (30), siguiendo a

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \sum_i \bar{T}_i + \sum_i \bar{r}_i \times \bar{F}_i = I\bar{\alpha} + \bar{\omega} \times I\bar{\omega} \quad (30)$$

Donde

\bar{L} momento angular del sistema

\bar{T}_i cuplas puras del sistema

\bar{F}_i fuerzas actuantes en el sistema

\bar{r}_i vectores del punto de acción de las fuerzas respecto a un punto inercial, en nuestro caso el punto de pivotamiento.

I matriz de inercia del sistema

$\bar{\alpha}, \bar{\omega}$ aceleración y v. angular del sistema.

Aunque la masa de los actuadores 2.4Kg es comparativa con la masa de la tobera 9.73Kg, considerando las restricciones mecánicas del sistema [Figura 3](#), al estar los actuadores fijos a la estructura observamos que, la posición de su centro de masa respecto al punto de pivotamiento se mantiene prácticamente constante. Por lo que su influencia sobre la inercia del sistema es muchísimo menor que si acompañaran el movimiento del centro de gravedad de la tobera. En el siguiente cálculo se asumirá que así lo hacen, para demostrar su baja influencia en el sistema respecto de la matriz de inercia

La matriz de inercia está compuesta por la tobera, cámara de combustión, y el conjunto de los actuadores electromecánicos y sus accesorios de montaje. Las contribuciones inerciales respecto del punto de pivotamiento se detallan en la [Tabla 4](#).

	Tobera y Cámara de Combustión	Actuadores y Accesorios
Ixx	0,1439	0.12728
Iyy	2.2255	0.08582
Izz	2.2255	0.08582
Ixy	0,0	0.00024
Ixz	0,0	0.00024
Iyz	0,0	0,0

Tabla 4. Momentos de Inercia.

En función de las especificaciones estáticas y dinámicas se obtienen los momentos debidos a cada conjunto, empleando para el cálculo las máximas aceleraciones y velocidades angulares especificadas ([Tabla 2](#)).

Momento debido a los actuadores:

$$|I\bar{\alpha} + \bar{\omega} \times I\bar{\omega}| = |T_a| = 18.76 \quad (31)$$

Momentos debidos a la Tobera:

$$|I\bar{\alpha} + \bar{\omega} \times I\bar{\omega}| = |T_T| = 486.48 \quad (32)$$

De las Ecs. (31) y (32) se obtiene que el momento debido a los actuadores es despreciable frente a los de la tobera (3.86%); en base a lo cual queda justificado modelar a los actuadores como fuerzas de control que se ejercen sobre los puntos P y Q.

En el modelo solo se consideran solamente las fuerzas debidas a la gravedad y la de control de los actuadores. En el sistema propuesto no existen cuplas puras de control.

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{r}_p \times \bar{F}_{AP} + \bar{r}_Q \times \bar{F}_{BQ} + \bar{r}_{cg} \times \bar{F}_g + \bar{T}_e = I\bar{\alpha} + \bar{\omega} \times I\bar{\omega} \quad (33)$$

donde F_{AP} y F_{BQ} son las fuerzas de control de los actuadores y y z respectivamente. El momento T_e se debe a las restricciones mecánicas y es paralelo al vector $e_{yf} \times e_{zp}$.

4.4 Control de orientación

Básicamente lo que se requiere es que el vector empuje recorra una ortodrómica entre un punto inicial y final, moviéndose sobre un plano establecido. Con estas especificaciones se puede generar una trayectoria deseada (o trayectoria de referencia) teniendo en cuenta posición, velocidad y aceleración sobre el plano de la ortodrómica, respetando las restricciones cinemáticas.

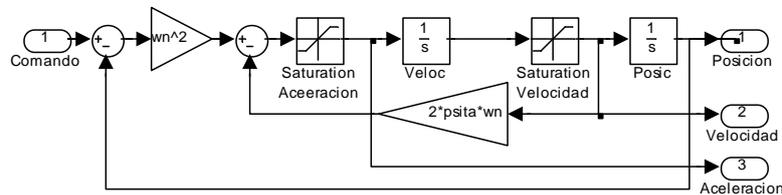


Figura 17: Generación de trayectoria referencial.

$$\frac{\theta_o(s)}{\theta_c(s)} = \frac{\omega_1 \omega_2}{s^2 + (\omega_1 + \omega_2)s + \omega_1 \omega_2} \quad (34)$$

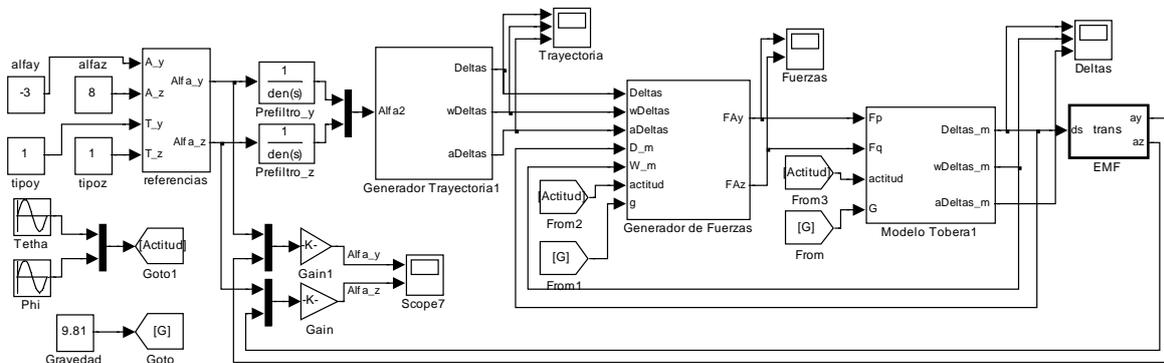


Figura 18: Sistema de control Implementado en Simulink®

Para ello se utiliza el diagrama de la Figura 17, y la expresión (34), que da la trayectoria de referencia, donde $\theta_o(s)$ y $\theta_c(s)$ son las transformadas de Laplace del ángulo de salida y de comando, respectivamente. Los valores implementados en los bloques Saturación Aceleración y Saturación Velocidad del modelo, son los mínimos de la Tabla 2 (154.57 rad/s² y 2.08 rad/s respectivamente). Se han elegido ω_1 y ω_2 al objeto de asegurar transitorios prácticamente aperiódicos y reducido tiempo de respuesta.

Se implementa por lo tanto un control por realimentación no lineal de modelo de referencia para linealización y control de seguimiento de trayectoria Figura 18: .

Para cerrar el lazo de control se utiliza un controlador proporcional de seguimiento de

trayectoria para cada una actuator, [Figura 19](#).

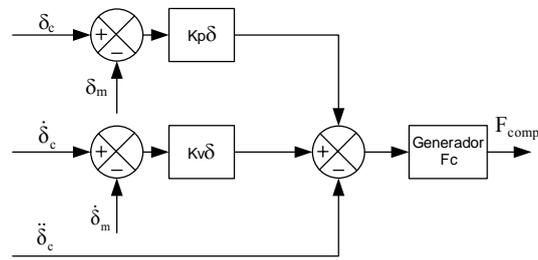


Figura 19: Controlador

Con este tipo de controlador se obtienen los siguientes resultados, en la [Figura 20](#) se muestra la respuesta a lazo cerrado del sistema. Se observa también que la respuesta de α_z es levemente más rápida que la de α_y debido a que el control sobre α_z es directamente proporcional al de δ_1 por otro lado el valor de α_y es una transformación trigonométrica respecto de δ_1 y δ_2 como se analiza en la sección 3.2.

A través de la realimentación no lineal se ha podido desacoplar las trayectorias de δ_1 y δ_2 .

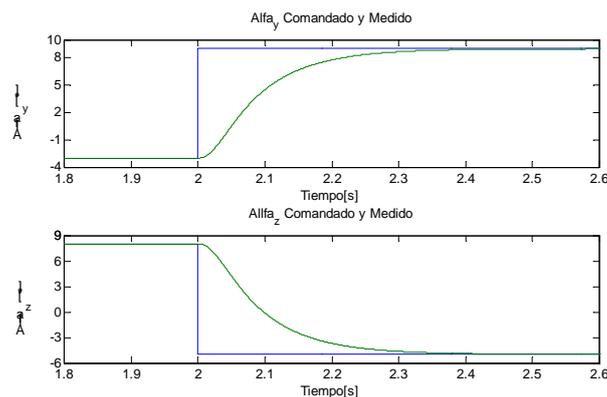


Figura 20: Respuesta lazo cerrado

Utilizando el índice de bondad definido, discrepancia respecto de la ortodrómica $\delta_o = 100 \cdot (Q_L - 1)$, se obtiene su valor para las trayectorias a lazo cerrado

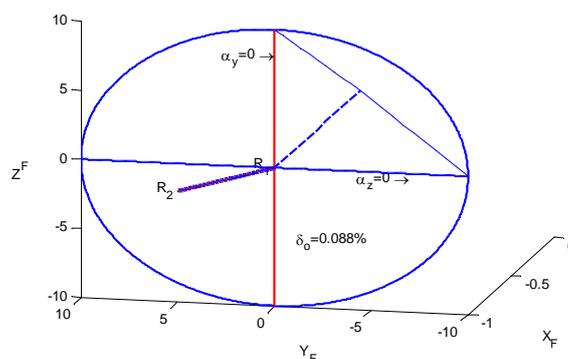


Figura 21: Trayectoria Lazo cerrado

Se logro una buena aproximación a la ortodrómica difiriendo en un valor de 0.088%, [Figura 21](#), similar al obtenido en el control cinemático.

5 CONCLUSIONES

La formulación de la cinemática directa resulta independiente del montaje adoptado. Siendo invariante la energía de accionamiento, cada montaje poseerá características fuerza-desplazamiento que le serán peculiares y deberán analizarse en función de las restricciones geométricas y mecánicas de diseño del vehículo. Por lo que hace a la implementación de los cálculos de cinemática directa e inversa que deberán integrarse en el controlador digital de posición, queda pendiente de estudio una posible mejora del comportamiento numérico aplicando aproximaciones basadas en polinomios ortogonales.

La ley de control listada en (23), ha sido validada para un controlador discreto operando a una frecuencia de muestreo de 100 Hz mediante simulación numérica para grandes y pequeñas señales, con resultados satisfactorios.

El análisis de la dinámica ha podido ser reducido a una formulación cerrada empleando el método de Kane que permite obtener expresiones más simples que las derivadas mediante las ecuaciones de Euler para el mismo sistema.

La ley de control determinada por seguimiento de modelo de referencia, ha sido validada mostrando su bajo nivel de error en la aproximación de una ortodrómica. Para la implementación práctica de esta ley se habrá de tener en cuenta tanto las características operativas de los servomotores empleados (limitaciones de corriente y tensión), como las particularidades dinámicas de la carga y las perturbaciones inducidas por el sistema de propulsión.

Finalmente, la ley de control puede ser integrada con facilidad a una simulación incluyendo hardware-in-the-loop utilizando la maqueta disponible de la tobera y los actuadores electromecánicos reales.

REFERENCIAS

- Byrd Virginia T., Parker Joey K., “Further Consideration of an Electromechanical Thrust Vector Control Actuator Experiencing Large Magnitude Collinear Transient Forces”. *Proceedings of the Twenty-Ninth South-Eastern Symposium on System Theory*, pp. 338-342, 1997
- Bedford & Fowler, *Mecánica para ingeniería. Dinámica*, Addison Wesley, 1998
- Caidin M., Vanguard! E.P. Dutton & Co., Inc., New York, p. 138. Citado en “The U.S. Naval Research Laboratory Fulfilling the Roosevelts’ Vision for American Naval Power (1923-2005)”. Naval Research Laboratory, June 30 2006. NRL/MR/1001--06-8951, 1957.
- Greensite Arthur L., Control theory: Volume II. Analysis and design of space vehicle flight control systems. *Spartan Books*, New York – Washington. ISBN 87671-554-4., 1970
- Kane T., Levison D., Autolev 4 User’s Manual. Online Dynamics.Inc 2005, 2005
- Kondak Kostantin, “Mechanical model and control of an autonomous small size helicopter with a stiff main rotor”. *IEEE ICIRS’04*, 2005.
- Nukulwuthiopas, W. et al.. “Dinamic modeling of a One–Wheel Robot by using Kane’s Method”. *IEEE ICIT’02* , 2002
- Online Dynamics.Inc., *Autolev Tutorial*, 2005.

- Rey Pastor Julio, Pi Calleja Pedro, Trejo César A., *Análisis Matemático, Vol. III: Análisis funcional y aplicaciones*. Ed. Kapelusz, Buenos Aires, 3ª edic. 1965; pp 317-318, 1959.
- Rodriguez Francis D., “Electromechanical Motion Control Systems in Spacecraft Applications.” *Space 2006 Conference*, 19-21 September 2006, San Jose, California. AIAA 2006-7291, 2006.
- Roth Mary Ellen. “Electromechanical Actuation for Thrust Vector Control Applications”. *National Aerospace and Electronics Conference*, Dayton, OH, May 21-25, 1990.
- Tolle Henning, *Optimierungsverfahren für Variationsaufgaben mit gewöhnlichen Differential-gleichungen als Nebenbedingungen* . Springer Verlag, Berlin/Heidelberg. ISBN 3-540-05162-7, pp 18-22, 1971.
- Weir Rae Ann, Cowan John R., 1993. “Development and Test of Electromechanical Actuators for Thrust Vector Control”. AIAA, SAE, ASME, and ASEE, Joint Propulsion Conference and Exhibit, 29th, Monterey, CA, June 28-30, 1993