

EVOLUCIÓN LONGITUDINAL DE LA INTENSIDAD DE LAS CORRIENTES SECUNDARIAS EN CANALES CON CURVAS

Juan F. Weber

*Laboratorio de Hidráulica, Departamento de Ingeniería Civil, Facultad Regional Córdoba,
Universidad Tecnológica Nacional, Maestro M. López esq. Cruz Roja Argentina. Ciudad Universitaria
- CP (X5016ZAA) - Córdoba – Argentina. jweber@civil.frc.utn.edu.ar*

*Departamento de Computación, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad
Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sarsfield 1601, Ciudad Universitaria, CP 5016, Córdoba, Argentina.*

Palabras clave: Mecánica de Fluidos, corrientes secundarias, MDF.

Resumen. En este trabajo se presenta un análisis de la evolución longitudinal del parámetro K del modelo EBKS (Ervine et al, 2000) que describe la distribución lateral de las velocidades promediadas en la vertical en las secciones de un cauce con meandros. Este parámetro K cuantifica la intensidad de las corrientes secundarias, responsables de la redistribución de las velocidades en la sección. El modelo EBKS da lugar a una ecuación diferencial que se resuelve por el método LDM-SC (Weber y Menéndez, 2006), en diferencias finitas. Como modelo patrón, se utilizó el RMA2, que es un modelo hidrodinámico bidimensional en elementos finitos que consta de un módulo de corrección por vorticidad adecuado para este caso. En cada sección del caso considerado, se ajustó el valor de K a través de un algoritmo de optimización, minimizando las diferencias entre las predicciones del LDM-SC y el modelo 2D, obteniéndose una función empírica que muestra la evolución longitudinal de K en la curva. Se enuncian conclusiones acerca del comportamiento de este parámetro, vinculándolo a otras propiedades del flujo como la vorticidad.

1. INTRODUCCION

Uno de los problemas de mayor interés en la Mecánica de Fluidos aplicada a los flujos geofísicos es la representación adecuada del movimiento del agua en cauces naturales (ríos y arroyos). Estos cuerpos de agua se caracterizan por no tener, en general, un desarrollo rectilíneo, sino presentar curvas (también llamados meandros) en su desarrollo.

En general se puede afirmar que no es posible llegar a una adecuada descripción del flujo en las curvas a partir de modelos unidimensionales e incluso bidimensionales clásicos, como las ecuaciones de Saint-Venant o las de Aguas Poco Profundas, respectivamente, debido al carácter esencialmente tridimensional del flujo.

Sin embargo, en muchas aplicaciones de la ingeniería es suficiente conocer la distribución lateral de velocidades promediadas en la vertical. Ejemplo de ello puede ser la estimación de los procesos de erosión del lecho en una curva. Debido a esto, surge como atractiva la posibilidad de contar con un modelo unidimensional, sencillo, que permita lograr una aceptable estimación de la distribución lateral de velocidades en una curva de un canal, sin necesidad de recurrir a modelos teóricos más completos y complejos como los tridimensionales.

2. PLANTEO DEL PROBLEMA

Hace más de un siglo, Thomson (1876) sugirió que el flujo a superficie libre en una curva se puede pensar como la superposición de dos movimientos: un flujo principal, en la dirección dominante, y un flujo secundario, contenido en el plano de la sección, que se desarrolla debido a la acción de la fuerza centrípeta. La superposición de ambos movimientos da lugar al desarrollo de un flujo helicoidal, que en términos generales es descendente en la margen exterior de la curva y ascendente en la margen interior. Debido a este proceso, aún para una sección simétrica, el perfil lateral de velocidades no será simétrico (como sería de esperar en una canal rectilíneo) y se sesgará hacia el lado convexo de la curva. El incremento de presión sobre la margen exterior (y la consecuente disminución en la margen interior) provocará una sobreelevación de la superficie libre en el lado convexo (Figura 1).

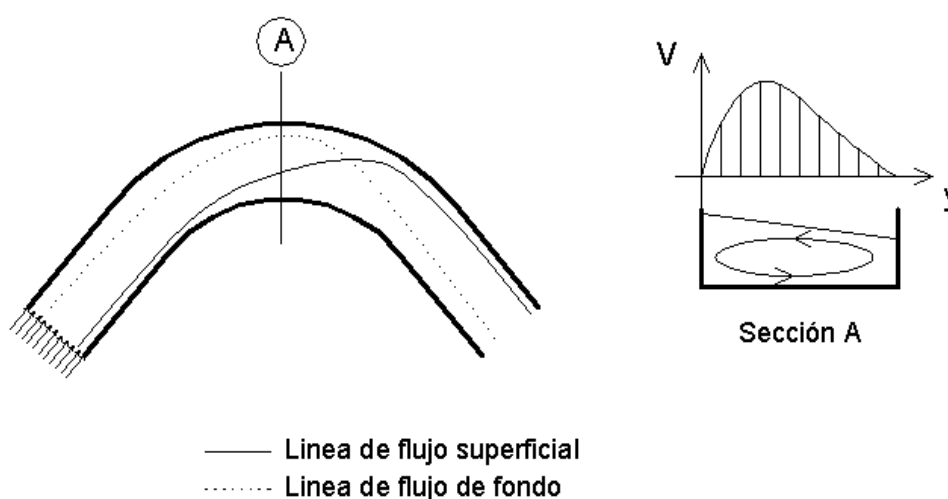


Figura 1. modelo conceptual del flujo en una curva

Si el sistema aguas abajo de la curva fuera ideal (conservativo) aún cuando el canal tome una alineación recta el movimiento vorticoso adquirido por el flujo se mantendría indefinidamente y los perfiles sesgados de velocidad serían idénticos aguas abajo. Debido a la disipación de la energía cinética, originada por la resistencia impuesta por el contorno rígido y en menor medida por efectos viscosos, la vorticidad del flujo deberá decaer una vez iniciado

el tramo recto aguas abajo de la curva, de modo que una distancia razonable el perfil vuelva a ser simétrico. Siguiendo el mismo razonamiento, es de esperar que la vorticidad del flujo no se incremente indefinidamente dentro de la curva, y por lo tanto si el desarrollo de ésta es lo suficientemente largo, se alcance un perfil lateral de velocidades de equilibrio.

En general, se pueden plantear tres aproximaciones a la solución del problema:

a) una aproximación unidimensional, a través de la integración de las ecuaciones de Navier-Stokes en la dirección vertical, conservando algún término que cuantifique la intensidad de las corrientes secundarias. La versión analítica de este modelo es el denominado método EBKS (Ervine et al., 2000). En este trabajo se denominará Método de la Distribución Lateral con Corrientes Secundarias (LDM-SC) (Weber y Menéndez, 2006).

b) una aproximación bidimensional, a través de las Ecuaciones de Aguas Poco Profundas (Chaudhry, 1993), acoplado al sistema de ecuaciones una ecuación de producción, transporte y disipación de la vorticidad, y

c) una aproximación tridimensional basada en la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes junto con un modelo de turbulencia.

3. OBJETIVO

El objetivo del presente trabajo es estudiar el comportamiento del parámetro K, que cuantifica la influencia de las corrientes secundarias sobre la distribución lateral de las velocidades promediadas en la vertical en el modelo LDM-SC (1D), a lo largo de un canal con curvas, cuya distribución bidimensional de velocidades se obtuvo a través de un modelo más completo como es el RMA2 (2D) con la inclusión de la corrección por vorticidad.

Los pasos del presente trabajo son los siguientes:

- Descripción de los modelos considerados.
- Descripción del caso de estudio y su modelación 2D.
- Estrategia de calibración del modelo 1D a partir de los resultados del modelo 2D.
- Análisis de los resultados.
- Conclusiones.

4. MÉTODO DE LA DISTRIBUCIÓN LATERAL CON CORRIENTES SECUNDARIAS (LDM-SC)

Con el objeto de obtener una ecuación diferencial que permita determinar la distribución lateral de velocidades V promediadas en la vertical a lo largo de la coordenada lateral, se resuelve la ecuación de movimiento en la dirección dominante del flujo, junto con la ecuación de continuidad, para un flujo uniforme y estacionario, lo que permite llegar a la siguiente ecuación:

$$\rho \left[\frac{\partial \overline{UV}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{UW}}{\partial z} \right] = \rho g S_0 + \frac{\partial \overline{\tau_{yx}}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\tau_{zx}}}{\partial z} \quad (1)$$

Donde:

x, y, z	Direcciones longitudinal, lateral y vertical
$\overline{U}, \overline{V}, \overline{W}$	Medias temporales de las componentes de la velocidad según x, y, z
$\overline{\tau_{yx}}, \overline{\tau_{zx}}$	Tensiones de Reynolds en los planos perpendiculares a y y a z respectivamente
ρ	Densidad del fluido
g	Aceleración de la gravedad
S_0	Pendiente longitudinal del lecho

Shiono y Knight (1991) integraron la ecuación (1) a lo largo de la profundidad H de flujo, basándose en el modelo de Boussinesq de turbulencia de la viscosidad de torbellino y obtuvieron la ecuación (2):

$$\rho g S_0 Y - \frac{f}{8} \rho V^2 \sqrt{1 + \frac{1}{s^2}} + \frac{d}{dy} \left[\rho \lambda \sqrt{\frac{f}{8}} Y^2 V \frac{\partial V}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y} [Y (\rho \bar{U} \bar{V})_d] \quad (2)$$

En esta ecuación:

Y	Profundidad de flujo (en general una función de y)
f	Factor de fricción de Darcy-Weisbach
V	Velocidad promediada en la vertical
r	Viscosidad adimensional de torbellino
$(\rho \bar{U} \bar{V})_d = \frac{1}{Y} \int_0^Y \rho \bar{U} \bar{V} dz$	Tensión de corte promediada en la vertical

El factor de fricción f está relacionado con el coeficiente n de Manning por

$$f = \frac{8 g n^2}{\sqrt[3]{Y}} \quad (3)$$

El parámetro adimensional λ se puede expresar como:

$$\varepsilon_{yx} = \lambda Y \sqrt{\frac{f}{8}} V \quad (4)$$

Donde ε_{yx} es la viscosidad de torbellino de Boussinesq.

El segundo miembro de la igualdad (2) representa el gradiente lateral de la fuerza aparente de corte en el plano vertical por unidad de longitud, y está relacionado a la intensidad de las corrientes secundarias.

Shiono y Knight (1988) encuentran una solución analítica a la ecuación (2) para el caso de canal rectilíneo, es decir cuando el segundo término de dicha ecuación es 0. Posteriormente, estos mismos autores (Shiono y Knight, 1991) encuentran una solución analítica a la (2), incluyendo el término de corrientes secundarias, pero cuya aplicabilidad se halla limitada al caso de canales rectilíneos de sección compuesta.

La principal limitación del modelo de Shiono y Knight está basada en suponer que el segundo miembro de (2) se mantiene constante. Eso hace que su aplicabilidad se limite a regiones restringidas, por ejemplo el pie del talud del canal principal de una sección compuesta.

Una aproximación más general fue planteada por Ervine, Babaeyan-Koopaei y Sellin (2000). Estos autores asumen que las medias temporales de las componentes de la velocidad, \bar{U} , \bar{V} se pueden considerar proporcionales a la velocidad promediada en la vertical V . Es decir,

$$\bar{U} = K_1 V \quad ; \quad \bar{V} = K_2 V \quad (5)$$

y por lo tanto,

$$\bar{U} \bar{V} = K V^2 \quad (6)$$

en la cual K es un coeficiente empírico que varía con la geometría de los contornos, y que cuantifica la intensidad de las corrientes secundarias. Reemplazando la ecuación (6) en la (2) y reordenando, se llega a

$$\rho g Y S_0 - \frac{1}{8} \rho f V^2 \sqrt{1 + \frac{1}{s^2}} + \frac{d}{dy} \left(\rho \lambda Y^2 \sqrt{\frac{f}{8}} V \frac{dV}{dy} - Y \rho K V^2 \right) = 0 \quad (7)$$

la cual es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, no lineal, no homogénea, que constituye la ecuación del método propuesto por Ervine, Babaeyan-Koopaei y Sellin (método EBKS). Sin embargo, si se escribe la ecuación (7) en términos de V^2 , se obtiene

$$A_i u_i'' + B_i u_i' + C_i u_i = F_i, \quad u_i = V_i^2 \quad (8)$$

donde

$$A_i = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{f}{8}} Y_i^2, \quad B_i = Y_i \left(\lambda \sqrt{\frac{f}{8}} z - k \right), \quad C_i = - \left(\frac{f}{8} \sqrt{1 + \frac{1}{s^2}} + kz \right), \quad F_i = -g Y_i S_0 \quad (9)$$

La ecuación (8) es una ecuación diferencial ordinaria lineal, y es la ecuación del Método de la Distribución Lateral con Corrientes Secundarias (LDM-SC).

5. SOLUCIÓN DEL LDM-SC POR EL MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS

Para la solución en diferencias finitas de la ecuación (8) se reemplazan las derivadas primera y segunda de la función por los esquemas centrados

$$u_i'' = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}, \quad u_i' = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \quad (10)$$

Reordenando, se obtiene

$$\left(\frac{A_i}{h^2} - \frac{B_i}{2h} \right) u_{i-1} + \left(C_i - \frac{2A_i}{h^2} \right) u_i + \left(\frac{A_i}{h^2} + \frac{B_i}{2h} \right) u_{i+1} = F_i \quad (11)$$

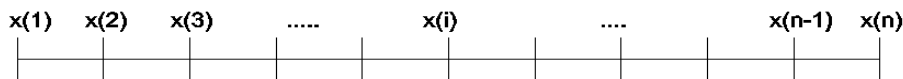


Figura 2. Discretización del dominio para el método de las diferencias finitas

que es el operador o molécula de cálculo de 3 puntos que, aplicado a los n nodos incógnita del dominio de solución (Figura 2), dan lugar al siguiente sistema lineal expresado en forma matricial:

$$M \cdot u = N \quad (12)$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} C_2 - \frac{2A_2}{h^2} & \frac{A_2 + B_2}{h^2 + 2h} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A_3 - B_3}{h^2 - 2h} & C_3 - \frac{2A_3}{h^2} & \frac{A_3 + B_3}{h^2 + 2h} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A_4 - B_4}{h^2 - 2h} & C_4 - \frac{2A_4}{h^2} & \frac{A_4 + B_4}{h^2 + 2h} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{A_{n-2} - B_{n-2}}{h^2 - 2h} & C_{n-2} - \frac{2A_{n-2}}{h^2} & \frac{A_{n-2} + B_{n-2}}{h^2 + 2h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{A_{n-1} - B_{n-1}}{h^2 - 2h} & C_{n-1} - \frac{2A_{n-1}}{h^2} \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$u = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \dots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ \dots \\ F_{n-2} \\ F_{n-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \left(\frac{A_2}{h^2} - \frac{B_2}{2h}\right)u_0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \left(\frac{A_{n-1}}{h^2} + \frac{B_{n-1}}{2h}\right)u_n \end{pmatrix} \quad (14)$$

En la expresión anterior, u_0 y u_n representan los cuadrados de las velocidades cercanas a los márgenes, que por las mismas razones indicadas en la solución analítica se deben elegir no nulos y en forma arbitraria y razonable.

La implementación de la solución anterior se efectuó en el lenguaje GNUOctave (Eaton, 1997). En Weber y Menéndez (2006) puede verse una descripción detallada del algoritmo implementado.

6. MODELO NUMERICO BIDIMENSIONAL

6.1.Descripción

El modelo numérico bidimensional utilizado se basa en las ecuaciones de aguas poco profundas (shallow water equations), que surgen de la integración en la vertical de las ecuaciones de Reynolds:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (15)$$

$$h \frac{\partial u}{\partial t} + hu \frac{\partial u}{\partial x} + hv \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{h}{\rho} \left(E_{xx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + E_{xy} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + gh \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{gun^2}{h^{1/3}} (u^2 + v^2)^{1/2} = 0 \quad (16)$$

$$h \frac{\partial v}{\partial t} + hu \frac{\partial v}{\partial x} + hv \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{h}{\rho} \left(E_{yx} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + E_{yy} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + gh \left(\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{gvn^2}{h^{1/3}} (u^2 + v^2)^{1/2} = 0 \quad (17)$$

La ecuación (15) es la de conservación de masa, en tanto que la (16) y la (17) son las ecuaciones de cantidad de movimiento en las direcciones x e y, respectivamente, donde:

h	Profundidad de flujo
u, v	Componentes de la velocidad en las direcciones cartesianas
x, y, t	Coordenadas cartesianas y tiempo
ρ	Densidad del fluido
E	Coeficiente de viscosidad turbulenta
	xx: dirección normal al plano xz - yy: dirección normal al plano yz
	xy e yx: dirección de corte en cada superficie
g	Aceleración de la gravedad
a	Cota del fondo
n	Coeficiente de rugosidad de Manning

El modelo numérico utilizado es el RMA2 del U.S. Army Corps of Engineers – Waterways Experiment Station – Hydraulics Laboratory (Donnell, 1996). En éste, las ecuaciones (15),

(16) y (17) son resueltas por el método de los elementos finitos usando el método de Galerkin de los residuos ponderados. Las funciones de forma son cuadrática para la velocidad y lineal para la profundidad. La integración en el espacio se realiza por integración gaussiana. Las derivadas temporales son reemplazadas por una aproximación no lineal en diferencias finitas. Se asume que las variables varían a lo largo de cada intervalo de tiempo en la forma:

$$f_{(t)} = f_{(0)} + at + bt^c \quad t_0 \leq t < t_0 + \Delta t \quad (18)$$

La cual es derivada respecto del tiempo, y termina en una forma en diferencias finitas. Los parámetros a, b y c son constantes.

La solución es totalmente implícita y el conjunto de ecuaciones simultáneas es resuelto por el método de Newton Raphson.

6.2. Corrección por vorticidad

Como puede observarse en las ecuaciones (15) a (17), no existen en estas ecuaciones términos que permitan considerar el efecto de las corrientes secundarias sobre el campo bidimensional de velocidades resultado. De hecho, la distribución de velocidades que se obtiene en una curva por la aplicación del modelo numérico RMA2 (como de cualquier otro modelo basado en las ecuaciones 15 a 17) muestra un máximo de la velocidad sobre la margen interior o lado cóncavo, lo cual es a las claras irreal.

Bernard y Schneider (1992) y posteriormente Finnie et al (1999) presentan una corrección al modelo de Aguas Poco Profundas por efecto de la vorticidad. Dicha corrección consiste en una cuarta ecuación diferencial (acoplada a las tres anteriores) de transporte de la vorticidad Ω , de la forma:

$$u \frac{\partial \Omega}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \frac{A_s \sqrt{C_f} |\bar{u}|^2}{rh \left(1 + 9 \frac{h^2}{r^2} \right)} - D_s \sqrt{C_f} \Omega \frac{|\bar{u}|}{h} + \frac{1}{h} \bar{\nabla} \cdot (vh \bar{\nabla} \Omega) \quad (19)$$

con

Ω	Vorticidad
r	Radio de curvatura de la línea de corriente
h	Profundidad local de flujo
C_f	Coefficiente de fricción de Fanning
\bar{u}	Vector velocidad
ν	Viscosidad
A_s, D_s	Parámetros empíricos del modelo

Los parámetros empíricos A_s y D_s han mostrado como valores adecuados 5 y 0.5, respectivamente (Bernard y Schneider, 1992).

Con el objeto de reducir el tamaño de los sistemas de ecuaciones a resolver (y por lo tanto del almacenamiento necesario), la vorticidad se resuelve en forma desacoplada de las ecuaciones de flujo. Las velocidades y las profundidades se mantienen constantes durante el cálculo de la vorticidad, y la vorticidad se mantiene constante durante el cálculo de las velocidades y profundidades. Una vez convergidas las velocidades y profundidades, se pasa al cálculo de la vorticidad. Una vez convergido el cálculo de la vorticidad, se pasa al cálculo de velocidades y profundidades. El proceso se repite hasta que ambas fases convergen o se alcanza un límite prefijado (por el usuario) de iteraciones.

7. CASO DE ESTUDIO

Para este trabajo se consideró un canal de sección trapecial, constante, de desarrollo en

planta consistente de un tramo recto de aproximación, una curva a 90° y otro tramo recto de descarga, de acuerdo a lo indicado en la figura 3. La sección trapecial tiene un ancho de fondo de 6 m, con taludes laterales 1:1, como indica la figura 4.

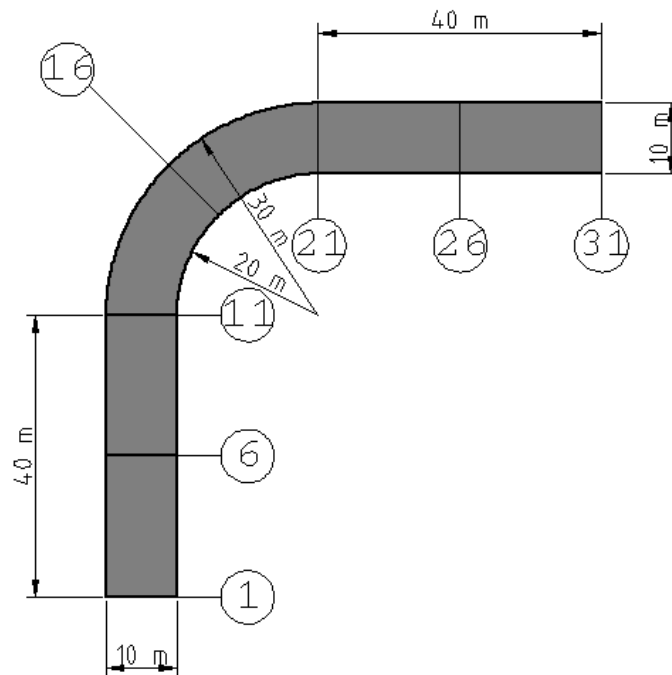


Figura 3. Geometría en planta del caso de estudio

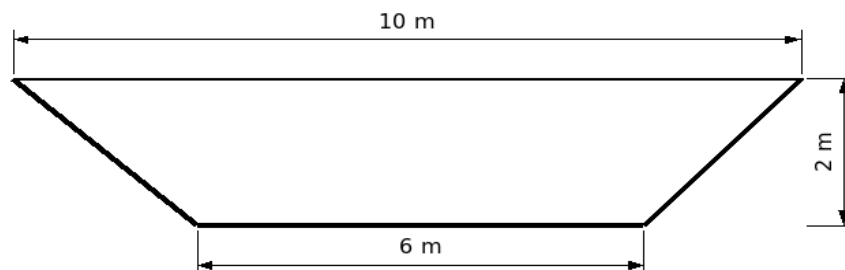


Figura 4. Sección transversal – caso de estudio

La pendiente longitudinal del canal se eligió en el 1 ‰. La rugosidad global del sistema fue parametrizada a través del coeficiente n de Manning, elegido en $n = 0,020$.

7.1. Aplicación del modelo 2D

Se aplicó al caso de estudio recién descrito el modelo RMA2 con la corrección por vorticidad indicada. El dominio se representó a través de una malla estructurada de elementos rectangulares, constituida por 2400 elementos y 7481 nodos, como se muestra en la figura 5. La malla se generó con un generador de desarrollo propio, escrito en C++, adaptación de un anterior programa desarrollado en Basic (Weber, 2003).

El modelo RMA2, cuya versión original está disponible para el sistema operativo MS-DOS, fue recompilado para ser utilizado bajo el sistema operativo GNU/Linux.

Como condiciones de contorno se impusieron: en el extremo de aguas abajo, una cota de la superficie libre constante e igual a +2,00 m; y en el extremo de aguas arriba, se impuso una distribución de velocidades nodo a nodo dada por la aplicación del modelo LDM (LDM-SC con $k = 0$) dado que por la limitada longitud del tramo recto de entrada, el modelo 2D no tiene

suficiente capacidad por sí de redistribuir lateralmente las velocidades de entrada, a partir de las distribuciones estándar disponibles en RMA2 (constante o proporcional a la profundidad) con lo cual la solución 2D se hubiera visto notablemente influida por esta condición de entrada.

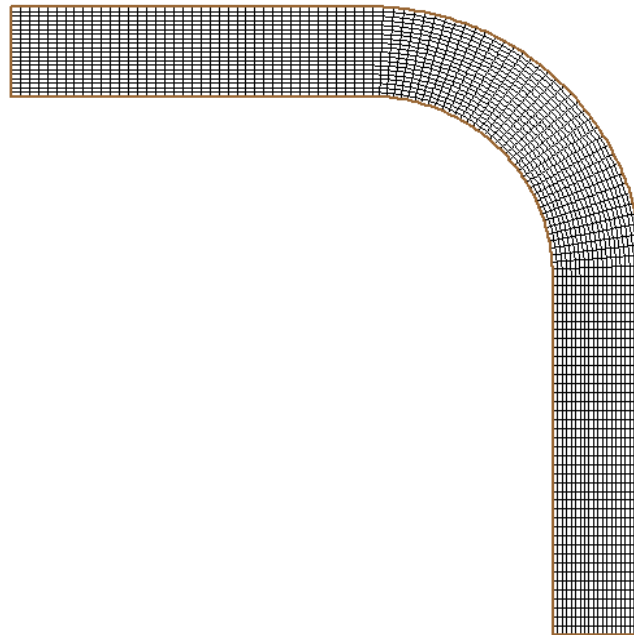


Figura 5. malla de elementos finitos para el modelo 2D

En las márgenes, el modelo RMA2 impone en forma automática una condición reflejante, lo cual en las pequeñas dimensiones del caso de estudio hubiera provocado una distribución anómala de velocidades; siguiendo las recomendaciones de la documentación del programa, para simular una condición de no deslizamiento, se le asignó artificialmente a las líneas de elementos vecinas a las márgenes un segundo material de rugosidad elevada ($n = 0,200$) lo cual simula adecuadamente el efecto de esa capa límite sin mayor error en lo global. La distribución de materiales en el dominio se muestra en la figura 6.

En la Tabla 1 se resumen las propiedades de los materiales intervinientes en el modelo RMA2.

Material	n
1	0,020
2	0,200

Tabla 1: Propiedades de los materiales en el modelo 2D

La viscosidad de torbellino se asignó a través de un número de Peclet, definido como

$$Pe = \frac{\rho u dx}{E} \quad (20)$$

con

- ρ densidad del fluido
- u velocidad promedio en el elemento
- dx longitud del elemento en la dirección del flujo
- E Viscosidad de torbellino

Se asumió un número de Peclet constante en el dominio dado por $Pe = 15$, lo cual dio lugar a viscosidades de torbellino comprendidas entre 84 y 120 Pa.s.

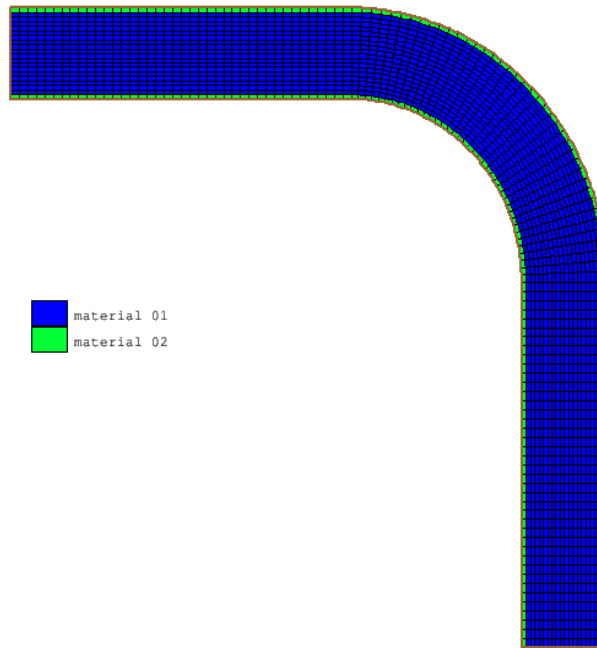


Figura 6. Materiales en la malla de elementos finitos para RMA2

A los fines de mejorar las probabilidades de convergencia, se realizó una simulación pseudodinámica asignando una cota inicial ligeramente superior a la final (2,20 m) la cual fue descendiendo en los sucesivos pasos iterativos (a través de las tarjetas REV) hasta 2,00 m en el extremo aguas abajo. Las cotas finales de la superficie libre obtenidas pueden verse en la figura 7. Puede observarse en la curva la sobreelevación de la margen exterior debido a la acción centrífuga, tenida en cuenta por medio de la corrección por vorticidad.

En la figura 8 pueden observarse las isóneas de igual velocidad promediada en la vertical, identificando el sesgo que se produce aguas abajo de la curva, lo que muestra la efectividad del módulo de corrección por vorticidad del modelo. En la figura 9 se superponen los vectores velocidad, y en la figura 10 se observa un detalle en la zona de la curva.

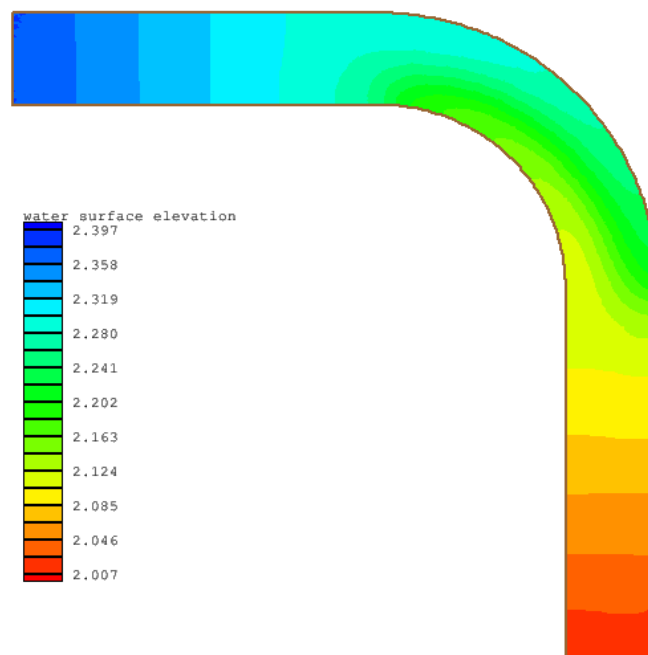


Figura 7. Cotas de la superficie libre obtenidas con RMA2

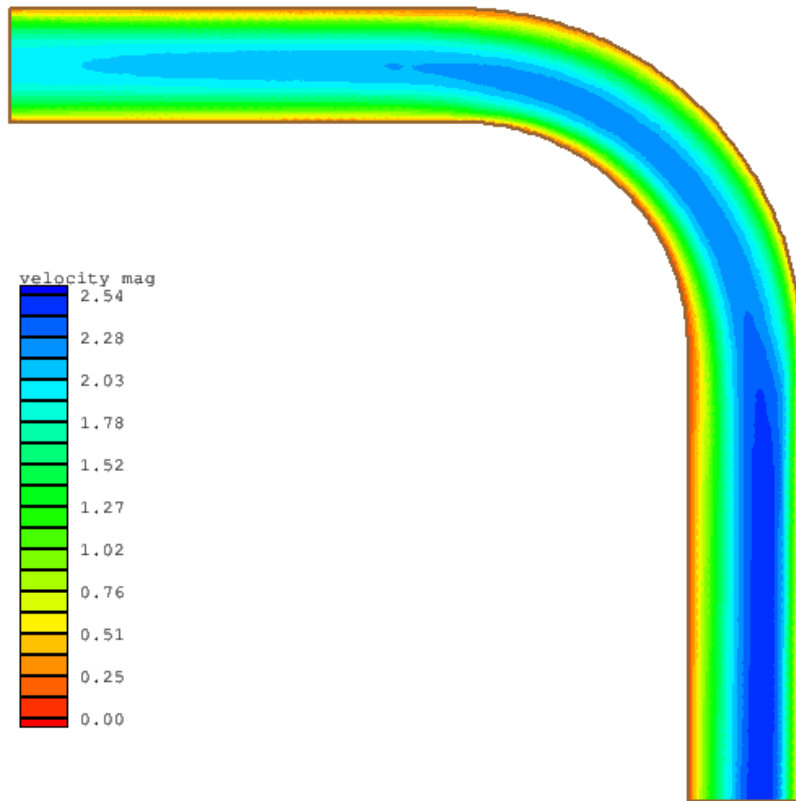


Figura 8. Intensidad de la velocidad obtenida con RMA2

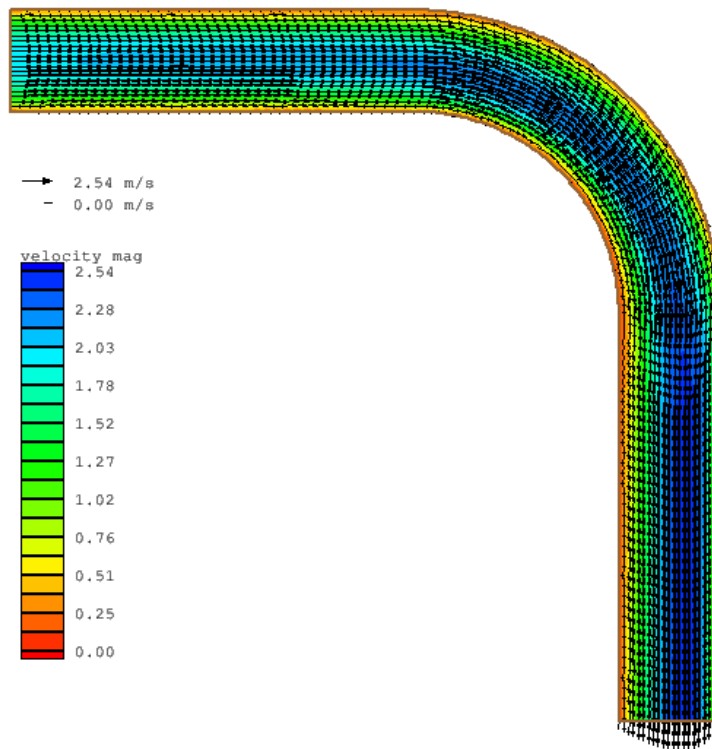


Figura 9. Campo de velocidades obtenido con RMA2

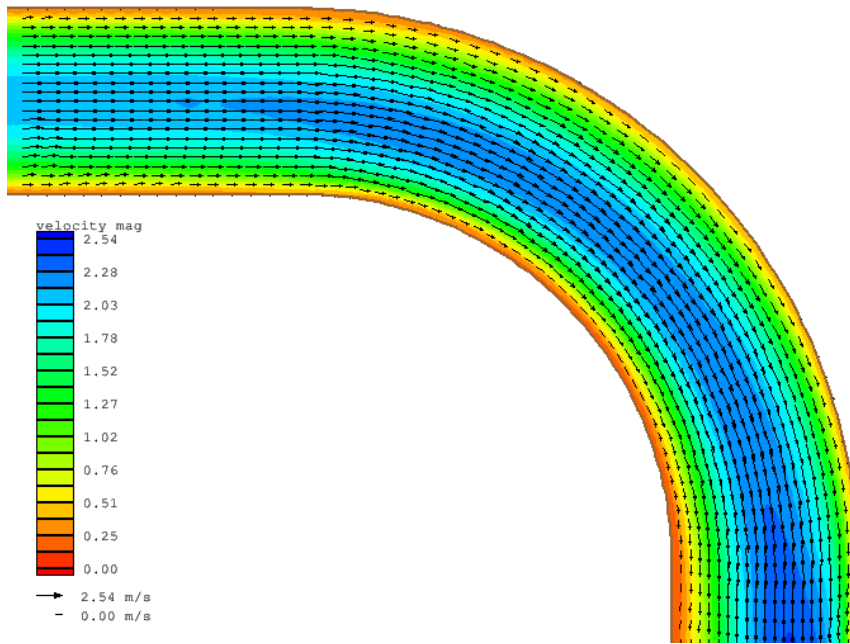


Figura 10. Detalle del campo de velocidades obtenido con RMA2 en la curva

Con la finalidad de investigar su relación con el parámetro K del modelo LDM-SC, se obtuvo también como resultado de RMA2 la intensidad de la vorticidad, cuya distribución en el dominio se muestra en la figura 11. En la figura 12 se muestra un detalle en la zona de la curva. En la figura 13 se muestra la variación longitudinal de la vorticidad promedio en cada sección, la cual como es de esperar crece debido a la acción centrífuga de la curva (progresiva 40 en adelante) y decae ante la ausencia de esta acción externa (progresiva 80 en adelante).

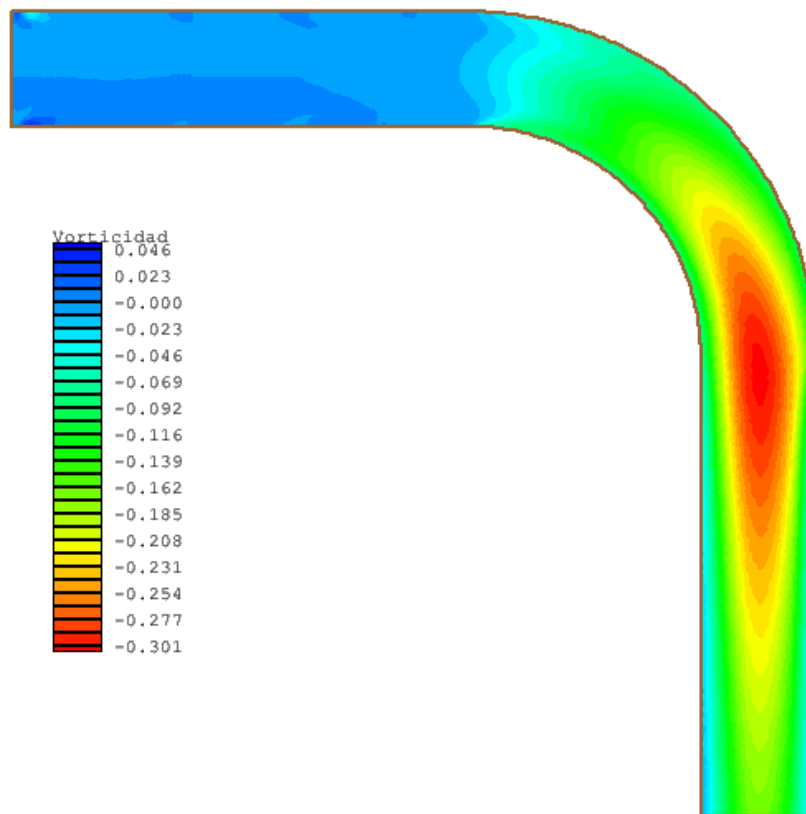


Figura 11. Campo de vorticidades obtenido con RMA2

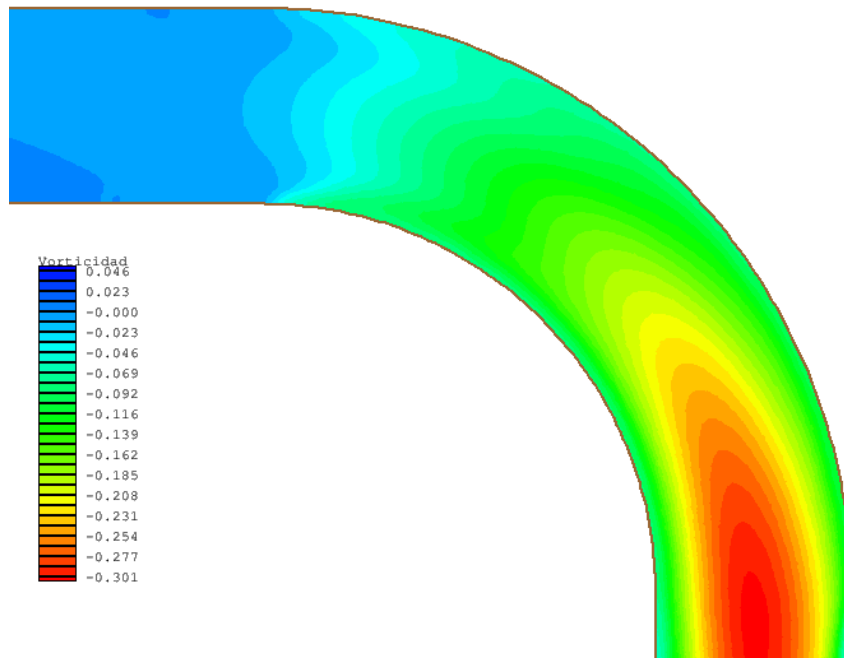


Figura 12. Campo de vorticidades obtenido con RMA2 – detalle en la zona de curva

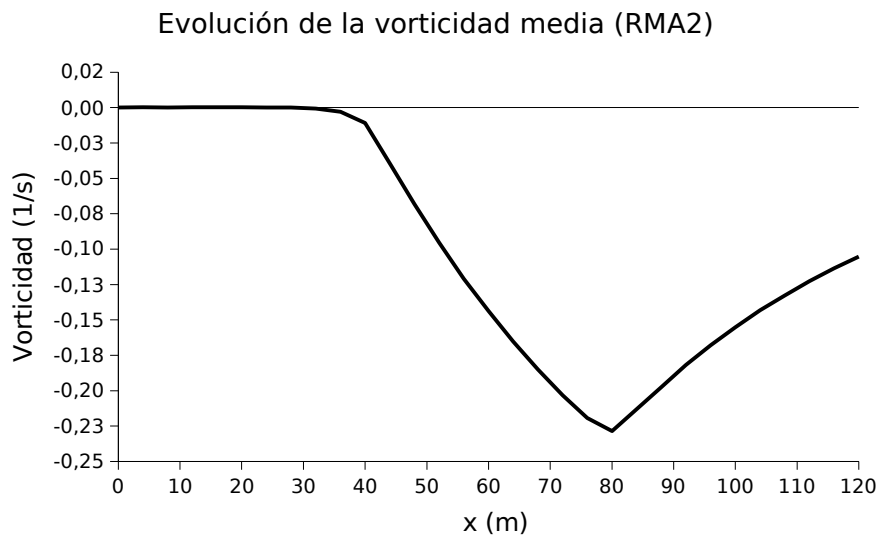


Figura 13. Evolución longitudinal de la vorticidad media en la sección

Las pequeñas irregularidades que pueden observarse a la entrada del canal, en la figura 11, tienen su causa en que la distribución de velocidades dada por el modelo LDM-SC no se corresponde con la distribución esperada para un flujo “uniforme” en el propio modelo RMA2, lo cual da lugar a algunos valores de vorticidad a la entrada, donde se espera que esta magnitud sea 0. De todos modos, dado que la magnitud relativa es pequeña, su efecto se considera despreciable.

8. AJUSTE DEL MODELO LDM-SC

El ajuste de los parámetros del modelo LDM-SC a los resultados obtenidos por el modelo RMA2 partió de las siguientes hipótesis:

- se definen las secciones de análisis cada 4 m en la dirección longitudinal, es decir, cada 4 líneas de elementos del modelo RMA2. Esto da lugar a un total de 31 secciones consideradas, número que se juzga aceptable para el análisis propuesto.

- los parámetros de fricción (n de Manning) y turbulencia (viscosidad adimensional de torbellino λ) se mantuvieron con los mismos valores que los utilizados en el modelo unidimensional; si bien es cierto que el significado de dichos parámetros ya no es estrictamente el mismo al pasar de un modelo 2D a un 1D, se asumió esta hipótesis en forma simplificada.
- se asumieron dos posibles distribuciones del parámetro K en las secciones consideradas:
 - valor constante de K en la sección.
 - distribución lineal de K en la sección.

Esta última hipótesis se basa en algunas observaciones realizadas en casos reales (Weber, 2007) que indicarían que los mejores ajustes se obtendrían al asumir una no uniformidad de K en la sección. Con el objetivo de conservar la parsimonia del modelo, se intenta en este caso con una distribución lineal del parámetro indicado.

El ajuste del parámetro K sección a sección, tanto se realizó en forma automática con un algoritmo de búsqueda por fuerza bruta, desarrollado en el lenguaje GNUOctave (Eaton, 1997) definiendo como región factible de búsqueda el dominio dado por $-0,02 < K < 0,02$, valores definidos por la experiencia previa en casos similares (Weber y Menéndez, 2005). En el caso de la hipótesis de valor constante de K en la sección, la búsqueda se realizó sobre un intervalo unidimensional, mientras que en la segunda hipótesis (distribución lineal), como se necesitan ajustar dos parámetros K por sección, la búsqueda se realizó sobre un área cuadrada.

La función objetivo a minimizar fue la suma de los desvíos cuadráticos entre las velocidades predichas por el modelo bidimensional y el unidimensional, dadas en la ecuación (21):

$$F.O. = \sum_{i=1}^N \left(V_i^{1D} - V_i^{2D} \right)^2 \quad (21)$$

donde

- V_i^{1D} velocidad en el nodo i calculada con el modelo LDM-SC (depende de K)
- V_i^{2D} velocidad en el nodo i calculada con el modelo RMA2
- N número de nodos considerados por sección ($N = 41$).

En la figura 14 se muestran como ejemplo las isolíneas de la función objetivo para la sección 21 (progresiva 80 m), para la hipótesis de distribución lineal del parámetro K , donde K_{izq} representa el valor del parámetro K sobre margen izquierda y K_{der} el valor del parámetro K sobre margen derecha. Como puede observarse, no se detecta la presencia de más de un mínimo local en el dominio de búsqueda.

En la figura 15 se muestran los valores óptimos del parámetro K , tanto en la hipótesis de distribución uniforme como lineal, en función de la progresiva (coordenada longitudinal del canal). Algunos resultados obtenidos se resumen en la Tabla 2.

Dado que la función objetivo planteada en la ecuación (21) no garantiza la conservación de masa, se investigó también la variación longitudinal del caudal obtenido en cada sección a partir del perfil de velocidades calculado con el modelo LDM-SC. Dicha variación está representada en la figura 16. Si bien la variación parece a simple vista importante, nótese que las máximas diferencias están en el orden del 10 % del caudal total. Nótese además que a medida que el efecto del parámetro K disminuye, existe una lenta recuperación del caudal inicial.

Adicionalmente, en la figura 17 se muestra el valor mínimo alcanzado por la función objetivo en cada sección, como una función de la coordenada longitudinal del canal. Recordando que el inicio y fin de la curva se producen a progresivas 40 y 80 m respectivamente, puede observarse la influencia de cada tramo sobre dicha función objetivo.

Funcion objetivo, seccion 21

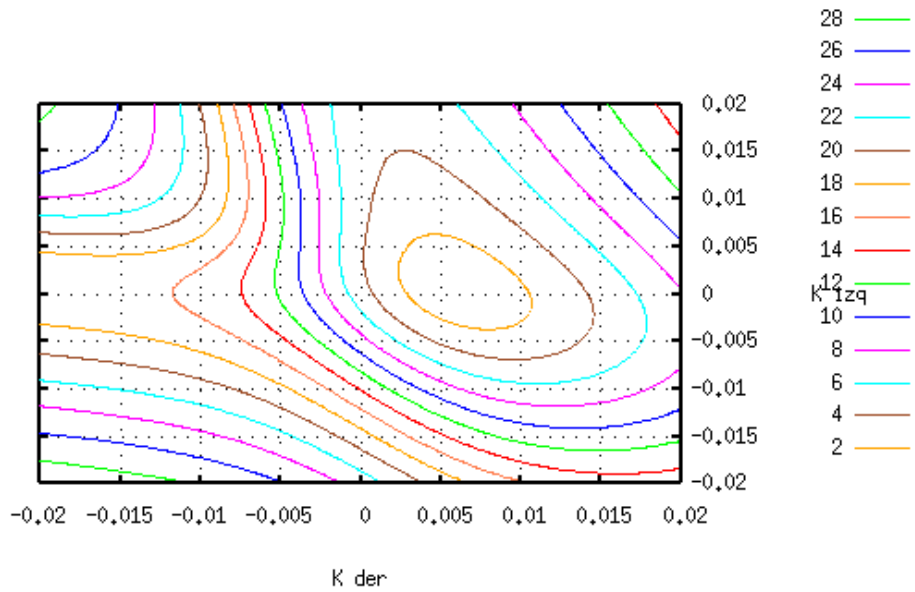


Figura 14. Función objetivo sección 21

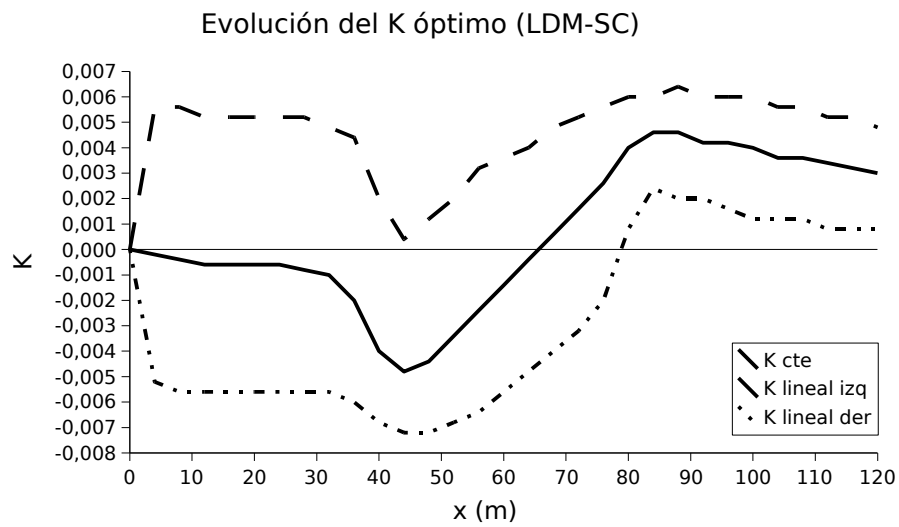


Figura 15. Evolución longitudinal del valor optimizado del parámetro K del modelo LDM-SC

sección	x (m)	K cte	K lineal izq	K lineal der
1	0	0	0	0
6	20	-0,000600	0,00520	-0,00560
11	40	-0,004000	0,00200	-0,00680
16	60	-0,001400	0,00360	-0,00560
21	80	0,004000	0,00600	0,00080
26	100	0,004000	0,00600	0,00120
31	120	0,003000	0,00480	0,00080

Tabla 2: Parámetros K calibrados en algunas secciones del modelo LDM-SC

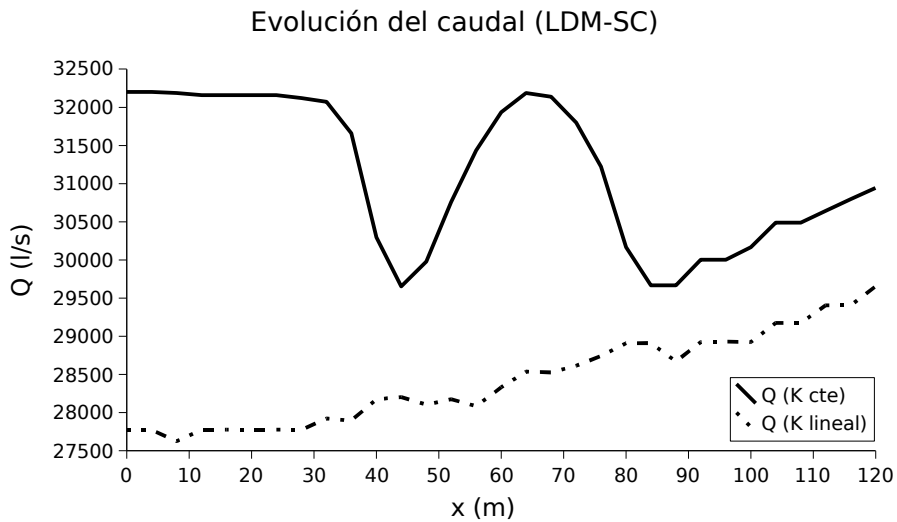


Figura 16. Evolución longitudinal del caudal obtenido con el modelo LDM-SC

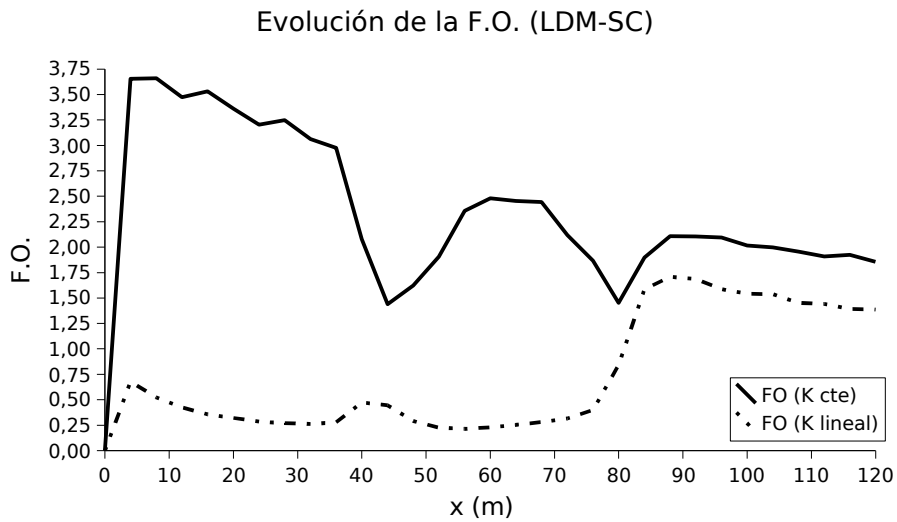


Figura 17. Evolución longitudinal de la función objetivo en la optimización del parámetro K - modelo LDM-SC

A título ilustrativo, en las figuras 18 a 24 se muestran los perfiles laterales de velocidades obtenidos en algunas secciones del canal, tanto con el modelo bidimensional (RMA2) como con el modelo unidimensional (LDM-SC) bajo las hipótesis de distribución constante y lineal del parámetro K. En la Figura 3 se muestra la ubicación de las secciones seleccionadas en el canal considerado.

9. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Como puede observarse en las figuras 18 a 24, en términos generales, el ajuste logrado por el modelo LDM-SC bajo la hipótesis de distribución lineal del parámetro K, es de mayor calidad que el logrado asumiendo un valor constante de K para toda la sección. De todos modos, para ambas hipótesis, la calidad de la predicción disminuye para el modelo LDM-SC aguas abajo de la curva. Esto podría estar vinculado a una falta de compatibilidad entre las caracterizaciones de la turbulencia en el modelo 2D y en el 1D.

En la figura 15 puede verse que a lo largo del canal, el valor óptimo del parámetro K bajo la hipótesis de distribución uniforme se mantiene acotado por los valores óptimos ajustados para la hipótesis de distribución lineal, lo cual podría indicar cierta consistencia en los valores obtenidos en la calibración.

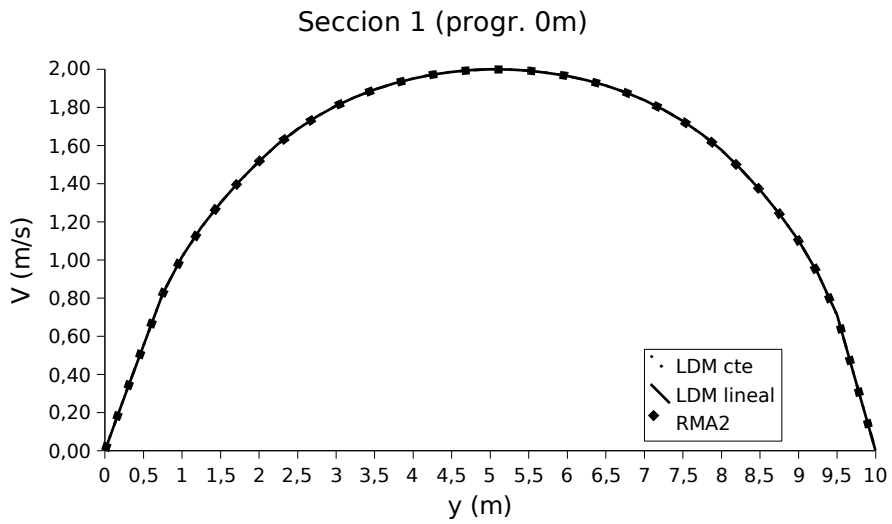


Figura 18. Perfiles de velocidades obtenidos en la sección 1

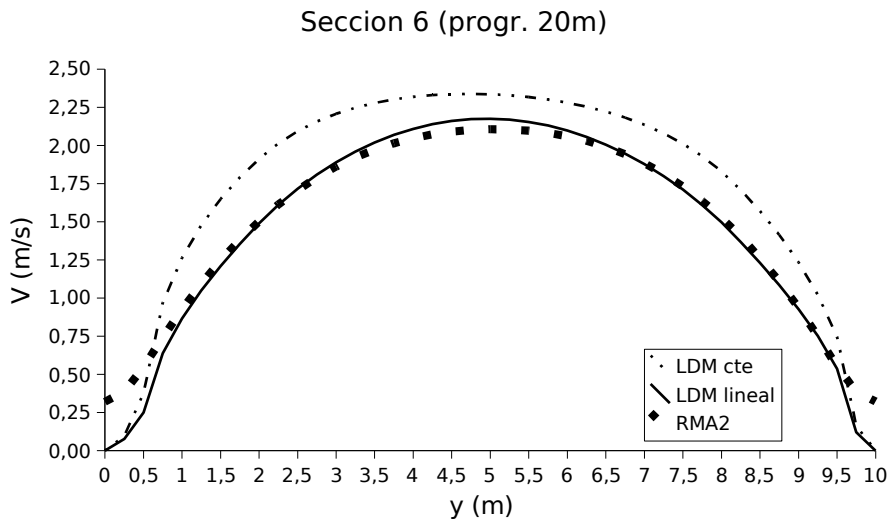


Figura 19. Perfiles de velocidades obtenidos en la sección 6

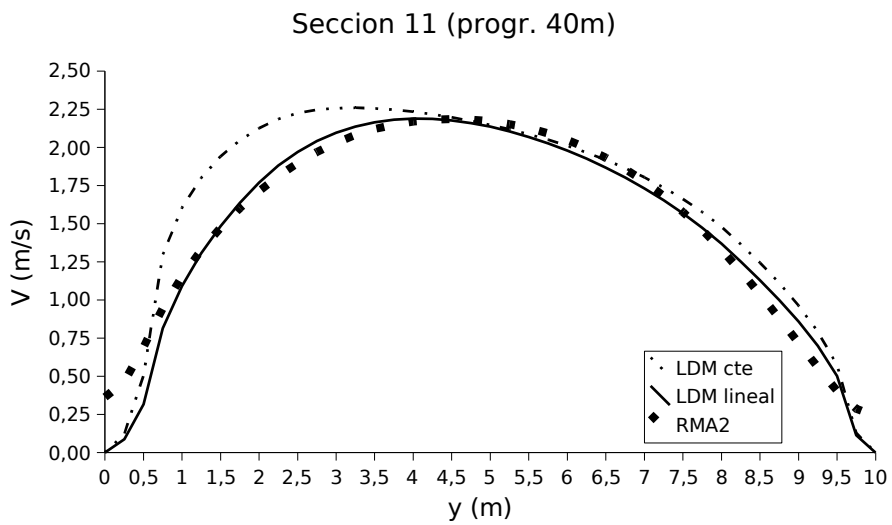


Figura 20. Perfiles de velocidades obtenidos en la sección 11

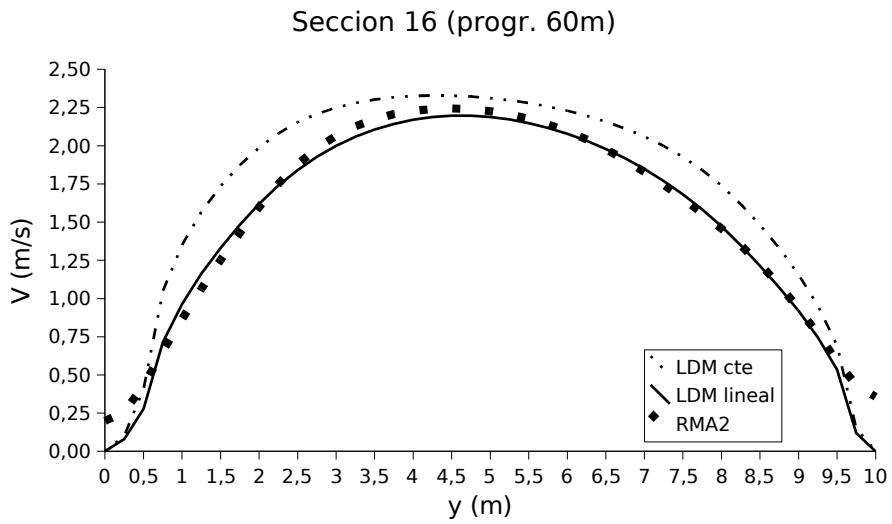


Figura 21. Perfiles de velocidades obtenidos en la sección 16

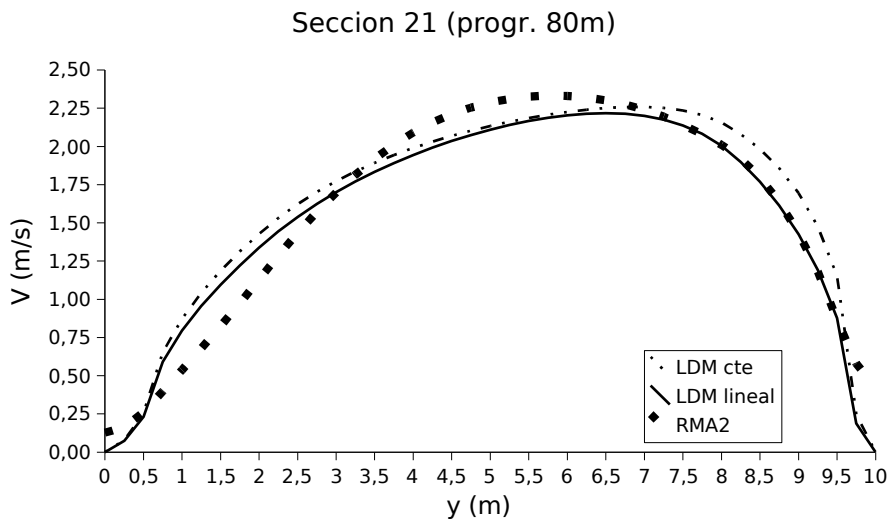


Figura 22. Perfiles de velocidades obtenidos en la sección 21

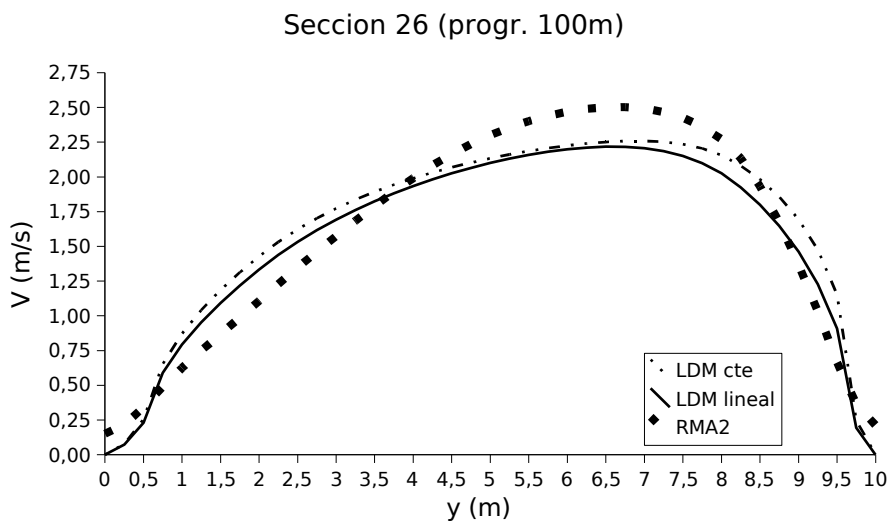


Figura 23. Perfiles de velocidades obtenidos en la sección 26

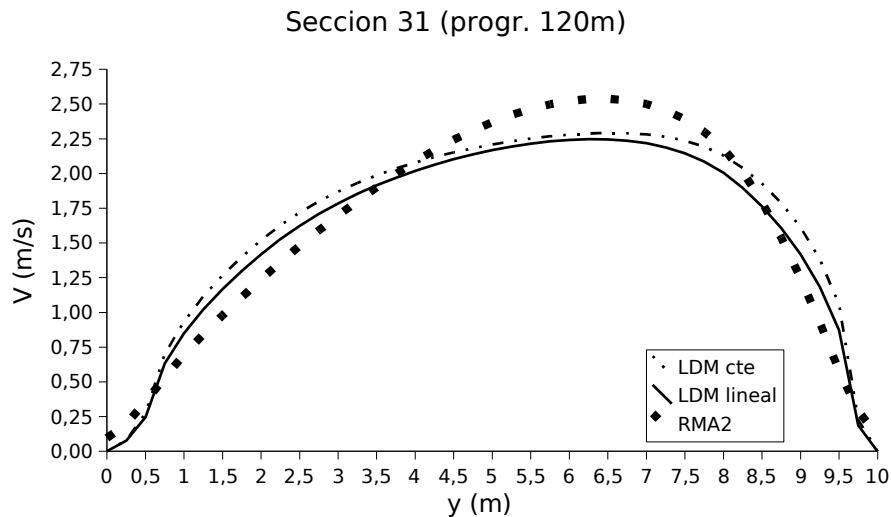


Figura 24. Perfiles de velocidades obtenidos en la sección 31

Asimismo, en la Figura 15 se observa el valor óptimo de K disminuye en forma importante al inicio de la curva (progresiva 40), luego de lo cual crece rápidamente hasta la finalización de la curva (progresiva 80) a partir de donde se insinúa un decaimiento exponencial. En esto se diferencia del comportamiento de la vorticidad media (Figura 13) que no sufre ese abrupto descenso al inicio de la curva, con lo cual puede verse que no hay una correspondencia directa entre ambas magnitudes, si bien aguas abajo de la curva aparentan un comportamiento similar (decaimiento exponencial).

10. CONCLUSIONES

Ha sido posible, a partir de un algoritmo de optimización, encontrar la variación longitudinal del parámetro K del modelo LDM-SC que permite lograr resultados comparables con los de un modelo teórico más completo y complejo, como es el modelo RMA2 con el módulo de corrección por vorticidad.

Es posible deducir que a medida que el valor de K decrece, el perfil de velocidades se sesga hacia la margen izquierda, mientras que si K crece, la máxima velocidad se desplaza hacia la margen derecha. Valores de K cercanos a 0 implican perfiles simétricos de velocidades.

Como es de esperarse, la alternativa de contar con dos parámetros K por sección aumenta la expresividad del modelo, en detrimento de la parsimonia del mismo. De todos modos, se estima que el mejor ajuste no sólo tiene una fundamentación numérica, sino que podría subyacer una ley física desconocida, como ya se describió en Weber (2007). Futuras líneas de trabajo podrían dilucidarlo. En todos los casos, es llamativa la consistencia en el comportamiento del parámetro ajustado.

No se ha detectado una relación directa entre la vorticidad media en cada sección del modelo 2D y el parámetro K ajustado para el modelo LDM-SC, a pesar de que a priori se esperaba dicha relación dado que ambas cantidades intentan parametrizar fenómenos de la misma naturaleza.

Agua abajo de la curva se produce un alejamiento entre las predicciones del modelo LDM-SC, bajo cualquier distribución de K, y los resultados obtenidos con RMA2. Esto podría tener sus raíces en las diferentes formas de modelar la turbulencia en ambos modelos, que podrían repercutir en la redistribución de las velocidades. Si bien en términos generales la forma sesgada obtenida con RMA2 se reproduce con LDM-SC sin mayor error en la posición de la máxima velocidad, las diferencias en las magnitudes llegan en algunos casos al 15%. Futuras líneas de trabajo permitirán plantear modelos de turbulencia equivalentes para ambas aproximaciones.

Se considera que el parámetro K del modelo LDM-SC permite caracterizar adecuadamente, en la actualidad en forma empírica, la intensidad de las corrientes secundarias en canales con curvas, y principalmente su influencia en la redistribución de las velocidades promedio en la vertical.

11. AGRADECIMIENTOS

El autor del presente trabajo quiere manifestar expresamente su agradecimiento a la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Tecnológica Nacional por el apoyo recibido a través del subsidio al Proyecto de I+D Consolidado 25/E117.

REFERENCIAS

- R. S. Bernard, M. L. Schneider. *Depth-averaged Numerical Modeling for Curved Channels* . Technical Report HL 92-9, U.S. Army Corps of Engineers, Hydraulics Laboratory, Vicksburg, Mississippi. 1992.
- M. H. Chaudhry. *Open-Channel Flow* . Prentice Hall, New Jersey. 1993.
- B.P. Donnell (Ed.). *User's Guide to RMA2 WES Version 4.3*. U.S. Army Corps of Engineers, Waterways Experiment Station – Hydraulic Laboratory (1996).
- A. Ervine, K. Babaeyan-Koopaei, R. Sellin. Two-dimensional solution for straight and meandering overbank flows. *Journal of Hydraulic Engineering* , ASCE, Vo. 126, No. 9: 653-669. 2000.
- Eaton, J. W. *GNU Octave: a high-level interactive language for numerical computations* . <ftp://ftp.che.wisc.edu/pub/octave>. 1997.
- J. Finnie, B. Donnell, J. Letter, R. S. Bernard. Secondary Flow Correction for Depth-Averaged Flow Calculations. *Journal of Engineering Mechanics* , Vo. 125 No. 7, pp. 848-863. 1999.
- K. Shiono, D. W. Knight. Turbulent open-channel flows with variable depth across the channel. *Journal of Fluid Mechanics* , 222: 617-646, Great Britain. 1991.
- K. Shiono, D. W. Knight. Two-dimensional analytical solution for a compound channel. *Proceedings of 3rd International Symposium on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements* , Tokyo, Japan, July (Ed. Y. Iwasa, N. Tamai y A. Wada): 503-510. 1988.
- L. Tarrab. *Estimación de la distribución lateral de velocidades: ríos argentinos* . Trabajo Final de Ingeniería Civil. Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Universidad Nacional de Córdoba. 2004.
- J. J. Thomson. On the windings of rivers in alluvial plains. *Proc. Roy. Soc. London* . 25: 5-8. 1876.
- J. F. Weber. *Modelación integrada uni y bidimensional de flujo en planicies de inundación* . Tesis de Maestría en Ciencias de la Ingeniería – mención en Recursos Hídricos. Universidad Nacional de Córdoba. 2003.
- J. F. Weber. Modelación de la Distribución Lateral de Velocidades en Cauces con Corrientes Secundarias: Caso Alto Río Paraná. *XXI Congreso Nacional del Agua, CONAGUA2007*. Tucumán. 2007.
- J. F. Weber, A. N. Menéndez. Modelo LATERAL para simular la distribución lateral de velocidades en cauces naturales. *Mecánica Computacional* , XXII: 399-409. Asociación Argentina de Mecánica Computacional, Bahía Blanca. 2003.
- J. F. Weber, A. N. Menéndez. Modelación de la Distribución Lateral de Velocidades en Canales con Curvas. *Mecánica Computacional* , XXIV: 245-264. Asociación Argentina de Mecánica Computacional, Buenos Aires. 2005.
- J. F. Weber, A. N. Menéndez. Solución Numérica del Método de la Distribución Lateral con Corrientes Secundarias. *Mecánica Computacional* , XXV: 1379-1393. Asociación Argentina de Mecánica Computacional, Santa Fe. 2006.