

ESTUDIO DEL ESPECTRO MULTIFRACTAL DE UNA SEÑAL NO ESTACIONARIA CON “MULTIFRACTAL DETRENDED FLUCTUATION ANALYSIS (MFDFA)”

Mariel Rosenblatt^a y Alejandra Figliola^b

*Instituto de Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento,
J.M. Gutiérrez 1150, (1613) Los Polvorines, Buenos Aires, Argentina,*

^a mrosen@ungs.edu.ar

^b afigliol@ungs.edu.ar

Palabras Claves: Regularidad Hölder, Espectro Multifractal, EEG, sueño.

Resumen. Uno de los elementos que caracteriza la regularidad puntual de una función localmente acotada es el exponente Hölder α de cada punto, $0 \leq \alpha \leq +\infty$, el cual capta la irregularidad -rugosidad- del gráfico de la función en los puntos donde aparecen singularidades, siendo más irregular cuanto menor sea el valor del exponente. Asimismo describe la regularidad -suavidad- en puntos no singulares, siendo más regular cuanto mayor sea el valor del exponente.

Los fenómenos naturales suelen tener comportamientos complejos y presentar características multifractales, es decir, las funciones que los modelizan están caracterizadas por diferentes exponentes Hölder, que además pueden fluctuar punto a punto. También casi todo punto suele ser singular, por lo que el análisis multifractal global permite conocer la estructura de estas singularidades. Éste análisis describe la distribución de los diferentes exponentes Hölder α de una función mediante el cálculo del espectro multifractal, que asocia a cada α la dimensión de Hausdorff del conjunto de puntos donde la función tiene regularidad puntual de exponente Hölder α . Diferentes métodos basados en el Análisis Wavelet han sido propuestos para el cálculo del espectro multifractal, siendo los más relevantes el Wavelet Transform Modulo Maxima (WTMM) y el de Wavelet Leader (WL). Otro de los métodos propuestos, no basado en wavelets, es el MFDFA, que construye funciones de fluctuación, a partir de los datos numéricos globales de la señal.

El trabajo consiste en la descripción del método MFDFA, la aplicación a una señal de un electroencefalograma (EEG) realizado durante el sueño humano y su caracterización de los diferentes estadios del sueño humano mediante el cálculo del espectro multifractal en cada fase del sueño.

A partir de los resultados obtenidos con este método, se proponen tres diferentes cuantificadores correspondientes a los exponentes Hölder y al espectro multifractal que muestran la correlación en la evolución temporal de dichos cuantificadores con el correspondiente hipnograma.

1 INTRODUCCION

En los últimos años se ha incrementado la evidencia experimental de que los sistemas complejos presentan ciertos “principios organizativos”, los que aparecen en fenómenos muy dispares entre sí, como los pertenecientes a la física, la ecología, la biología o la economía. Según Stanley, estos principios se pueden agrupar en dos grandes categorías: la invariancia escalar y la universalidad (Stanley et al., 2000).

El primero de estos principios considera que los sistemas complejos suelen tener una organización jerárquica cuya manifestación se modela a través de una ley de potencia de alguna variable relevante del problema. Entre los muchos ejemplos existentes podemos citar la invariancia del ritmo cardíaco humano o de la intensidad sísmica (Ashkenazy, 2001; Telesca et al., 2005). El exponente de esta ley de potencia resulta una magnitud que caracteriza al sistema.

La universalidad se entiende como la tendencia que tienen los conjuntos de exponentes provenientes de diferentes sistemas a agruparse en diferentes “clases de universalidad”. El hecho de que todos los sistemas que caen en la misma clase de universalidad tienen el mismo exponente sugiere la existencia de similares mecanismos microscópicos responsables del comportamiento de invariancia de escala. En resumen, de la bibliografía existente, se puede concluir que muchos autores consideran que la universalidad se refiere a comportamientos microscópicos que se manifiestan macroscópicamente en la ley de potencia.

Estos conceptos actuales pueden rastrearse en los trabajos de Kolmogorov de los principios de la década de 1940, cuando se encontraba estudiando el fenómeno de la turbulencia. Con una notable intuición, Kolmogorov propone que en el caso de la turbulencia totalmente desarrollada-con vórtices de diferentes escalas que interactúan entre sí- la energía de la disipación se transmite a través de los vórtices más grandes a los más pequeños a través de una ley de potencia cuya base es la dimensión característica del vórtice y el exponente de dicha función define características propias del sistema (Kolmogorov, 1941). En estas ideas se halla el origen de lo que actualmente se conoce como *formalismo* o *análisis multifractal*.

Los principios organizativos de los sistemas complejos pueden ser cuantificados a través de este formalismo, pues proporciona un mecanismo de invariancia escalar para el análisis y la generación de señales complejas. Esencialmente se basa en el cálculo de dos conjuntos de números o funciones asociadas a la señal: los exponentes Hölder, que cuantifican la regularidad; y el espectro multifractal, que cuantifica la multifractalidad.

El análisis multifractal describe la distribución de los diferentes exponentes Hölder α de una función mediante el cálculo del espectro multifractal, que asocia a cada α la dimensión de Hausdorff del conjunto de puntos donde la función tiene regularidad puntual de exponente Hölder α . Recordemos que la regularidad puntual de una función localmente acotada está caracterizada por el exponente Hölder α de cada punto, $0 \leq \alpha \leq +\infty$, que es un parámetro que capta la rugosidad o suavidad de una función en cada punto (Jaffard, 1997; Mallat, 1999).

Existen diversas metodologías para el cálculo del espectro multifractal. La primera que apareció consiste en el cálculo de la dimensión de Hausdorff en los casos en que es posible o, más simplemente, en el cálculo de la dimensión de capacidad, que fue introducida por Kolmogorov en 1958 y que es muchísimo más simple de calcular en términos numéricos. Consiste en generar una cobertura del sistema con bolas de tamaño ε y medir la densidad de dicha cobertura. Este método se conoce como “box counting” y estima en cuanto varía el tamaño del conjunto como función de la variación de la unidad de medida (Falconer, 1997).

Al comienzo de la década de los noventa, Arneodo y sus colaboradores propusieron calcular el espectro multifractal de manera estadística con el método basado en el estudio de

los máximos de la transformada wavelet continua del sistema, que se conoce como *Wavelet Transform Modulo Maxima* (WTMM) (Muzy et al., 1991; Arneodo et al., 1995).

Otro de los métodos propuestos, no basado en análisis wavelet, es el *Multifractal Detrended Fluctuation Analysis* (MFDFA). A mediados de los noventa Peng, desarrolló el *Detrended Fluctuation Analysis* (DFA) (Peng et al., 1995) que resultó ser una técnica de amplio uso para la detección de propiedades de escala con comportamiento fractal de series temporales no estacionarias. El DFA tuvo gran suceso en la aplicación a diferentes campos tales como secuencias de DNA, señales asociadas a variables económicas o a la física del estado sólido. Años más tarde, Kantelhart y Stanley extendieron este algoritmo para series temporales con comportamiento multifractal, desarrollando el MFDFA (Kantelhard et al., 2002). Estos dos métodos están bien probados, en principio, para el caso de medidas μ de Borel no negativas, singulares y de soporte acotado. Esto incluye el caso de aquellas cuyo soporte es un conjunto de Cantor generalizado. En estos casos, se puede definir una función de partición cuya naturaleza depende del método, y a partir de ella, construir el correspondiente formalismo multifractal que permite analizar la regularidad Hölder de funciones que integran dichas medidas.

Tanto el WTMM como el MFDFA han demostrado experimentalmente su eficacia al caracterizar estadísticamente sistemas tales como cardíacos, sísmicos, económicos, etc. (Kantelhard et al., 2002; Telesca et al., 2005, Ashkenazy, 2001), aunque la extensión de estos métodos a casos más generales es un problema en desarrollo y abierto en el estado actual. Un buen trabajo de comparación entre ambos métodos es el de Oświecimka et al., 2006.

En los últimos años, Stephane Jaffard (Jaffard, 2004) ha propuesto otra metodología, que se la conoce como *Wavelet Leaders* (WL), para la caracterización de los exponentes Hölder y de su relación con la regularidad Hölder y las oscilaciones locales. Jaffard presentó una nueva formulación en términos del supremo local de los coeficientes wavelet, al que llamó “wavelet leader”. Este método ha demostrado su superioridad frente al MFDFA y al WTMM en el caso de la presencia de singularidades oscilantes, aunque la implementación y el cálculo computacional resultan más trabajosos.

Finalmente, podemos mencionar que en una línea totalmente diferente a las descritas han aparecido en el año 2006 nuevos métodos numéricos para la estimación del espectro multifractal (Turiel et al., 2006). En cuanto a la estimación de los exponentes de la regularidad local, existen numerosos trabajos de estimación para el caso de señales naturales, como puede ser el del caso de la estimación de la variación de los exponentes Hölder del flujo de tráfico vehicular (Shang et al., 2006).

En este trabajo aplicaremos el método MFDFA a una señal de un EEG realizado durante el sueño humano con el fin de calcular el espectro multifractal en cada fase del sueño.

El sueño humano posee cinco estados de profundidad diferente, 4 estadios de sueño sin movimientos oculares rápidos (No REM) y un sueño con movimientos oculares rápidos (REM). Para realizar este estadiaje se miden diferentes variables fisiológicas, siendo el parámetro fundamental el registro de la actividad electroencefalográfica (Rechtschaffen y Kales, 1968). La representación temporal de las distintas fases del sueño es el hipnograma que da una visión global de la distribución de estas fases durante el tiempo de registro y que constituye una importante herramienta para el diagnóstico. El objetivo de nuestro trabajo será caracterizar cada fase del sueño relacionando el cálculo del espectro multifractal con el registro del hipnograma.

En la sección 2 introduciremos nociones matemáticas de los exponentes Hölder y del espectro multifractal, en la sección 3 describiremos el método MFDFA y en la sección 4 mostraremos la aplicación y luego las conclusiones.

2 EXPONENTES HÖLDER Y ESPECTRO MULTIFRACTAL

2.1 Regularidad Hölder Puntual

Sean $\alpha \geq 0$ y $x_0 \in R^d$. Una función localmente acotada $f : R^d \longrightarrow R$ es $C^\alpha(x_0)$ si existe una constante $C > 0$ y un polinomio P_{x_0} de grado menor α tal que, en un entorno de x_0

$$|f(x) - P_{x_0}(x)| \leq C|x - x_0|^\alpha \quad (1)$$

En el caso $\alpha = 0$ la condición (1) es $|f(x)| \leq C$ y convenimos que al polinomio nulo le asignamos grado $-\infty$.

Luego el exponente Hölder de f en x_0 es

$$H_f(x_0) = \sup\{\alpha : f \in C^\alpha(x_0)\} \quad (2)$$

El exponente Hölder describe la suavidad o la rugosidad del gráfico de una función en cada punto. Si $f : R \longrightarrow R$ tiene exponente Hölder $H_f(x_0) = \alpha$, con $0 \leq \alpha < 1$, de la definición se puede deducir que f no es derivable en x_0 ; entonces, en este caso, el exponente capta la rugosidad que tiene el gráfico de la función en esta singularidad. Por ejemplo, si $f(x) = |x|^{1/n}$, con n un número natural, se puede ver que el exponente Hölder en $x_0 = 0$ es $\frac{1}{n}$. Es decir que, cuánto más pequeño es el exponente, más rugosa es una función en ese punto y cuánto más cerca de 1 está el exponente resulta menos rugosa.

2.2 Dimensión de Hausdorff y Espectro Multifractal

Los fenómenos naturales suelen presentar características multifractales, es decir, las funciones que los modelizan están caracterizadas por diferentes exponentes Hölder, que además pueden fluctuar punto a punto. La cuestión es entonces caracterizar al conjunto de puntos x_0 que tienen el mismo exponente Hölder puntual $H_f(x_0) = \alpha$. La dimensión de Hausdorff de este conjunto es la medición que mejor se ajusta para este propósito ya que muchas funciones multifractales suelen tener el mismo exponente Hölder puntual sobre conjuntos densos y la dimensión de Hausdorff puede ser diferente en cada conjunto denso, lo cual permite distinguirlos. Otras nociones de dimensión o medida asignan el mismo valor a los conjuntos densos, lo que hace que no sean apropiadas para describir a estos conjuntos (Falconer, 1990; Falconer, 1997). El siguiente paso es definir la dimensión de Hausdorff y el espectro multifractal.

ε -cubrimiento.

Sea $A \subset R^d$ y $\varepsilon > 0$. Decimos que $\{A_i\}_{i \in N}$ es un ε -cubrimiento de A si $\{A_i\}_{i \in N}$ es un cubrimiento de A por conjuntos acotados A_i con diámetro $|A_i| \leq \varepsilon$.

Medida de Hausdorff δ -dimensional.

Cubrimos al conjunto A con todos los ε -cubrimientos posibles. Entonces, para cada $\delta \in [0, d]$, se calcula

$$M_\varepsilon^\delta = \inf_{\varepsilon\text{-cubrimientos}} \left\{ \sum_i |A_i|^\delta \right\} \quad (3)$$

Luego se define la medida de Hausdorff δ -dimensional de A como

$$m_\delta(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\varepsilon^\delta \quad (4)$$

Dimensión de Hausdorff.

Sea $A \subset R^d$, luego existe $0 \leq \delta_0 \leq d$ tal que

$$\forall \delta < \delta_0, \quad m_\delta(A) = +\infty \quad (5)$$

$$\forall \delta > \delta_0, \quad m_\delta(A) = 0 \quad (6)$$

Entonces la dimensión de Hausdorff del conjunto A será el valor δ_0 .

Espectro Multifractal

El espectro multifractal es la función que asocia a cada α la dimensión de Hausdorff del conjunto de puntos donde la función tiene regularidad puntual de exponente Hölder α .

Es decir, si $0 \leq \alpha \leq +\infty$ y $f : R^d \longrightarrow R$,

$$d(\alpha) = \dim \{x_0 \in R^d : H_f(x_0) = \alpha\} \quad (7)$$

Para muchas funciones matemáticas el espectro multifractal $d(\alpha)$ puede determinarse a partir de la definición (Jaffard, 2004). En cambio, en funciones que modelizan fenómenos naturales, donde el exponente Hölder fluctúa punto a punto, no es posible obtenerlo en forma directa. Entonces se hace una estimación indirecta a través de una fórmula llamada formalismo multifractal (Jaffard, 1997); que computa valores globales de la función. Esta fórmula tiene variantes que dependen del espacio de funciones al que pertenece la función a estudiar. En este caso supondremos que las funciones tienen características auto-similares. Una función f tiene características auto-similares si existen subconjuntos disjuntos donde el gráfico de la función restringido a cada uno de estos subconjuntos es una transformación afín de f .

3 EL METODO MFDFA

Muchas señales presentan características de “autosimilaridad”, es decir, que tienen propiedades similares en todas las escalas. Normalmente, la autosimilaridad es correlacionada con las dimensiones fractales, esto es, la relación no entera entre la medida del dominio y la medida del gráfico. Consideremos que tenemos una medida μ con un soporte C . Podemos recubrir a este soporte con una familia de conjuntos formados por $N(s)$ cajas $B_i(s)$ cada una de lado s . La función de partición asociada con la medida y con la cobertura se define como:

$$Z(q, s) = \sum_{i=1}^{N(s)} \mu_i^q(s) \quad (8)$$

donde q es un número real y $\mu_i^q(s)$ es una función de $B_i(s)$.

Admitiendo que para $s \rightarrow 0^+$ se tiene la siguiente relación exponencial,

$$Z(q, s) \sim s^{\tau(q)} \quad (9)$$

A partir de esta relación, el formalismo multifractal usa la transformada de Legendre para relacionar el exponente de escala $\tau(q)$ con el *espectro multifractal*. Suponiendo que $\tau(q)$ es una función de concavidad negativa, la transformada de Legendre de la función $-\tau(q)$ es

$$\inf_{q \in \mathbb{R}} \{-\tau(q) + q\alpha\} \quad (10)$$

Y se puede establecer (Falconer, 1997; Jaffard, 1997) que

$$d(\alpha) = \inf_{q \in \mathbb{R}} \{-\tau(q) + q\alpha\} \quad (11)$$

Dado α , derivando $-\tau(q) + q\alpha$, se tiene que el mínimo se alcanza en un único q y esto sucede cuando

$$\alpha = \tau'(q) \quad (12)$$

Asimismo, se estima

$$d(\alpha) = q\alpha - \tau(q), \quad (13)$$

donde α es la intensidad de la singularidad o el exponente de Hölder y $d(\alpha)$ es el espectro multifractal.

Descripción del método

Supongamos que $\{x_1, \dots, x_N\}$ es una serie de tiempo equiespaciada de longitud N , que está definida sobre un soporte compacto. El algoritmo se basa en cinco pasos:

1. Se determina el “perfil”
Para $i = 1, \dots, N$ se define

$$Y(i) \equiv \sum_{k=1}^i (x_k - \langle x \rangle) \quad (14)$$

donde $\langle x \rangle$ es el promedio de la serie, es decir

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \quad (15)$$

2. Se divide el perfil $Y(i)$ sobre $N_s \equiv \text{int}(N/s)$ segmentos no solapados de igual longitud entera s .

- Se calcula la tendencia local en los N_s segmentos ajustando los datos del perfil de cada segmento con un polinomio usando el método de cuadrados mínimos (el polinomio puede ser lineal, cuadrático o de un orden superior, en cada caso el método será MF DFA1, MF DFA2,...). Entonces, si y_ν es el polinomio que ajusta los datos $(i, Y(i))$ sobre cada segmento ν , $\nu = 1, \dots, N_s$, se eliminan las tendencias polinomiales del perfil en cada segmento ν calculando

$$Y((\nu - 1)s + i) - y_\nu((\nu - 1)s + i) \quad (16)$$

Luego se determina la varianza

$$F^2(\nu, s) \equiv \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{Y((\nu - 1)s + i) - y_\nu((\nu - 1)s + i)\}^2 \quad (17)$$

- Se promedian sobre todos los segmentos para obtener la función de q -ésimo orden de fluctuación con $q \neq 0$.

$$F_q(s) = \left\{ \frac{1}{N_s} \sum_{\nu=1}^{N_s} \{F^2(\nu, s)\}^{q/2} \right\}^{1/q} \quad (18)$$

Para $q = 0$, tomando límite cuando $q \rightarrow 0$, se define

$$F_0(s) = \exp \left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{\nu=1}^{N_s} \ln(F^2(\nu, s)) \right\} \quad (19)$$

- Se determina el comportamiento escalar de la función de fluctuación analizando los gráficos Log-Log de $F_q(s)$ versus s para cada valor de q . Si la serie presenta correlaciones con una ley de potencia, entonces

$$F_q(s) \sim s^{h(q)} \quad (20)$$

Finalmente, se obtiene la función $h(q)$ tomando logaritmo a ambos lados de la ecuación (20)

$$\log(F_q(s)) = h(q) \cdot \log(s) + c \quad (21)$$

Para series de tiempo $\{x_1, \dots, x_N\}$ estacionarias, tales que $x_k \geq 0$ y $\sum_{k=1}^N x_k = 1$ Kantelhard y sus colaboradores (Kantelhard et al., 2002) encontraron que los exponentes $h(q)$ se

relacionan con el exponente de escala $\tau(q)$ del formalismo multifractal introducido en (9).

Para estas series de tiempo el paso 3 no es necesario pues no hay que eliminar tendencias; luego la definición de varianza se simplifica a

$$F^2(\nu, s) = \{Y(\nu s) - Y((\nu - 1)s)\}^2 \quad (22)$$

Entonces, suponiendo que la longitud N de la serie es un múltiplo entero de la escala s y reemplazando en la ecuación (18) se tiene

$$F_q(s) = \left\{ \frac{s}{N} \sum_{\nu=1}^{N/s} |Y(\nu s) - Y((\nu - 1)s)|^q \right\}^{1/q} \quad (23)$$

Usando la relación (20) se obtiene

$$\sum_{\nu=1}^{N/s} |Y(\nu s) - Y((\nu - 1)s)|^q \sim s^{qh(q)-1} \quad (24)$$

Además,

$$Y(\nu s) - Y((\nu - 1)s) = \sum_{k=(\nu-1)s+1}^{\nu s} x_k = p_s(\nu) \quad (25)$$

donde $p_s(\nu)$ es la probabilidad caja en el formalismo multifractal standard.

Entonces, volviendo a la ecuación (24) tenemos que

$$\sum_{\nu=1}^{N/s} |p_s(\nu)|^q \sim s^{qh(q)-1} \quad (26)$$

Como consecuencia de las relaciones de las ecuaciones (9), (12) y (13) encontramos que

$$\tau(q) = qh(q) - 1, \quad \alpha = \tau'(q) = h(q) + qh'(q) \quad \text{y} \quad d(\alpha) = q(\alpha - h(q)) + 1 \quad (27)$$

4 APLICACION

4.1 Algunas nociones sobre la dinámica del sueño en un adulto

Los estados y las fases del sueño humano se definen según los patrones característicos que se observan mediante el EEG, el electrooculograma (EOG), una medición de los movimientos oculares, y el electromiograma de superficie (EMG) que mide la actividad de los músculos del mentón como testigos de la actividad muscular durante el sueño.

El sueño de un adulto joven normal comprende de 4 a 6 ciclos por noche. El primer ciclo comienza cuando el individuo entra en un sueño No REM pasando por los estadios 1 y 2, luego utiliza de 70 a 100 minutos para los estadios 3 y 4 de sueño profundo; a continuación el

sueño se vuelve más superficial pasando al sueño REM en el que se desarrolla la actividad onírica. Y, así sucesivamente, éste ciclo se repite a intervalos de 90 minutos aproximadamente. En la primera mitad de la noche predomina el sueño profundo, mientras que la segunda mitad da lugar al sueño más superficial de los estadios 1 y 2 y al sueño REM, éste último aumenta progresivamente su duración.

Cada estadio del sueño está caracterizado principalmente por la actividad EEG, los movimientos oculares y el tono muscular.

El estadio 1 se caracteriza por una actividad EEG con ondas con predominio de frecuencias de 2-7Hz y baja amplitud, asimismo pueden observarse ondas agudas en vertex. Además hay movimientos lentos de ojos y el tono muscular es ligeramente inferior al de la vigilia.

El estadio 2 se determina por la presencia de ondas con elementos discontinuos llamados husos o spindles, de duración de al menos medio segundo con una frecuencia de 12-14Hz, y de complejos K, que es una onda negativa aguda seguida de una componente lenta positiva de una duración de medio segundo de frecuencia de 1-4Hz (ver [Figura 2](#)).

La etapa 3 tiene un patrón de menor frecuencia y mayor amplitud que las etapas anteriores, con la aparición de ondas lentas de a lo sumo 2Hz y de amplitud, tomada pico a pico, mayor que 75uV (ver [Figura 3](#)).

El estadio 4 está compuesto en más del 50% por ondas lentas de frecuencia menor que 2Hz y amplitud mayor que 75uV; pueden ser monomorfas o tener una sobrecarga de actividad con frecuencias rápidas (ver [Figura 4](#)). En las etapas 3 y 4 el tono muscular es leve y no se registra actividad ocular.

Por último el sueño REM está caracterizado por movimientos oculares rápidos y atonía muscular mientras que las ondas cerebrales tienen frecuencias mixtas de baja amplitud; además pueden aparecer ondas con forma de dientes de sierra de 4Hz.

La polisomnografía consiste en el registro de los parámetros electrofisiológicos que definen los estados de sueño y de vigilia, es decir EEG, EOG, EMG. A partir de ella se puede construir un hipnograma que es el gráfico que resume en que estadio (REM, 1, 2, 3 o 4) está el sujeto a lo largo del período en que está dormido. Se suele hacer este estudio en una noche de sueño en condiciones normales para el paciente. El hipnograma constituye una herramienta de diagnóstico básica para la detección de los llamados “trastornos del sueño”. La “clasificación internacional de los trastornos del sueño” (*International classification of sleep disorders* o ICSD) distingue tres grandes grupos de enfermedades del sueño: disomnias (narcolepsia, síndrome de las piernas inquietas, apneas, microdespertares, etc.), parasomnias (sonambulismo, pesadillas, trastornos al despertar, parálisis del sueño, etc.) y trastornos psiquiátricos del sueño (depresión, Parkinson, epilepsias durante el sueño, trastornos degenerativos, insomnio fatal, etc.). Algunas de estas patologías, principalmente las pertenecientes al grupo de las disomnias como las apneas o los microdespertares, han aumentado su frecuencia de aparición en los últimos años, convirtiéndose en una verdadera epidemia del mundo moderno. Para profundizar acerca de la actividad EEG y la fisiología del sueño se puede consultar diversa bibliografía, e.g. ver [Amzica y Steriade \(2001\)](#); [Ganong \(1998\)](#); [Rubio Aramendi \(1999\)](#).

Las señales que analizamos fueron registradas en el sueño de un adulto varón normal de 30 años en el Laboratorio del Sueño del Hospital de Clínicas de Porto Alegre. Además se cuenta con el hipnograma de este registro, confeccionado por especialistas médicos en el estudio del sueño. Cuenta con un total de 3.522.560 datos, tomados a una frecuencia de 128Hz, en el canal C3 (Central Izquierdo), a lo largo de algo más de 7 horas y media (7 horas 38 minutos).

Finalmente, aclaramos que utilizamos el método MF DFA1 (es decir que se resta una función lineal de cada segmento de datos) pero por simplicidad lo llamamos MF DFA.

4.2 Aplicación del análisis multifractal a una serie de EEG correspondiente a una polisomnografía.

Considerar que los registros de EEG dan cuenta de un fenómeno complejo producido por el cerebro no es nuevo. Existen numerosos antecedentes en la literatura de los sistemas complejos que realizaron (o intentaron realizar) alguna cuantificación, haciendo uso de las herramientas de los sistemas dinámicos y de la teoría del caos, e.g. ver Babloyantz, (1985). Sin embargo, se han podido implementar estas metodologías en situaciones muy especiales, tales como las crisis epilépticas y estadios de sueño profundo (Schreiber, 1999). En los dos casos, las señales EEG pueden modelizarse matemáticamente mientras que en señales EEG del estado de vigilia de un sujeto normal no es posible, hasta la actualidad, encarar este análisis con herramientas matemáticas como las mencionadas, fundamentalmente porque no estamos frente a una señal estacionaria.

En cuanto al análisis de series cerebrales utilizando el formalismo multifractal, existen varios trabajos entre los que podemos mencionar un estudio de la dinámica de las ondas cerebrales (Yuan et al., 2006), otro sobre la caracterización del mal de Alzheimer (Pan et al, 2004) que utiliza el método DFA y un estudio en una crisis tónico-clónica mediante el MF DFA (Figliola et al., 2007).

Para este trabajo se comenzó con la clasificación y división del registro de datos en los diferentes estadios, respetándose la información proveniente del hipnograma, el que fue realizado por médicos o técnicos especializados quienes distinguen “a ojo” en que estadio se halla el sujeto. En la Figura 1 mostramos el hipnograma de las dos primeras horas de sueño.

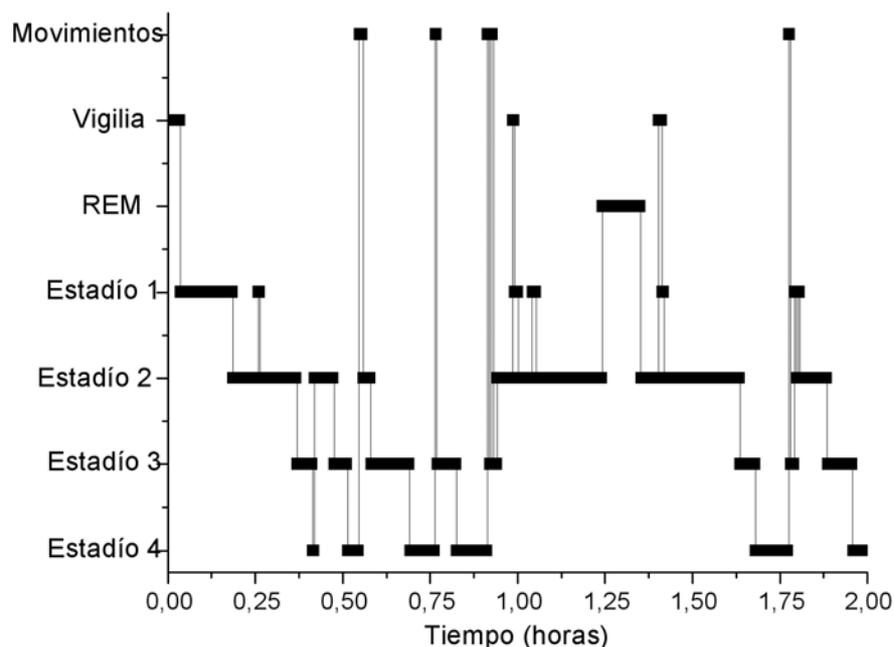


Figura 1: Hipnograma realizado entre las 23:36:00 y 1:36:00 horas.

Las Figuras 2, 3 y 4 muestran una parte significativa de señales correspondientes a los estadios 2, 3 y 4.

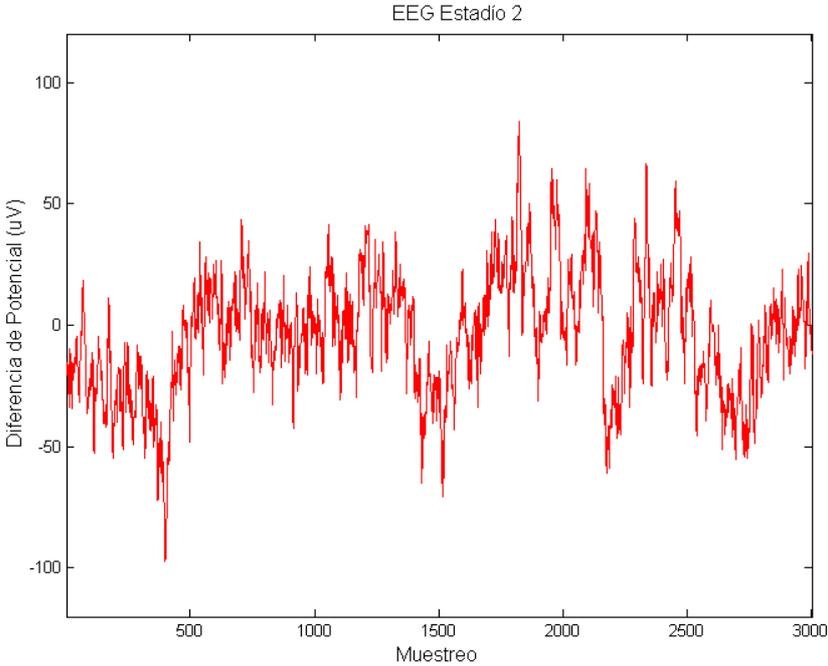


Figura 2: Señal EEG- Estadio 2

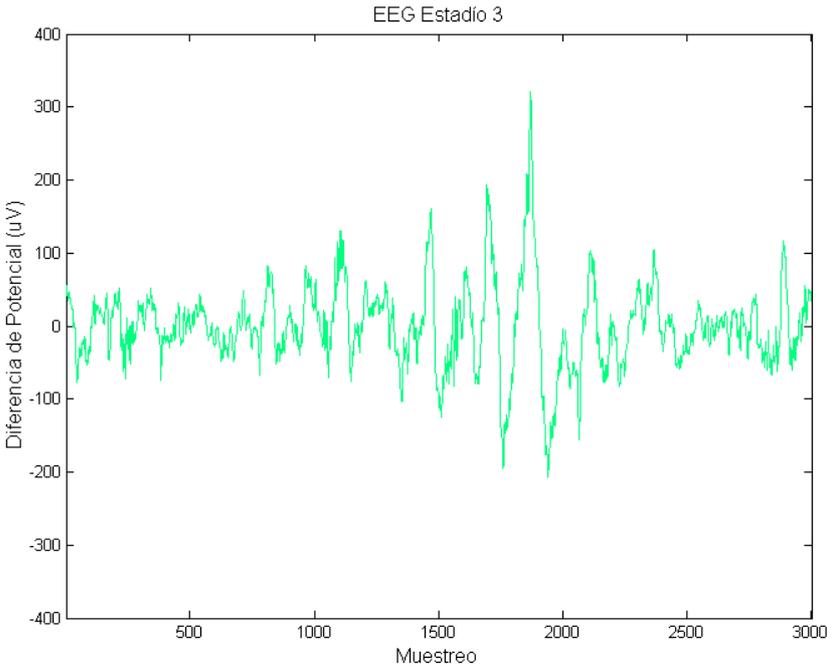


Figura 3: Señal EEG- Estadio 3

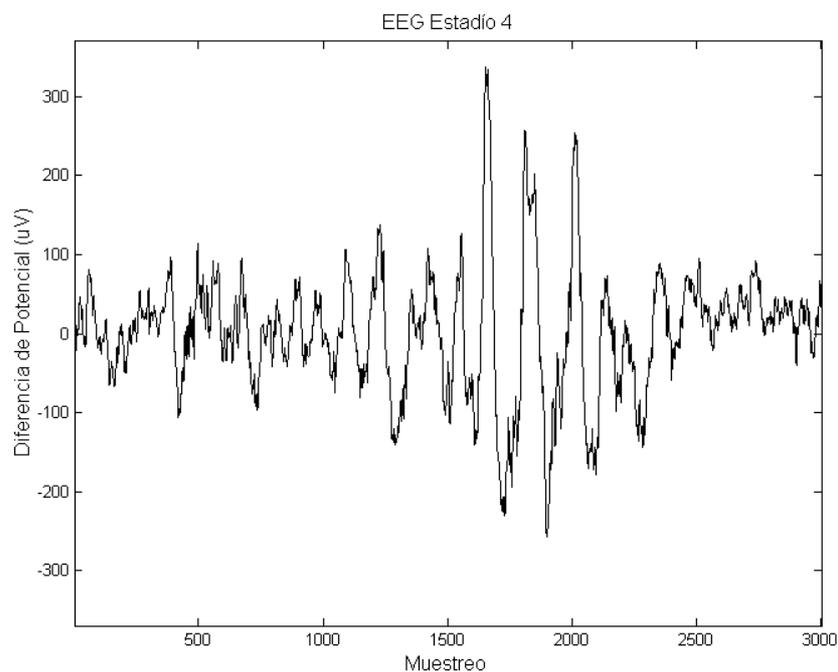


Figura 4: Señal EEG- Estadio 4

En cada estadio se aplicó el método MFDFA descrito en la sección 3. Se advirtió que no fue posible construir los espectros multifractales en los casos de la vigilia, de sueño REM y del sueño No REM en el estadio 1, debido a que el exponente $\tau(q)$, definido en la ecuación (27), no era una función cóncava (Falconer, 1997) por lo que algunas de las hipótesis de trabajo supuestas no eran válidas. En cambio sí fue posible estudiar los estadios 2, 3 y 4 del sueño No REM. La Figura 5 muestra los espectros de los estadios 2, 3 y 4 que se suceden durante aproximadamente 15 minutos del sueño.

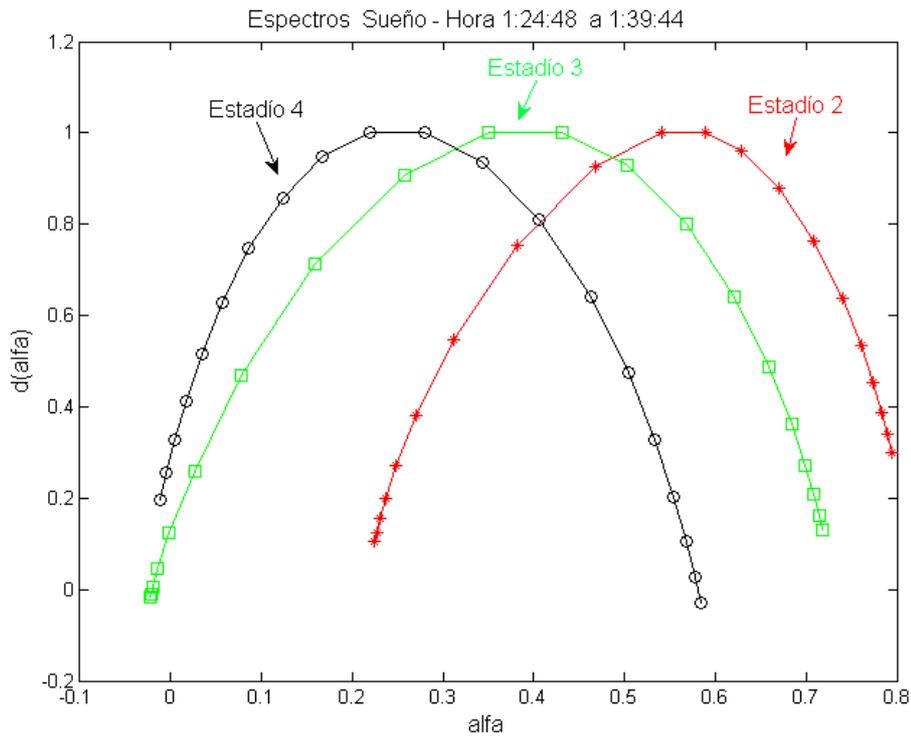


Figura 5: Espectros Multifractales $d(\alpha)$ para tres estadios diferentes. Observe que a medida que el sueño es más profundo los espectros mantienen aproximadamente sus dimensiones pero se trasladan hacia la izquierda.

En las Figuras 6, 7, 8 se pueden observar las funciones $h(q)$ y $\tau(q)$, definidas en la ecuación (27), a partir de las que se construyeron los espectros multifractales de la Figura 5.

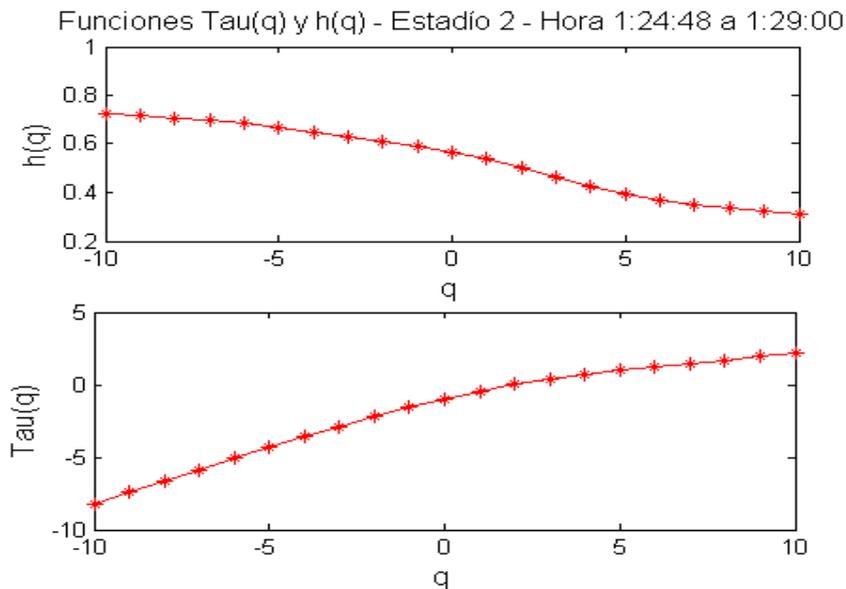


Figura 6: Funciones $h(q)$ y $\tau(q)$ del estadio 2

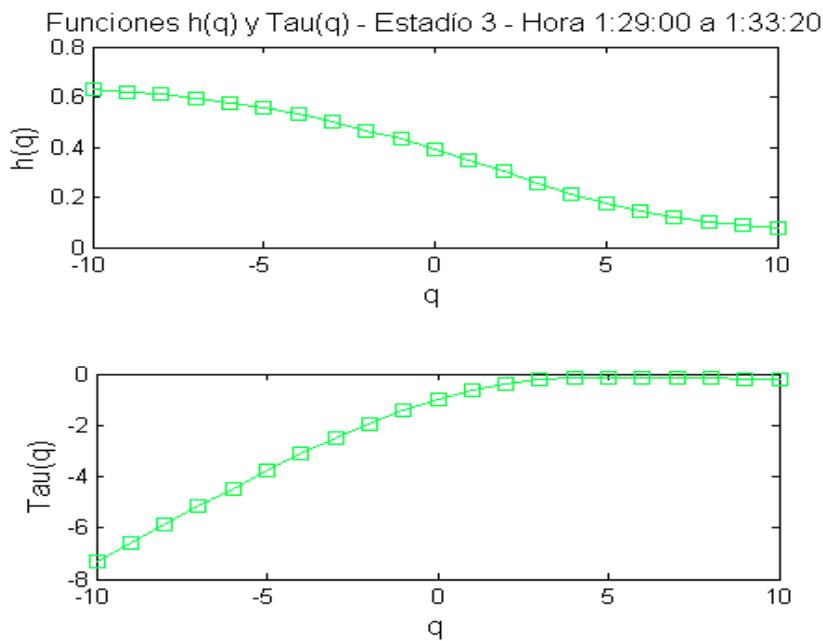


Figura 7: Funciones $h(q)$ y $\tau(q)$ del estadio 3

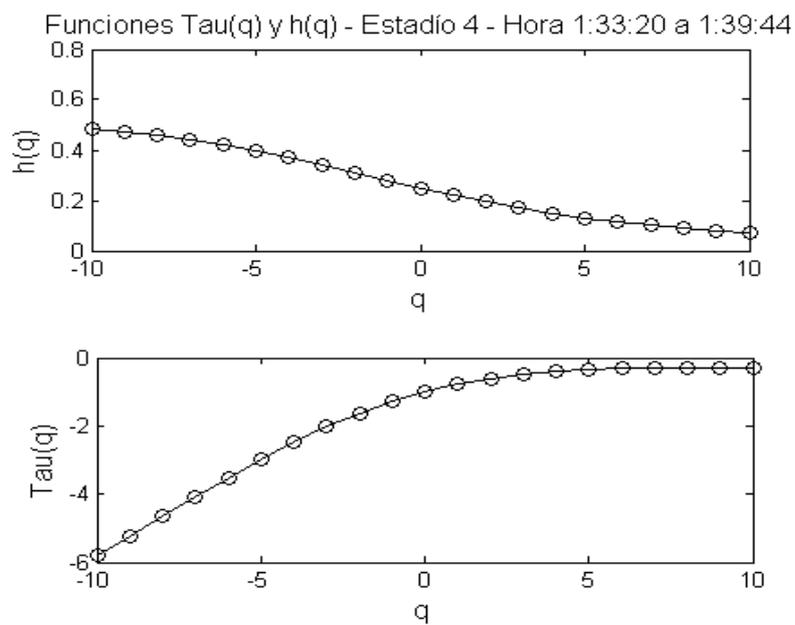


Figura 8: Funciones $h(q)$ y $\tau(q)$ del estadio 4

Por otro lado fue necesario construir cuantificadores del conjunto de los exponentes Hölder y de la magnitud del espectro multifractal para poder seguir la evolución del sueño con dichos parámetros.

Así definimos,

$$\text{Media 1} = \frac{\sum_{\alpha} \alpha \cdot d(\alpha)}{\sum_{\alpha} d(\alpha)} \quad (28)$$

$$\text{Media 2} = \sum_{\alpha} \alpha \cdot d(\alpha) \quad (29)$$

Y, el área del rectángulo donde se encaja el gráfico del espectro multifractal,

$$\text{Área} = (\max_{\alpha} \{d(\alpha)\} - \min_{\alpha} \{d(\alpha)\}) (\max_{\alpha} \{\alpha\} - \min_{\alpha} \{\alpha\}) \quad (30)$$

La [Figura 9](#) muestra los valores de estos parámetros durante el período de sueño estudiado.

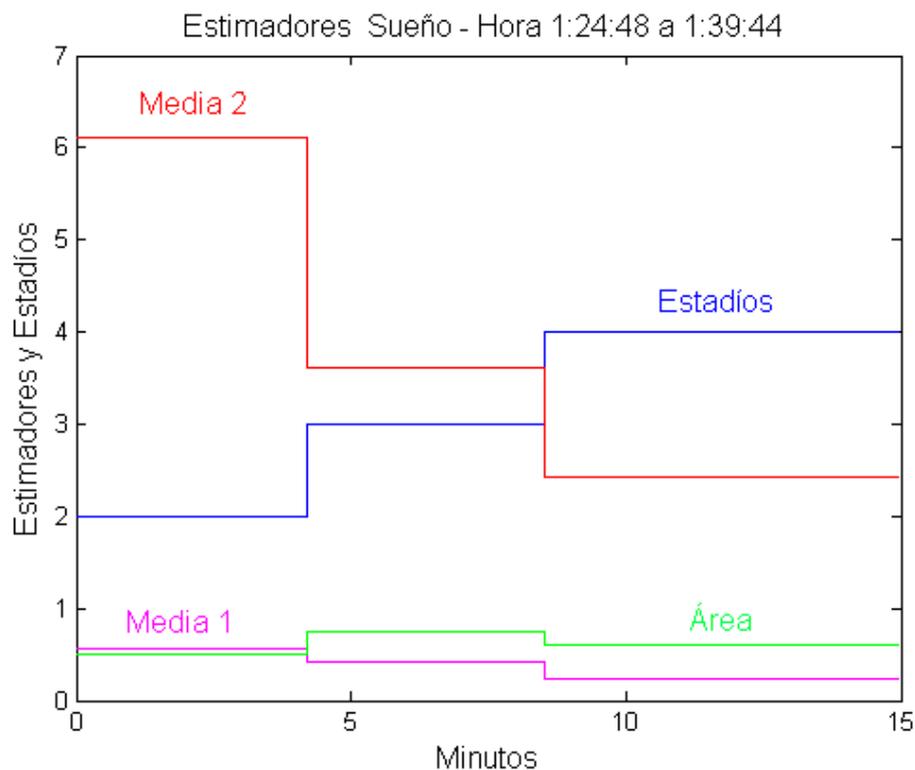


Figura 9: Se puede observar que la Media 1 sigue un patrón análogo al que sigue la clasificación de los estadíos. Se puede notar que la Media 1 decrece de manera similar a medida que se pasa de una fase a otra.

5 RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En este trabajo hemos presentado el método MFDFA aplicado a una serie de EEG en el caso de sueño en un adulto joven, normal y sano. Además, se han presentado algunos estimadores útiles para evaluar a los correspondientes espectros y exponentes Hölder: son los dos valores medios del valor α y el estimador del área del espectro multifractal.

A partir de los resultados obtenidos y considerando al hipnograma como patrón, encontramos que:

- Solamente fue posible calcular el espectro multifractal en el caso de estadios No REM 2, 3 y 4. Los casos REM, vigilia y estadio 1 No REM parecen no ser pasibles a dicho análisis, lo que resulta consistente con la dificultad que se ha tenido en aplicar otros métodos de estudio en señales de EEG de individuos normales en la vigilia (Schreiber, 1999). De este resultado “negativo” podemos inferir dos posibles explicaciones. La primera es que el MFDFA no se adapta a este tipo de fenómeno porque, como se advirtió en la introducción, el método sólo ha sido bien probado para medidas de Borel no negativas, singulares y de soporte acotado, y tal vez no se cumpla dicha hipótesis en estas señales. La otra posibilidad es que sencillamente no se observen en los casos REM, vigilia y estadio 1 No REM comportamientos de invariancia escalar propios de la multifractalidad.
- Las series correspondientes al estadio 4 presentan exponentes Hölder más cercanos a cero, lo que podría interpretarse como la presencia de frecuencias rápidas además de las ondas lentas en la señal. Entonces, el corrimiento de los exponentes Hölder permitiría evaluar una característica propia que puede ser particular en cada paciente o de la existencia de alguna diferenciación dentro del estadio 4 a lo largo del sueño.
- En cuanto a la sincronización con el hipnograma, podemos observar en la [Figura 9](#) que todos los cuantificadores (Media 1, Media 2 y Área) cambian exactamente en el momento en que cambia el estadio.
- Entre los tres cuantificadores notamos que la Media 1 es la que mejor se ajusta al hipnograma, reduciendo su valor a medida que el sueño pasa del estadio 2 al 4. De todas maneras, se puede pensar que los otros cuantificadores siguen otro tipo de dinámica con respecto al hipnograma pero que no logran reflejar del todo sus cambios.

Este trabajo tuvo por objetivo presentar una metodología que podría ser exitosa, por un lado, como apoyo al trabajo de los especialistas que realizan los hipnogramas (sin pretender reemplazarlos) y que, por otro lado, podría ser útil en la investigación de la invariancia escalar de los sistemas complejos. Permite también comprender la suavidad o rugosidad de las señales y con ello relacionarlas con la presencia de diferentes formas de ondas propias de las diferentes fases de sueño.

En trabajos futuros se espera corroborar estas hipótesis con el tratamiento de señales EEG de sueño de otros sujetos, a fin de poder establecer una estadística que de lugar a conclusiones más generales.

REFERENCIAS

- F. Amzica, M. Steriade. *Epilepsy and sleep: Physiological and clinical relationships*, Ed. D. Dinner and H. Lüders, Academic Press, 2001.
- A. Arneodo, A. Argoul, J.F. Muzy, M. Tabard, E. Bacry. Beyond classical multifractal analysis using wavelets: uncovering a multiplicative process hidden in the geometrical complexity of diffusion limited aggregates. *Fractals*, **1**: 629–646, 1995.
- Y. Ashkenazy, P. Ch. Ivanov, S. Havlin, Ch-K. Peng, A. L. Goldberger and H. E. Stanley. Magnitude and Sign Correlations in Heartbeat Fluctuations. *Phys. Rev. Lett.*, **86** N 9, 1900:1903, 2001
- A. Babloyantz. Strange attractors in the dynamics of brain activity. H. Haken (Ed.), *Complex Systems*, Springer, Berlin, 1985.
- K. Falconer. *Fractal geometry: Mathematical foundations and applications*, John Wiley and Sons Ltd, Chichester, 1990.
- K. Falconer. *Techniques in fractal geometry*, John Wiley and Sons Ltd, New York, 1997.
- A Figliola, E. Serrano, O. A. Rosso. Dynamic behavior of tonic-clonic epileptic seizures. *European Physical Journal*, **143**: 117-123, 2007.
- W.Ganong. *Fisiología médica*, Ed. El Manual Moderno, México, 1998.
- S. Jaffard. Wavelet techniques in multifractal analysis. *Fractal geometry and applications: a jubilee of Benoît Mandelbrot, Part 2*, Amer. Math. Soc., M. Lapidus and M. van Frankenhuysen ed., 2004.
- S. Jaffard. Multifractal formalism for functions, Parts I and II. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, **28(4)**: 944 -998, 1997.
- J. W. Kantelhard S. A. Zschiegner, E. Koscielny-Bunde, S. Havlin, A. Bunde and H. E. Stanley. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A*, **316**: 87-114, 2002.
- A.N. Kolmogorov. Dissipation of energy in locally isotropic turbulence. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **32**, 1941.
- S. Mallat. *A wavelet tour of signal processing*, 2nd Edition, American Press, San Diego, 1999.
- J.F. Muzy, E. Bacry and A. Arneodo. Wavelets and multifractal formalism for singular signals: Application to turbulence data. *Phys. Rev. Lett.*, **67**: 3515-3518, 1991.
- P. Oświecimka, J. Kwapien and S. Drożdż. Wavelet versus detrended fluctuation analysis of multifractal structures. *Phys. Rev. E*, **74**, 016103: 8-17, 2006.
- C.P. Pan, B. Zheng, Y. Z. Wu and X. W. Tang. Detrended fluctuation analysis of human brain electroencephalogram. *Phys. Lett. A*, **329**: 130-135, 2004.
- C. K. Peng, S. V. Buldyrev, A. L. Goldberger, S. Havlin, R. N. Mantegna, M. Simons, H. E. Stanley. Statistical properties of DNA sequences. *Physica A*, **221**:180–192, 1995.
- A. Rechtschaffen, A. Kales. *A manual of standardized terminology, techniques and scoring system for sleep stages of human subjects*. Brain Information Service / Brain Research Institute, University of California, 1968.
- R. Rubio Aramendi. Criterios y metodología de la lectura de la polisomnografía convencional. *Atlas de trastornos respiratorios del sueño*. Novartis Farmacéutica S.A., Barcelona, 1999.
- P. Shang, Y. Lub, S. Kama. The application of Hölder exponent to traffic congestion warning. *Physica A*, **357**: 314-318, 2006
- H.E. Stanley, L.A. Amaral, P. Gopikrishnan, P.Ch. Ivanov, T.H. Keitt, V.Plerou. Scale invariance and universality: organizing principles in complex systems. *Physica A*, **281**: 60-68, 2000.

- T. Schreiber. Interdisciplinary application of nonlinear time series methods. *Physics Reports*, **308**: 1-64, 1999.
- L. Telesca, V. Lapenna, M. Macchiato. Multifractal fluctuations in seismic interspike series. *Physica A*, **354**: 629-640, 2005.
- A. Turiel, C. J. Pérez-Vicente, J. Grazzini. Numerical methods for the estimation of multifractal singularity spectra on sampled data: A comparative study. *Journal of Computational Physics*, **216**: 362–390, 2006.
- J.W. Yuan, B. Zhenga, C.P. Panc, Y.Z. Wua, S. Trimper. Dynamic scaling behavior of human brain electroencephalogram. *Physica A*, **364**: 315–323, 2006.