

**APROXIMACIÓN MEDIANTE VOLÚMENES FINITOS
DEL FLUJO DE FLUIDOS DE LA LEY DE LA POTENCIA
EN UNA EXPANSIÓN ASIMÉTRICA BRUSCA 2D**

**FINITE VOLUME APPROACH TO SUDDEN 2D ASYMMETRIC
EXPANSION FLOWS FOR POWER-LAW NON-NEWTONIAN FLUIDS**

Emilio Horane, Ricardo A. Prado

Grupo Fluidodinámica Computacional, Departamento de Mecánica Aplicada,
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Comahue,
calle Buenos Aires N°1400, Q8300BCX Neuquén, Argentina
email: prado@uncoma.edu.ar

Palabras claves: Volúmenes finitos, ley de la potencia, expansión 2D, SIMPLE.

Resumen.. *Se desarrolla la solución numérica para el flujo laminar incompresible de fluidos no-newtonianos que verifican la ley de la potencia, a través de canales bidimensionales que presentan una expansión brusca. La resolución numérica es realizada mediante la aproximación por volúmenes finitos, utilizando el método SIMPLE, comparando el comportamiento no-newtoniano contra el newtoniano. Se presentan los perfiles de velocidad para un rango de números de Reynolds, exponentes de la ley de la potencia y relaciones de expansión. Se muestran asimismo las distribuciones de presión sobre las paredes.*

Key words: Finite Volumes, power-law fluid, 2D sudden expansion, SIMPLE.

Abstract.. *In this work a numerical solution is developed for the incompressible laminar flow of non-Newtonian power-law type fluids through a 2D channel with a sudden asymmetric expansion. A finite volume approach, with the SIMPLE method, is implemented and tested for power-law fluids, and compared against the Newtonian behavior. Velocity profiles are presented for a range of Reynolds numbers, power-law exponents, and geometric expansion ratios. The results for recirculation, reattachment and pressure distributions on the walls are also presented.*

1 INTRODUCCIÓN

El comportamiento no-newtoniano es la regla en la mayoría de los fluidos utilizados en la industria del petróleo. El propio petróleo puede exhibir características no-newtonianas tanto moderadas como muy intensas. Más aún, se requiere que los fluidos utilizados para la perforación y la *completación* de los pozos presenten un importante comportamiento tixotrópico.

Las ecuaciones constitutivas que relacionan las tensiones de corte de los fluidos no-newtonianos con sus movimientos son complejas y la matemática involucrada en la resolución de estos problemas resulta dificultosa¹. Por lo cual, la simplicidad del modelo de la ley de la potencia para la descripción del comportamiento reológico resulta muy útil, siendo la única ecuación que presenta un uso real².

Las geometrías atravesadas por estos fluidos pueden incluir secciones anulares así como todo tipo de contracciones o expansiones. En ciertas condiciones, cuando se trata de flujo anular en donde los radios de las tuberías concéntricas difieren poco entre sí, es posible representar dicho flujo anular mediante la aproximación correspondiente al flujo en un canal bidimensional. En la Figura 1 se muestra la geometría considerada para la expansión brusca, con las definiciones del sistema coordenado utilizado y de las correspondientes variables geométricas.

Se presenta en este trabajo el desarrollo de la solución numérica para el flujo laminar incompresible de fluidos no-newtonianos que verifican la ley de la potencia, a través de canales bidimensionales que presentan una expansión brusca. La resolución numérica es realizada mediante la aproximación por volúmenes finitos, utilizando el método SIMPLE, comparando el comportamiento no-newtoniano contra el newtoniano. Se presentan los perfiles de velocidad para un rango de números de Reynolds, exponentes de la ley de la potencia y relaciones de expansión. Se muestran asimismo las distribuciones de presión sobre las paredes, así como la presencia de recirculación y readherencia del flujo. En aquellos casos en donde es posible, los resultados numéricos obtenidos son comparados con aquéllos presentados en la literatura.

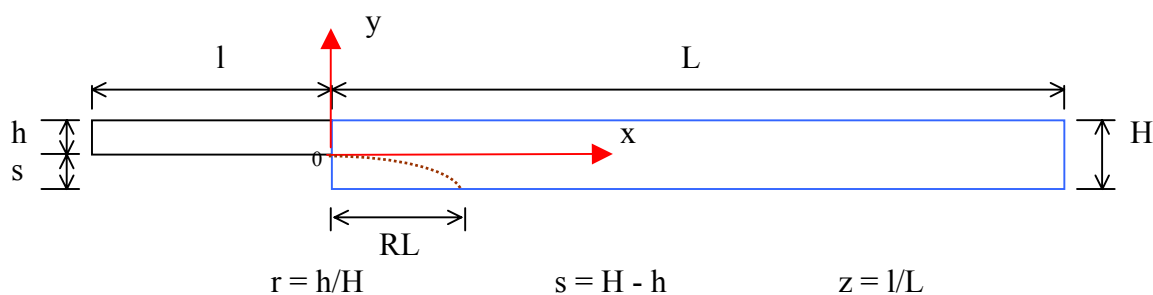


Figura 1: Esquema de la geometría de la expansión brusca 2D

2 ECUACIONES DE GOBIERNO Y METODOLOGÍA NUMÉRICA

2.1 Ecuaciones de Navier Stokes

Las ecuaciones de Navier Stokes acoplan las ecuaciones de transporte de masa y momento lineal al campo de presiones. En general, interesa utilizarlas llevándolas a la forma de las ecuaciones de transporte base del método de volúmenes finitos, siendo ésta

$$\partial_t(\rho \phi) + \text{div } j_T^\phi = s^\phi, \quad (1)$$

donde Φ describe un campo escalar transportado, ρ es la densidad del fluido, j_T^ϕ la densidad de corriente total asociada al transporte del escalar, y s^ϕ la fuente asociada al escalar. j_T^ϕ viene dada por sus componentes convectiva y difusiva, según

$$j_T^\phi = j_t^\phi + j_d^\phi = \phi \rho u - \Gamma \text{grad } \phi. \quad (2)$$

La ecuación de transporte de masa se escribe

$$\partial_t \rho + \text{div}(\rho u) = s^p, \quad (3)$$

en tanto que las ecuaciones de conservación del momento lineal en coordenadas cartesianas tienen la forma

$$\rho D_t u = \text{div } \Pi + f, \quad (4)$$

con

$$\rho D_t u_i = \partial_t(\rho u_i) + \text{div } j_t^{u_i} = \partial_t(\rho u_i) + \text{div}(\rho u u_i). \quad (5)$$

El tensor de tensiones incluye tanto los componentes diagonales de la presión, p , como los esfuerzos viscosos, τ , que se expresan en términos del primer y segundo coeficientes de viscosidad μ y λ según

$$\Pi_{j,i} = -p \delta_{j,i} + \tau_{j,i}, \quad \tau_{j,i} = \lambda \text{div } u \delta_{j,i} + \mu (\partial_j u_i + \partial_i u_j), \quad (6)$$

y las componentes de su divergencia vienen dadas por

$$(\text{div } \Pi)_i = \sum_j \partial_j \Pi_{j,i} = -\partial_i p + \sum_j \partial_j \tau_{j,i}. \quad (7)$$

La contribución de los esfuerzos viscosos a su vez se rescribe como

$$\begin{aligned} \sum_j \partial_j \tau_{j,i} &= \sum_j \partial_j [\lambda \text{div } u \delta_{j,i} + \mu (\partial_j u_i + \partial_i u_j)] \\ &= \lambda \partial_i (\text{div } u) + \sum_j \partial_j (\mu \partial_i u_j) + \text{div}(\mu \text{grad } u_i). \end{aligned} \quad (8)$$

La ecuación de transporte para cada componente de velocidad viene dada entonces por

$$\partial_t(\rho u_i) + \text{div}(\rho u u_i - \mu \text{grad} u_i) = -\partial_i p + \sum_j \partial_j(\mu \partial_i u_j) + \lambda \partial_i(\text{div} u) + f_i, \quad (9)$$

con lo que las fuentes vienen dadas para cada componente por

$$s^{u_i} = -\partial_i p + \sum_j \partial_j(\mu \partial_i u_j) + \lambda \partial_i(\text{div} u) + f_i. \quad (10)$$

Redefiniendo las fuentes mediante la separación de las contribuciones de la presión y de las fuerzas distribuidas, las fuentes residuales resultarán dadas por

$$\begin{aligned} \sigma^{u_i} &\equiv \sum_j \partial_j(\mu \partial_i u_j) + \lambda \partial_i(\text{div} u) \\ &= \sum_j \partial_j \mu \partial_i u_j + (\mu/3) \partial_i(\text{div} u). \end{aligned} \quad (11)$$

En el caso de líquidos incompresibles, como los que se analizan aquí, la divergencia de la velocidad se anula, con lo que sólo se tendrán contribuciones del término de las derivadas de la viscosidad. Sin embargo, para un fluido newtoniano tales derivadas se anulan, y en consecuencia también las fuentes residuales. En general, se tendrá entonces que

$$\partial_t(\rho u_i) + \text{div} j_T^{u_i} = -\partial_i p + f_i + \sigma^{u_i}. \quad (12)$$

2.2 Ley de la potencia para la reología del fluido no-newtoniano

Implementando en forma estándar la ley de la potencia para la reología del fluido, se tiene, para el tensor 2 D de velocidad de deformación

$$2D_{i,j} = \partial_{x_j} u_i + \partial_{x_i} u_j, \quad (13)$$

así como también el siguiente segundo invariante, que para el caso bidimensional resulta

$$I_2^{2D} = 2D_{1,1} 2D_{2,2} - 2D_{1,2} 2D_{2,1} = 2 \partial_{x_1} u_1 2 \partial_{x_2} u_2 - (\partial_{x_1} u_2 + \partial_{x_2} u_1)^2. \quad (14)$$

Con la notación

$$\gamma = |I_2^{2D}|^{1/2}, \quad (15)$$

el modelo de la ley de la potencia para la viscosidad aparente η tiene la forma

$$\eta = m \gamma^{(n-1)}. \quad (16)$$

donde m y n representan los parámetros del modelo. Este modelo reproduce aproximadamente el comportamiento de muchos líquidos poliméricos y dispersiones, y en particular se utiliza para modelar el comportamiento de una amplia variedad de fluidos de la industria petrolera.

2.3 Discretización 2D de la ecuación de transporte de un escalar

La discretización de las ecuaciones acopladas en los campos de velocidad y presión se hace en forma estándar. Se define para cada variable una grilla de elementos de volumen, integrando luego en cada elemento de volumen la ecuación diferencial asociada a la evolución de la variable. Típicamente, la grilla es descentrada para ambos campos de velocidades, como se representa en la Figura 2.

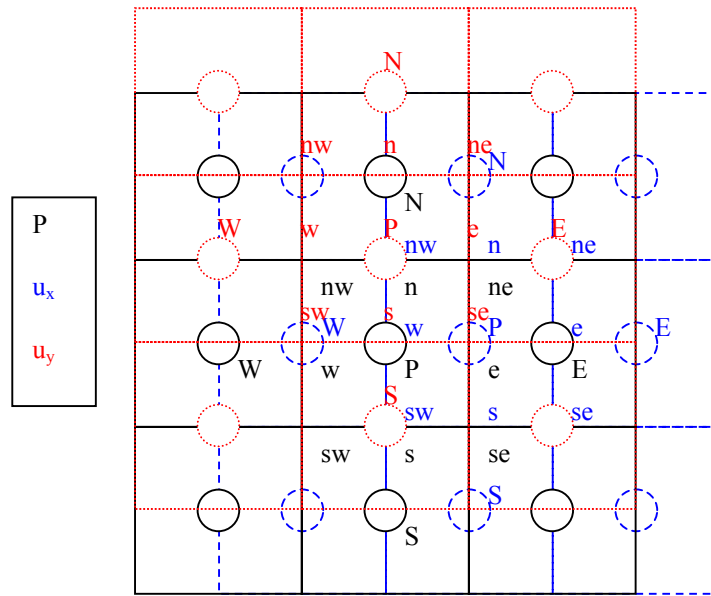


Figura 2: Grilla descentrada utilizada para los campos de velocidad y presión

La integración de los términos de divergencia se hace mediante la utilización del teorema de la divergencia, según

$$\int_{\Delta V} (\text{div } \mathbf{j}_T^\phi) dV = \int_{\Omega} \mathbf{j}_{n,T}^\phi \cdot \mathbf{d}\Omega = j_{x,T}^\phi(x_e) A_e - j_{x,T}^\phi(x_w) A_w + j_{y,T}^\phi(y_n) A_n - j_{y,T}^\phi(y_s) A_s. \quad (17)$$

Resulta entonces

$$\partial_t (\rho \phi) \Delta V + j_{x,T}^\phi(x_e) A_e - j_{x,T}^\phi(x_w) A_w + j_{y,T}^\phi(y_n) A_n - j_{y,T}^\phi(y_s) A_s = s^\phi \Delta V, \quad (18)$$

esto es,

$$\begin{aligned} & \Delta V (\rho_p \phi_p - \rho_p^0 \phi_p^0) / \Delta t + \\ & + (\phi_e \rho_e u_{x,e} - \Gamma_e (\text{grad } \phi)_e) A_e - (\phi_w \rho_w u_{x,w} - \Gamma_w (\text{grad } \phi)_w) A_w + \\ & + (\phi_n \rho_n u_{y,n} - \Gamma_n (\text{grad } \phi)_n) A_n - (\phi_s \rho_s u_{y,s} - \Gamma_s (\text{grad } \phi)_s) A_s = s^\phi \Delta V. \end{aligned} \quad (19)$$

En las expresiones precedentes, A_i denota a las respectivas áreas del elemento de volumen, según sus sentidos norte n, sur s, este e y oeste w, mientras que ΔV representa el volumen de dicho elemento.

La ecuación de transporte de masa es el caso particular del escalar unidad. La ecuación discreta resultante provee la condición de consistencia a imponer en el campo de presiones. Teniendo en cuenta que no se tienen fuentes de masa en el dominio de trabajo, y que el fluido es incompresible, esta ecuación se traduce en

$$\Delta(\text{FA}) = F_e A_e - F_w A_w + F_n A_n - F_s A_s = 0, \quad (20)$$

con

$$F_e = \phi_e \rho_e u_{x,e}, \quad F_w = \phi_w \rho_w u_{x,w}, \quad F_n = \phi_n \rho_n u_{y,n}, \quad F_s = \phi_s \rho_s u_{y,s}. \quad (21)$$

En esta ecuación se expresan los escalares en las fronteras en términos de los escalares en los elementos, según

$$\begin{aligned} \phi_e &= c_e^E \phi_E + c_e^P \phi_P, & \phi_w &= c_w^P \phi_P + c_w^W \phi_W, \\ \phi_n &= c_n^N \phi_N + c_n^P \phi_P, & \phi_s &= c_s^P \phi_P + c_s^S \phi_S, \end{aligned} \quad (22)$$

y se expresan los gradientes con derivadas centradas según

$$\begin{aligned} (\text{grad } \phi)_e &= (\phi_E - \phi_P) / \Delta x_{PE}, & (\text{grad } \phi)_w &= (\phi_P - \phi_W) / \Delta x_{WP}, \\ (\text{grad } \phi)_n &= (\phi_N - \phi_P) / \Delta y_{PN}, & (\text{grad } \phi)_s &= (\phi_P - \phi_S) / \Delta y_{SP}. \end{aligned} \quad (23)$$

Desarrollando entonces la forma general para la ecuación discreta 2D, resulta

$$[a_w + a_e + a_s + a_n + \Delta(\text{FA}) + b_p] \phi_P = a_w \phi_W + a_e \phi_E + a_s \phi_S + a_n \phi_N + b_u, \quad (24)$$

con

$$\begin{aligned} b_p &= -s_p^\phi + \rho_p \Delta V / \Delta t, \\ b_u &= s_c^\phi + \rho_p^0 \phi_P^0 \Delta V / \Delta t, \\ s_{\phi_P}^\phi &\cong s_c^\phi + s_p^\phi \phi_P, \end{aligned} \quad (25)$$

y los coeficientes a_i dados en forma estándar, en función del número de Peclet de grilla, Pe ,

$$\begin{aligned} a_w &= [c_w^W + 1/Pe_w] F_w A_w, & a_e &= [-c_e^E + 1/Pe_e] F_e A_e, \\ a_s &= [c_s^S + 1/Pe_s] F_s A_s, & a_n &= [-c_n^N + 1/Pe_n] F_n A_n, \end{aligned} \quad (26)$$

con

$$\begin{aligned} D_e &= \Gamma_e / \Delta x_{PE}, & D_w &= \Gamma_w / \Delta x_{WP}, \\ D_n &= \Gamma_n / \Delta y_{PN}, & D_s &= \Gamma_s / \Delta y_{SP}. \end{aligned} \quad (27)$$

2.4 Pesos - *modified upwind*

Con esta elección, se considera el valor representativo del escalar en la frontera dependiendo de que el Peclet de grilla sea en módulo inferior o superior a 2 (ya sea en el caso de diferencias centrales o en el correspondiente al caso del transporte *upwind*). Por ejemplo, los coeficientes este y oeste toman la forma

$$c_e^E = \begin{cases} 1/Pe_e, & Pe_e > +2 \\ 1/2, & -2 < Pe_e < +2 \\ 1+1/Pe_e, & Pe_e < -2 \end{cases} \quad c_e^P = \begin{cases} 1-1/Pe_e, & Pe_e > +2 \\ 1/2, & -2 < Pe_e < +2 \\ -1/Pe_e, & Pe_e < -2 \end{cases} \quad (28)$$

y

$$c_w^P = \begin{cases} 1/Pe_w, & Pe_w > +2 \\ 1/2, & -2 < Pe_w < +2 \\ 1+1/Pe_w, & Pe_w < -2 \end{cases} \quad c_w^W = \begin{cases} 1-1/Pe_w, & Pe_w > +2 \\ 1/2, & -2 < Pe_w < +2 \\ -1/Pe_w, & Pe_w < -2 \end{cases} \quad (29)$$

Luego,

$$a_w = \begin{cases} +F_w A_w, & Pe_w > +2 \\ +(1/2)F_w A_w + D_w A_w, & -2 < Pe_w < +2 \\ 0, & Pe_w < -2 \end{cases} \quad (30)$$

$$a_E = \begin{cases} 0, & Pe_e > +2 \\ -(1/2)F_e A_e + D_e A_e, & -2 < Pe_e < +2 \\ -F_e A_e, & Pe_e < -2 \end{cases} \quad (31)$$

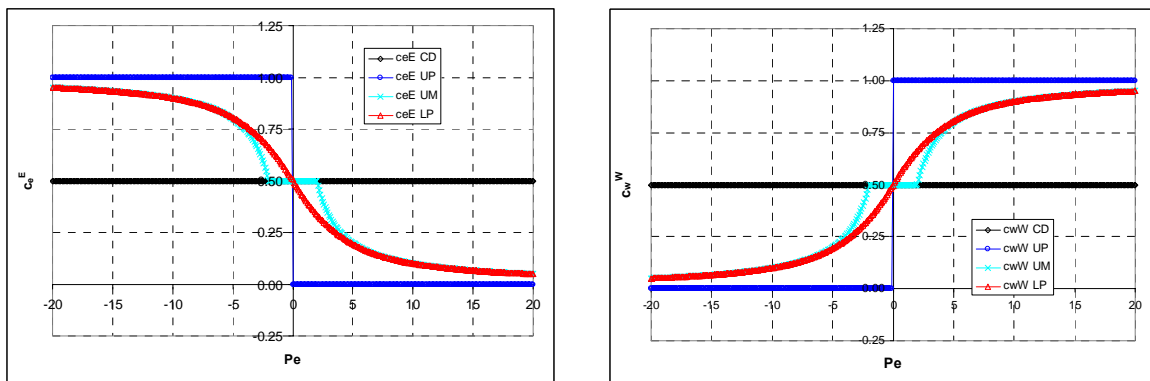


Figura 3: Coeficientes de peso para los métodos de Diferencias Centrales (CD), Upwind (UP), Upwind Modificado (UM), Ley Potencial (LP), en función del número de Peclet de grilla

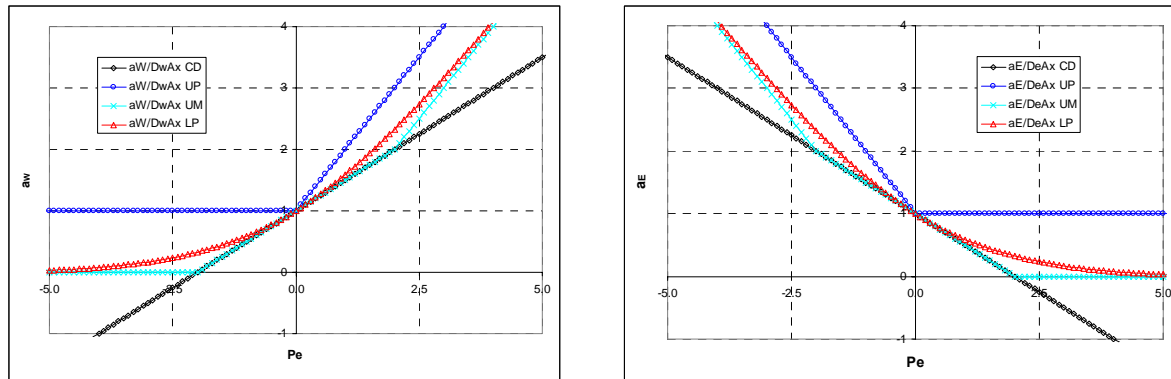


Figura 4: Coeficientes de peso para los métodos de Diferencias Centrales (CD), Upwind (UP), Upwind Modificado (UM), Ley Potencial (LP), en función del número de Peclet de grilla

En la Figura 3 se comparan los valores de los coeficientes de peso en función del Peclet. En color rojo se observa el resultado de referencia correspondiente a la ley de potencias, indistinguible en esta escala del resultado exacto. Este resultado tiende al *upwind*, en color azul, a altos valores en módulo del Peclet, rango en el que el error cometido con el *upwind* es mínimo. Sin embargo los errores de *upwind* correspondientes a Peclet moderados son importantes. Los errores son menores en todo el rango para el *modified upwind*, en color celeste, siendo de todos modos mayores también a Peclet moderados. El método de diferencias centrales, en color negro, es aproximado únicamente para Peclet pequeños, y se aparta rápidamente del resultado correcto al crecer el Peclet en módulo. En la Figura 4 se comparan los valores de los coeficientes a_i en función del Peclet.

2.5 Discretización de la ecuación de gobierno 2D en el caso incompresible newtoniano

Según los lineamientos detallados, y considerando como fuerza volumétrica sólo la debida a la gravedad, el sistema a resolver para las velocidades es, en sus respectivos elementos de volumen,

$$a_p^{u_x} u_{x,p} = a_w^{u_x} u_{x,w} + a_E^{u_x} u_{x,E} + a_S^{u_x} u_{x,S} + a_N^{u_x} u_{x,N} + b_u^{u_x} - p_e^{u_x} A_e^{u_x} + p_w^{u_x} A_w^{u_x}, \quad (32)$$

siendo

$$a_p^{u_x} = a_w^{u_x} + a_E^{u_x} + a_S^{u_x} + a_N^{u_x} + b_p^{u_x} \quad (33)$$

$$b_p^{u_x} = -\sigma_p^{u_x} + \rho_p \Delta V / \Delta t,$$

$$b_u^{u_x} = +\sigma_C^{u_x} + \rho_p^0 u_{x,p}^0 \Delta V / \Delta t + f_x \Delta V,$$

junto con

$$a_p^{u_y} u_{y,p} = a_w^{u_y} u_{y,w} + a_e^{u_y} u_{y,e} + a_s^{u_y} u_{y,s} + a_n^{u_y} u_{y,n} + b_u^{u_y} - p_n^{u_y} A_n^{u_y} + p_s^{u_y} A_s^{u_y}, \quad (34)$$

siendo

$$\begin{aligned} a_p^{u_y} &= a_w^{u_y} + a_e^{u_y} + a_s^{u_y} + a_n^{u_y} + b_p^{u_y} \\ b_p^{u_y} &= -\sigma_p^{u_y} + \rho_p \Delta V / \Delta t, \\ b_u^{u_y} &= +\sigma_c^{u_y} + \rho_p^0 u_{y,p}^0 \Delta V / \Delta t + f_y \Delta V, \end{aligned} \quad (35)$$

donde

$$\sigma_p^{u_x} = 0, \quad \sigma_p^{u_y} = 0, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \sigma_c^{u_x} &= \frac{\mu_e - \mu_w}{\Delta x_{ew}} \frac{u_{x,e} - u_{x,w}}{\Delta x_{ew}} + \frac{\mu_n - \mu_s}{\Delta y_{ns}} \frac{u_{y,e} - u_{y,w}}{\Delta x_{ew}}, \\ \sigma_c^{u_y} &= \frac{\mu_e - \mu_w}{\Delta x_{ew}} \frac{u_{x,n} - u_{x,s}}{\Delta y_{ns}} + \frac{\mu_n - \mu_s}{\Delta y_{ns}} \frac{u_{y,n} - u_{y,s}}{\Delta y_{ns}}. \end{aligned} \quad (37)$$

2.6 SIMPLE – *Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations*

El método SIMPLE, desarrollado por Patankar y Spalding, utiliza la ecuación de transporte de masa como la condición autoconsistente que debe cumplir el campo de presiones acoplado con el de velocidades^{3,4,5}, según el siguiente algoritmo:

- 1) estimar un campo de presiones aproximadas p^* ,
- 2) calcular el campo de velocidades aproximado u_x^* , u_y^* ,
- 3) calcular la corrección de presión p' ,
- 4) corregir presión con relajación,
- 5) corregir velocidades con relajación,
- 6) resolver otras ecuaciones de transporte, si corresponde,
- 7) evaluar el criterio de convergencia adoptado e iterar en caso de no haberse alcanzado la convergencia requerida.

La ecuación de corrección de la presión del método simple se obtiene de las ecuaciones presentadas en el apartado anterior. De la diferencia entre estas expresiones evaluadas en los campos solución y en campos aproximados correspondientes a una dada instancia del proceso de resolución iterativo, se obtiene

$$\begin{aligned} a_p^{u_x} u'_{x,p} &\approx \sum_{i=W,E,S,N} a_i^{u_x} u'_{x,i} - p'_e A_e^{u_x} + p'_w A_w^{u_x}, \\ a_p^{u_y} u'_{y,p} &\approx \sum_{i=W,E,S,N} a_i^{u_y} u'_{y,i} - p'_n A_n^{u_y} + p'_s A_s^{u_y}, \end{aligned} \quad (38)$$

y de allí, despreciando la sumatoria, se obtiene el SIMPLE, resultando la aproximación

$$\begin{aligned} a_p^{u_x} u'_{x,p}{}^{u_x} &\sim -p'_e{}^{u_x} A_e{}^{u_x} + p'_w{}^{u_x} A_w{}^{u_x}, \\ a_p^{u_y} u'_{y,p}{}^{u_y} &\sim -p'_n{}^{u_y} A_n{}^{u_y} + p'_s{}^{u_y} A_s{}^{u_y}. \end{aligned} \quad (39)$$

Planteando la misma diferencia entre expresiones evaluadas en los campos solución y expresiones evaluadas en el campo aproximado, se obtiene con estas últimas dos fórmulas una ecuación para la presión

$$a_p{}^p p'_p = a_E{}^p p'_E + a_W{}^p p'_W + a_N{}^p p'_N + a_S{}^p p'_S + b^p, \quad (40)$$

con

$$\begin{aligned} a_E{}^p &= \rho_e A_p{}^{u_x} A_e{}^p / a_{p,e}{}^{u_x}, & a_W{}^p &= \rho_w A_p{}^{u_x} A_w{}^p / a_{p,w}{}^{u_x}, \\ a_N{}^p &= \rho_n A_p{}^{u_y} A_n{}^p / a_{p,n}{}^{u_y}, & a_S{}^p &= \rho_s A_p{}^{u_y} A_s{}^p / a_{p,s}{}^{u_y}, \\ a_p{}^p &= a_E{}^p + a_W{}^p + a_N{}^p + a_S{}^p + b_u{}^p, \\ b_u{}^p &= -\text{div}(\rho \tilde{u})^p \Delta V^p. \end{aligned} \quad (41)$$

Esta ecuación se resuelve con condiciones de frontera para la corrección de presión. Cuando en la frontera se conoce las componentes de las velocidades, la corrección de velocidad es nula, lo cual elimina la contribución a los dos coeficientes asociados a la velocidad perpendicular a la frontera, y de esta manera la vinculación con nodos externos al dominio. No se han considerado, por ahora, condiciones de frontera de otro tipo.

La solución para la corrección de presión está afectada de una constante arbitraria. Esto se debe a que sus ecuaciones no son todas independientes, lo que se demuestra sumando todas las ecuaciones de conservación de masa de cada elemento, lo que da por resultado la conservación de masa total. De allí que una cualquiera de las ecuaciones puede escribirse en términos de la de conservación de masa y el resto de las ecuaciones. Al momento de realizar la corrección de velocidades, la corrección de presión se aplica en diferencias, por lo que esta constante arbitraria no tiene influencia. Para imponer un sistema compatible determinado se adopta el criterio de fijar en cero el valor de la corrección de presión para una de las variables de corrección de presión a resolver.

3 VALIDACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

En la Figura 5 se muestran los gráficos de convergencia típicos de las corridas numéricas realizadas. Para cada juego de geometría y parámetros de fluido resulta necesario ajustar los mejores parámetros de sub-relajación de velocidad y presión, que típicamente se mueven en el rango y $[0,20 - 0,50]$ para las componentes de velocidad y $[0,05 - 0,20]$ para la presión.

La metodología utilizada ha sido validada comparando parte de los resultados contra los presentados por Vradis y VanNostrand⁶, Chiang y Sheu⁷ y Armaly et al⁸. En el primer caso, se observa en la Figura 6 un acuerdo cualitativo entre los valores reportados por Vradis y VanNostrand⁶ para una relación $r = h/H = 1/2$, no así para el caso $r = 1/3$, para el que debe

investigarse la posibilidad de trabajar con dominios aún más extendidos. Por su parte, el número de Reynolds está definido utilizando como velocidad característica la velocidad media en la estación $x = -1$, y como longitud característica la distancia h .

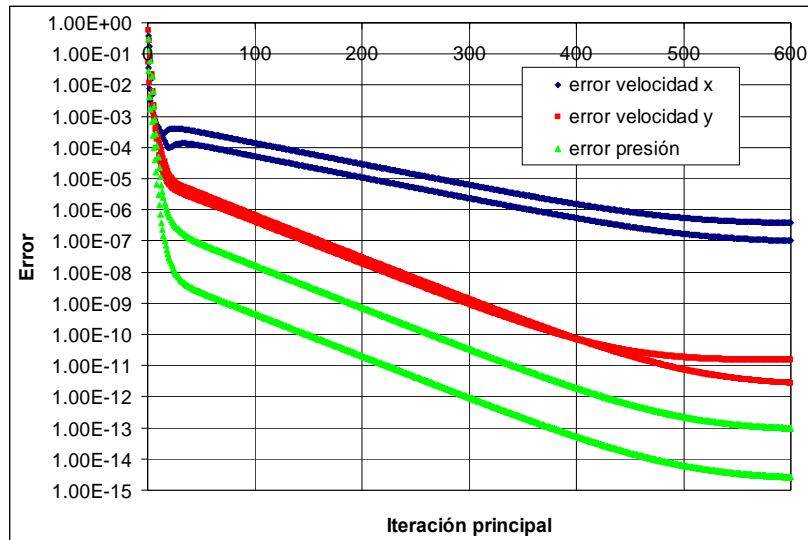


Figura 5: Gráfico de convergencia típico

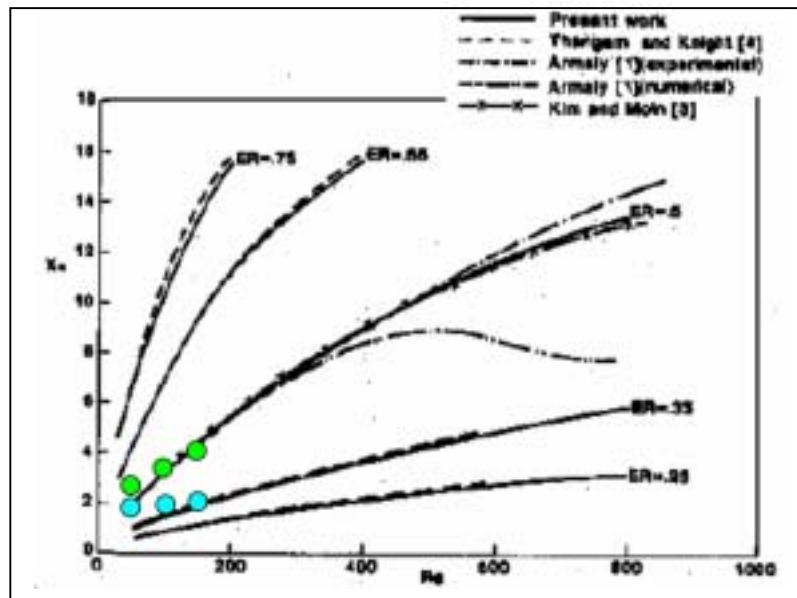


Figura 6: Comparación entre la longitud de readherencia calculada para los casos $r = 1/2$ en verde y $r = 1/3$ en celeste, con los resultados reportados por Vradis y VanNostrand⁶. Fluido newtoniano.

En la Figura 7 se contrastan los perfiles de velocidad correspondientes a $Re = 100$ para una relación $r = 1/2$, siendo $n = 1$, con los reportados Chiang y Sheu⁷, si bien estos últimos corresponden a $r \sim 0,52$. Se observa una pequeña diferencia cualitativa, por cuanto los perfiles obtenidos en este trabajo parecen tener mayor asimetría en la sección de expansión. En este sentido, se comparan mejor con los reportados en el trabajo original de Armaly et al⁸.

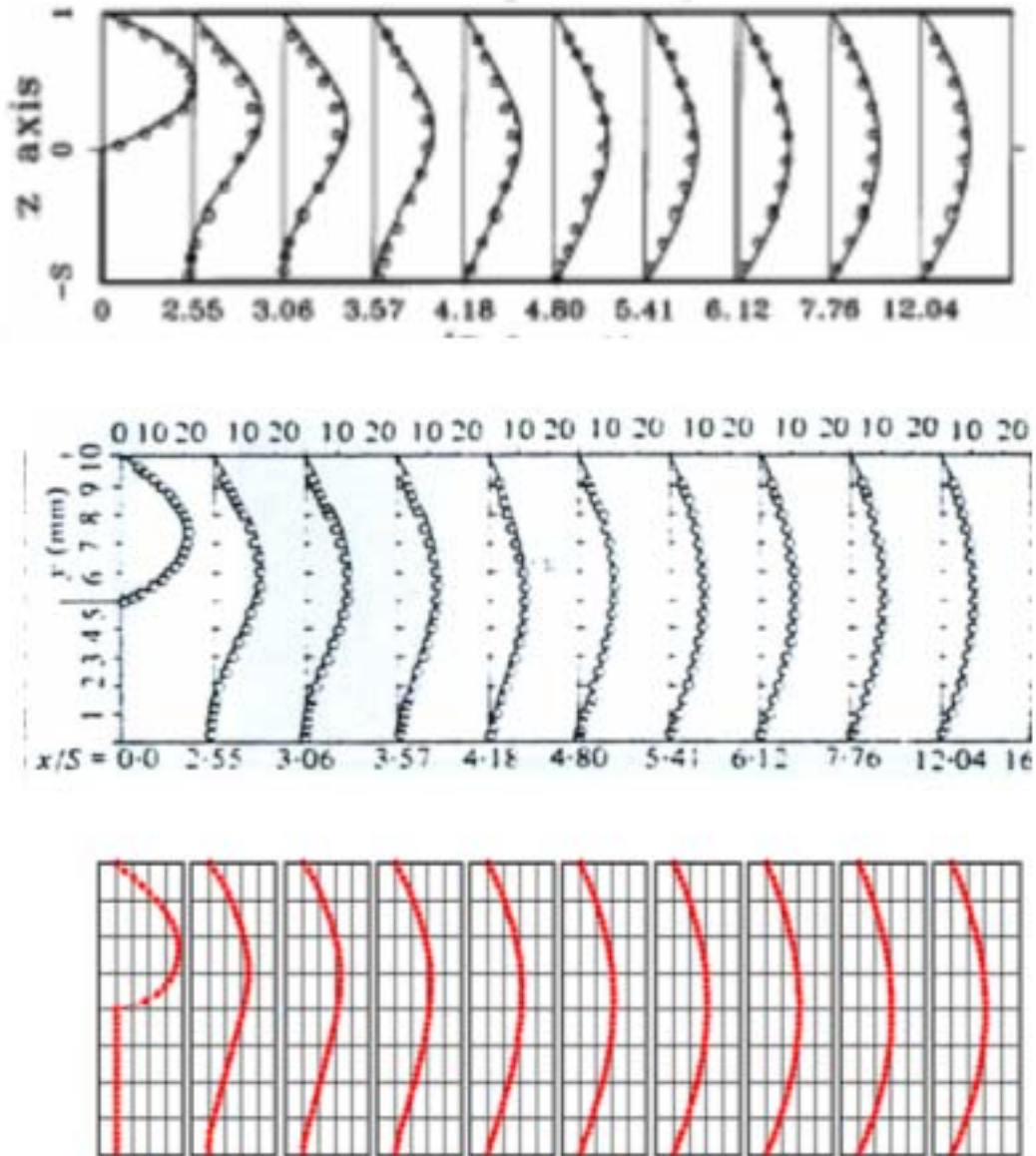


Figura 7: Comparación de perfiles, para $Re = 100$ y $r = 1/2$, entre los reportados por Chiang y Sheu⁷, Armaly et al⁸ y el presente trabajo, ordenados desde arriba hacia abajo. Fluido newtoniano.

Como criterio adicional relativo a la longitud del dominio necesaria para evitar efectos de borde en $x = L$, se verifica además que a la entrada y a la salida del dominio, el gradiente de presión corresponda al del flujo totalmente desarrollado, el cual puede calcularse analíticamente. Se observa en la Figura 8 la aplicación del criterio en cuestión al caso $r = \frac{1}{2}$, en la sección superior para un fluido newtoniano ($n = 1$), y en la sección inferior para un fluido no newtoniano, con exponente de la ley de la potencia $n = 0,75$.

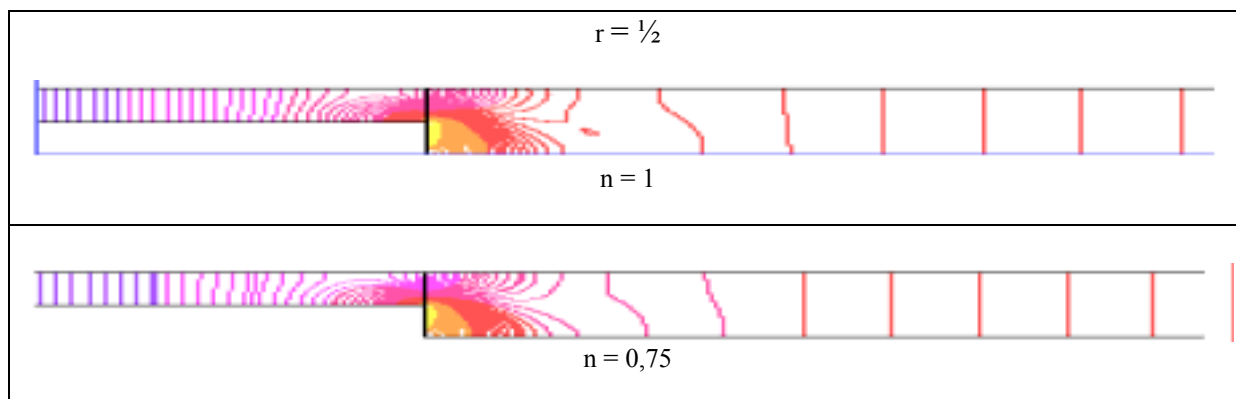


Figura 8: Verificación de flujo desarrollado en el comportamiento de la distribución de la presión, para el caso $n = 1$ de un fluido newtoniano y para el caso $n = 0,75$ de un fluido no newtoniano, siendo $r = \frac{1}{2}$.
Curvas de nivel cada 0,3 mPa.

El rango seleccionado para el número de Reynolds es relativamente bajo, no superior a $Re = 200$. Se trabaja con una altura de la sección de entrada $h = 1$ cm, y con longitudes de las secciones de entrada y salida tales que no se observe sensibilidad de los resultados frente a mayores extensiones del dominio. Típicamente, esto significa trabajar en el rango [5-10] y [12-100] para las relaciones de longitud l/h y L/h correspondientes a la primera y segunda secciones del dominio, respectivamente. La discretización utilizada fue homogénea en las direcciones x e y , de tomando valores de paso 0.1, 0.05, 0.025. La velocidad máxima en el perfil de entrada se eligió en el rango [0.5, 1.5] cm/s, en tanto que para densidades y viscosidades se trabajó en el orden de 1 g/cm^3 y 1 cp, respectivamente. En el caso no newtoniano se trabajó con exponente $n = 0,75$, intermedio entre los que se pueden encontrar en fluidos de la industria del petróleo. El número de Re del problema se define en relación con la viscosidad absoluta si el fluido es newtoniano y con la aparente si el fluido es no-newtoniano.

En la Figura 9 se muestran los perfiles de la componente de la velocidad horizontal, para el caso $Re = 100$, siendo $r = 1/2$ para $n = 1$ y $n = 0,75$. Se observa que el caso $n = 0,75$ no difiere cualitativamente del resultado newtoniano, si bien se muestran los diferentes perfiles próximos a la discontinuidad, resultado de los diferentes índices n . Se detalla, en cada caso, la transición del perfil correspondiente al flujo desarrollado en la sección de entrada al flujo desarrollado en la sección de salida. En la sección en que se produce la expansión, el perfil no es ya simétrico. Se observa también claramente la recirculación.

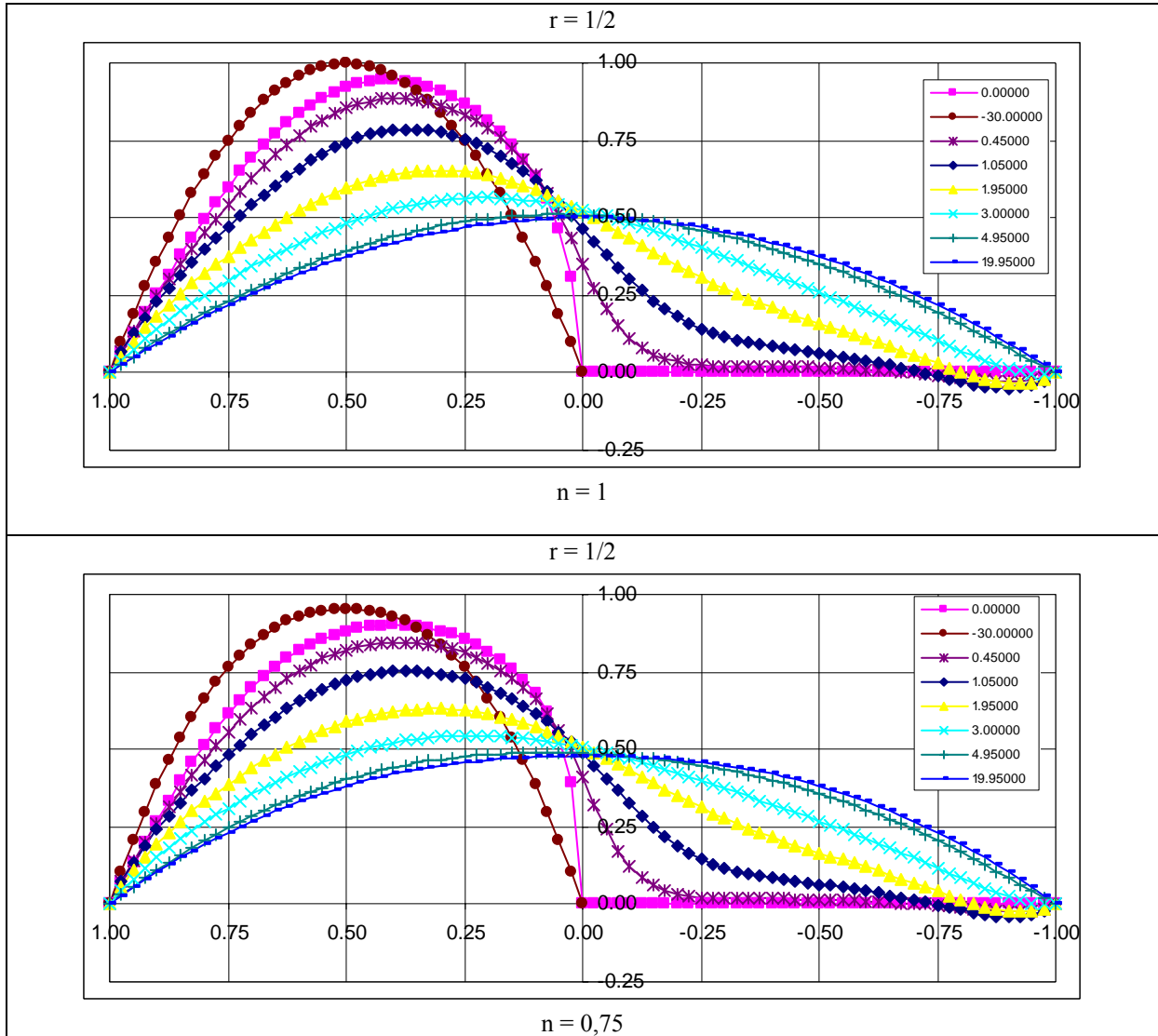


Figura 9: Perfiles de la componente horizontal de la velocidad (en cm/s) para la transición entre los regímenes de flujo desarrollados de entrada y salida, para $Re = 100$, $n = 1$, $r = \frac{1}{2}$. Distancias en cm.

En las Figuras 10 y 11 se muestran las curvas de variaciones de presión sobre las caras superior e inferior del dominio, para $Re = 100$, $n = 1$ y $n = 0,75$, siendo $r = \frac{1}{2}$. La Figura 11 corresponde a un detalle de la Figura 10, dado que se ha considerado solamente la porción de dominio comprendida entre $-5 \text{ cm} \leq x \leq 5 \text{ cm}$. Se observa la tendencia al establecimiento de un gradiente de presiones constante, el cual se corresponde con los flujos desarrollados en la entrada ($-10 \text{ cm} \leq x < -5 \text{ cm}$) y hacia la salida ($x > 15 \text{ cm}$).

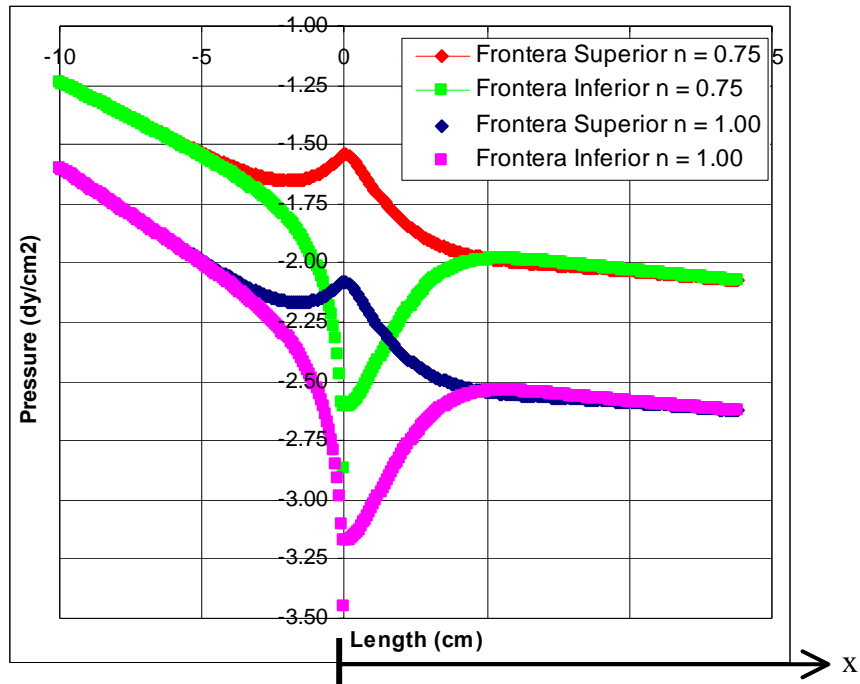


Figura 10: Distribuciones de presión a lo largo de las caras superior e inferior del dominio, para $Re = 100$, $n = 1$ y $n = 0,75$; $r = \frac{1}{2}$. Se observa flujo desarrollado en entrada y salida. $-10 \text{ cm} < x < 15 \text{ cm}$.

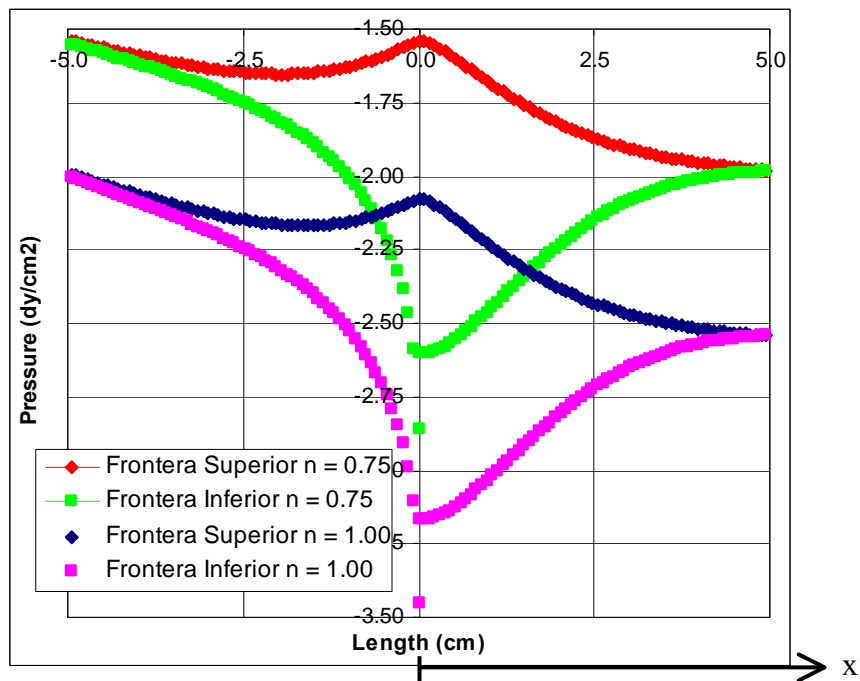


Figura 11: Distribuciones de presión a lo largo de las caras superior e inferior del dominio, para $Re = 100$, $n = 1$ y $n = 0,75$; $r = \frac{1}{2}$. Detalle de la Figura 10, siendo $-5 \text{ cm} < x < 5 \text{ cm}$

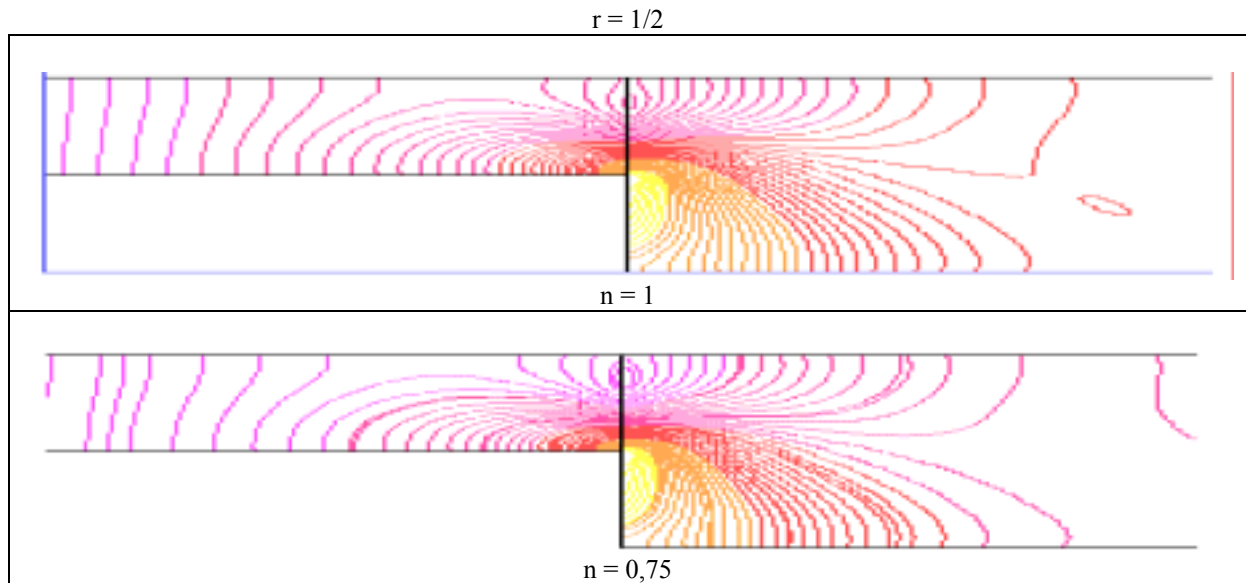


Figura 12: Comportamiento de la presión, para el caso $n = 1$ de un fluido newtoniano y para el caso $n = 0,75$ de un fluido no newtoniano, $r = 1/2$. Curvas de nivel cada 0,3 mPa. Detalle en proximidad de la expansión.

Las curvas de nivel de la presión en las Figuras 8 y en su detalle de la Figura 12 para los casos $n = 1$ y $n = 0,75$ coinciden cualitativamente con lo reportado en la literatura⁹.

En la Figura 13 se caracteriza cualitativamente la recirculación con las curvas de nivel del módulo de la velocidad correspondientes al caso newtoniano, cuya diferencia con el no newtoniano $n = 0,75$ no se aprecia en esta escala.

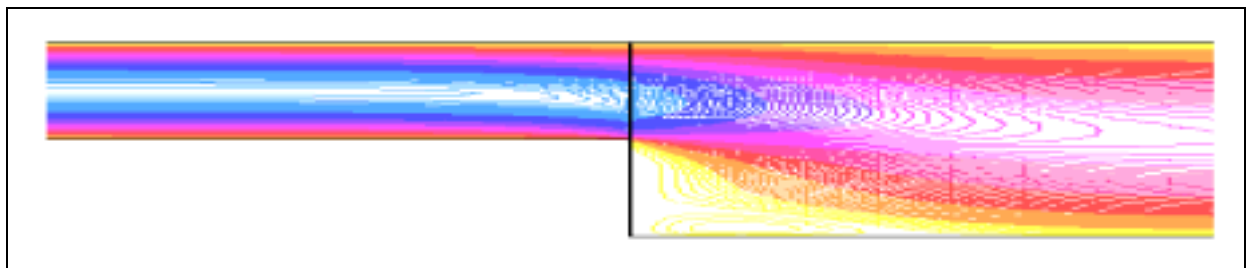


Figura 13: Curvas de nivel de módulo de velocidad para el caso $Re = 100$ de un fluido newtoniano, $r = 1/2$. Separación entre curvas de 0,01 cm/s. Detalle en proximidad de la expansión.

La diferencia debido al comportamiento con el índice de la ley de la potencia se visualiza mejor en el detalle de la Figura 14. En el caso presentado correspondiente a $Re = 100$, el comportamiento no newtoniano disminuye la extensión de la región de recirculación, resultado que se muestra en la Tabla 1.

r = 1/2		
Re = 100	n = 1	n = 0,75
RL [cm]	3,3	3,0

Tabla 1: Longitud de readherencia, RL; comparación para Re = 100, r = 1/2, entre los casos n = 1 y n = 0,75.

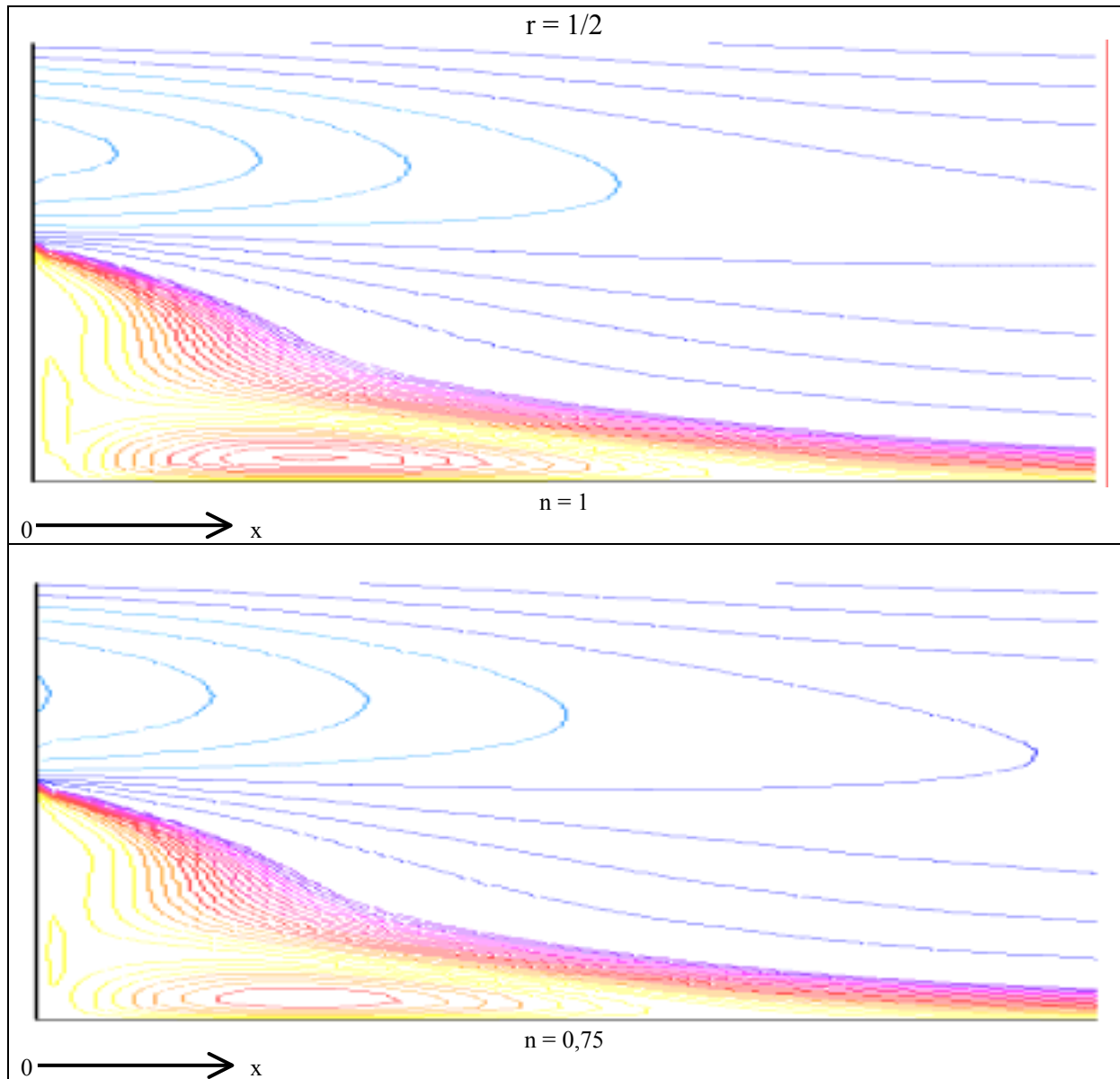


Figura 14: Curvas de nivel para el módulo de velocidad, para el caso Re = 100, r = 1/2, n = 1 y n = 0,75. Curvas de nivel cada 0,1 cm/s entre 0,1 y 1,0 cm/s, y curvas de nivel cada 0,005 cm/s entre 0,0 y 0,1 cm/s.

4 CONCLUSIONES

Se ha presentado la metodología utilizada para la simulación del flujo de fluidos no newtonianos que verifican la denominada ley de la potencia, mediante la técnica de volúmenes finitos implementada a través del algoritmo SIMPLE, y su aplicación a problemas en un rango de bajos números de Reynolds ($Re < 200$). La metodología se ha validado comparando los resultados obtenidos en el caso particular en que el índice de la potencia es la unidad, significando que el fluido es newtoniano. Para el índice utilizado ($n = 0,75$), los resultados obtenidos no difieren sensiblemente de los correspondientes al caso newtoniano ($n = 1$). La consistencia en los resultados preliminares obtenidos en perfiles de velocidades y curvas de nivel de presión y velocidad permite avanzar a situaciones más complejas^{10,11}. Resulta asimismo necesario analizar el comportamiento de estos fluidos a mayores números de Reynolds, en dominios suficientemente extensos, para observar la posible presencia de recirculaciones adicionales a la que tiene lugar en la propia expansión.

5 REFERENCIAS

- [1] I.M. El-Gamal and E.A.M. Gad, “Low Temperature Rheological Behavior of Umbarka Waxy Crude and Influence of Flow Improver”, *Revue de L’Institut Français du Pétrole*, **52**, N° 3, 369-379 (1997).
- [2] A.J. Brydson A.J., *Flow Properties of Polymer Melts*, Van Nostrand Reinhold Co., New York, NY 10001, pp. 1-20 (1970).
- [3] S.V. Patankar, *Numerical heat transfer and fluid flow*, McGraw Hill (1980).
- [4] H.K. Versteeg and W. Malalasekerea, *An introduction to computational fluid dynamics – The finite volume method*, John Wiley & Sons (1995).
- [5] D.A. Anderson, J.C. Tannehill and R.H. Pletcher, *Computational fluid mechanics and heat transfer*, McGraw Hill (1984).
- [6] G.C. Vradis and L. VanNostrand, “Laminar Coupled Flow Downstream of an Asymmetric Sudden Expansion”, *J. Thermophysics and Heat Transfer*, **6**, 288-295 (1992).
- [7] T.P. Chiang and T.W.H. Sheu, “A numerical revisit of backward-facing step flow problem”, *Physics of fluids*, **11**, 862-874 (1999).
- [8] B.F. Armaly, F. Durst, J.C.F. Pereira and B. Schönung, “Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow”, *J. Fluid Mech.*, **127**, 473-496 (1983).
- [9] B. Ramaswamy, T.C. Jue, A.J. Mead and J.E. Akin, “Computation of Complex Fluid Flows Using a Semi-Implicit Finite Element Method”, *Recent Advances and Applications in Computational Fluid Dynamics*, O Baysal (editor) ASME FED - Vol. 103, pp. 31-42 (1990).
- [10] P. Neofytou and D. Drikakis, “Non-Newtonian flow instability in a channel with a sudden expansion”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **111**, 127-150 (2003).
- [11] R. Manica and A.L. De Bortoli, “Simulation of sudden expansion flows for power-law fluids”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **121**, 35-40 (2004).