

FRECUENCIAS NATURALES DE VIGAS DE PARED DELGADA DOBLEMENTE ASIMÉTRICAS CARGADAS AXIALMENTE

Fernanda M. de Borbón^a, Daniel Ambrosini^a

^aÁrea de Dinámica Experimental, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo. CONICET.
Centro Universitario - Parque Gral. San Martín - (5500) Mendoza. Fax 54 0261 4380120. e-mail:
ferdeborbon@gmail.com dambrosini@uncu.edu.ar, web page:
<http://fing.uncu.edu.ar/estructural/index.html>

Palabras Clave: Vigas de pared delgada, Frecuencias naturales, Carga axial

Resumen. Las vigas de pared delgada y sección abierta son extensivamente usadas como componentes estructurales en distintos tipos de estructuras en los campos de la Ingeniería Mecánica, Aeronáutica y Civil. En el caso de vigas que tienen dos ejes de simetría en su sección transversal, la solución de vibraciones libres es suficientemente conocida y estudiada. Inclusive cuando la sección transversal tiene un eje de simetría, se ha estudiado ampliamente, en general usando la teoría de Bernoulli-Navier. Sin embargo, es bastante limitado el número de estudios para vigas doblemente asimétricas en las cuales existe un triple acoplamiento de vibraciones de flexión en dos direcciones y torsión. En trabajos anteriores se ha desarrollado un modelo teórico-numérico que considera las vibraciones flexotorsionales acopladas. En cuanto al modelo físico teórico-numérico, la formulación inicial basada en las hipótesis de Vlasov, fue modificada permitiendo la inclusión de deformaciones angulares inducidas por el esfuerzo de corte, sección variable en la dirección longitudinal e inercias rotacionales en las ecuaciones de movimiento. Se utiliza un método de integración numérica conjuntamente con el algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT) para trabajar en el dominio de la frecuencia. En este trabajo se incorpora el efecto de una carga axial a las ecuaciones flexotorsionales acopladas. Se presenta además, una comparación numérica de las frecuencias naturales de vibración.

1 INTRODUCCIÓN

La determinación de frecuencias naturales y modos de vibración de vigas continuas no amortiguadas, se discute en detalle en [Pestel and Leckie\(1963\)](#), donde también se describe el cálculo de la respuesta dinámica a excitación armónica. Por otra parte, [Ebner and Billington\(1968\)](#) usan integración numérica para estudiar las vibraciones estacionarias de vigas de Timoshenko amortiguadas. En la literatura pueden encontrarse también numerosas aplicaciones de vibración de vigas rectas y curvas, como así también arcos y estructuras de cáscara. Por otra parte, la teoría formulada por [Vlasov\(1963\)](#) ha sido ampliamente usada en el análisis dinámico de vigas de pared delgada y sección abierta, como es ejemplificado en los estudios de [Christiano and Culver\(1969\)](#) y [Yoo and Fehrenbach\(1982\)](#) en los cuales existe gran correlación entre trabajos experimentales y las predicciones teóricas de frecuencias naturales y desplazamientos inducidos en vigas rectas y curvas sometidas a cargas móviles. En vigas esbeltas, la modelación de la estructura con un gran número de elementos finitos, elementos de cáscara u otros métodos más refinados, no conduce a ninguna mejora en la correlación con resultados experimentales, porque las diferencias entre los modelos teóricos normalmente son más pequeñas que los errores experimentales.

Sin embargo, aunque la teoría de Vlasov para vigas de sección abierta ya está firmemente establecida, presenta algunas limitaciones tales como: a) Suponer que las deformaciones por corte, al igual que en la teoría de Bernoulli, no contribuyen a la flexibilidad de la viga. Por lo tanto, pueden encontrarse errores importantes en el caso de vigas poco esbeltas o en los modos altos de vigas esbeltas ([Timoshenko and Young, 1968](#)). b) También se desprecia la influencia de las inercias rotacionales en las resultantes de tensiones. c) Las ecuaciones de cuarto orden de Vlasov son válidas solamente para vigas de sección uniforme. En [Ambrosini et al. \(1995\)](#) y [Ambrosini et al. \(2000\)](#) se propuso una teoría modificada, la cual está basada en la formulación de Vlasov pero que tiene en cuenta los tres efectos mencionados anteriormente. Esta formulación, que utiliza el método de variables de estado en el dominio de la frecuencia, conduce a un tratamiento numérico eficiente, el cual puede ser muy útil en numerosas aplicaciones.

En la literatura pueden encontrarse otras teorías que también tienen en cuenta el acoplamiento entre flexión y torsión, tales como las presentadas por [Gere and Lin \(1958\)](#) que obtienen una ecuación simplificada para vigas uniformes de sección abierta y [Muller \(1983\)](#) que formula una teoría general que incluye todos los efectos de acoplamiento entre las ecuaciones de movimiento, pero que es de difícil aplicación práctica. Otras contribuciones en este campo están restringidas a aplicaciones particulares. Por ejemplo, [Aggarwal and Cranch \(1967\)](#) y [Yaman \(1997\)](#) trabajan con secciones tipo canal y [Ali Hasan and Barr \(1974\)](#) con secciones ángulo.

Más recientemente, [Tanaka and Bercin \(1999\)](#) extendieron el modelo de [Bishop et al \(1989\)](#) para estudiar acoplamiento triple de vigas uniformes usando Mathematica. La ecuaciones diferenciales presentadas por los autores mencionados tienen una confusión del sistema de coordenadas que fue clarificada por [Arpaci and Bozdog \(2002\)](#). En [Ambrosini and Danesi \(2003\)](#) se presentó un estudio numérico comparando los resultados con los obtenidos con [Arpaci and Bozdog \(2002\)](#). Luego [L.Jun et al \(2004\)](#) extendieron el modelo de [Arpaci and Bozdog \(2002\)](#) considerando el efecto de la carga axial. Obtuvieron la matriz de transferencia dinámica para una viga con sección arbitraria pero las deformaciones por corte no fueron incluidas en la formulación.

La determinación con precisión de las frecuencias naturales de vibración y de las formas modales, es de suma importancia en el diseño de vigas de pared delgada axialmente cargadas sujetas a cargas dinámicas. Aspas de helicópteros, álabes de turbinas, ejes de automóviles son

algunos ejemplos de este tipo de vigas. La utilización de materiales compuestos también induce al acoplamiento de las vibraciones flexotorsionales. L. Jun et al (2004) presentaron un modelo analítico para determinar la respuesta dinámica de vigas de pared delgada de materiales compuestos bajo carga axial considerando las deformaciones por corte e inercias rotacionales. Viola et al (2007) estudiaron el cambio en las vibraciones libres de vigas de pared delgadas luego de producidas fisuras utilizando el método de la matriz de rigidez dinámica.

En este trabajo se presenta una viga de pared delgada axialmente cargada. Se incorpora este efecto en el modelo presentado en Ambrosini et al. (2000). Se presenta una comparación numérica de las frecuencias naturales de vibración.

2 TEORÍA

2.1 Ecuaciones de movimiento

Siguiendo la convención adoptada por Vlasov, se adopta un sistema rectangular de coordenadas globales izquierdo (x, y, z). (Ver Figura 1). Los desplazamientos asociados son designados ξ, η y ζ

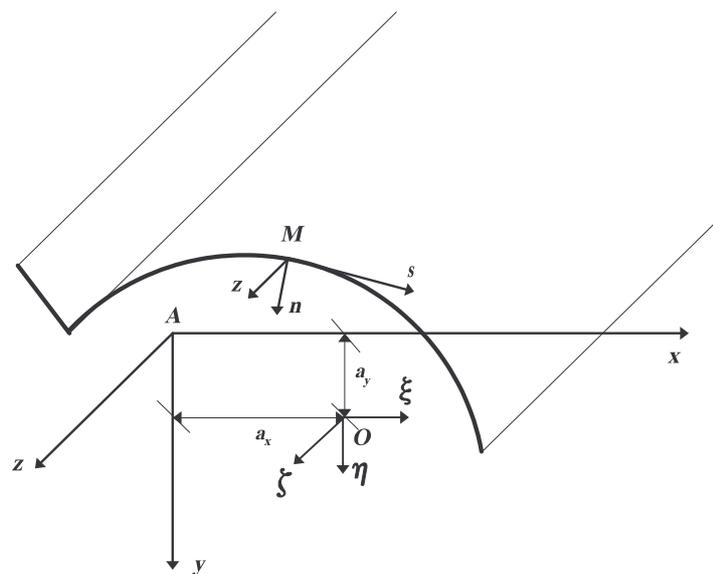


Figura 1: Definición de términos

En la figura, O representa el centroide de la sección transversal y A el centro de corte.

Se considera una fuerza axial longitudinal aplicada en un punto arbitrario de la sección e_x, e_y . Si P es una fuerza de compresión y M_x y M_y (Ver figura 2) son los momentos de flexión producidos por la carga excéntrica, se obtiene para las tensiones normales σ

$$\sigma = -\frac{P}{F_T} + \frac{M_y}{J_y} x - \frac{M_x}{J_x} y \quad (1)$$

El desplazamiento de un punto M ubicado en la sección transversal queda determinado por:

$$\begin{aligned}\xi_M &= \xi - (y - a_y)\theta \\ \eta_M &= \eta + (x - a_x)\theta\end{aligned}\quad (2)$$

Donde a_x y a_y son las coordenadas del centro de corte y θ es el giro de la sección transversal alrededor del polo.

Los esfuerzos normales $\sigma\delta s$ actuando en la sección transversal de una faja elemental, son proyectados en las direcciones de los ejes coordenados x e y como resultado de las deformaciones por flexión.

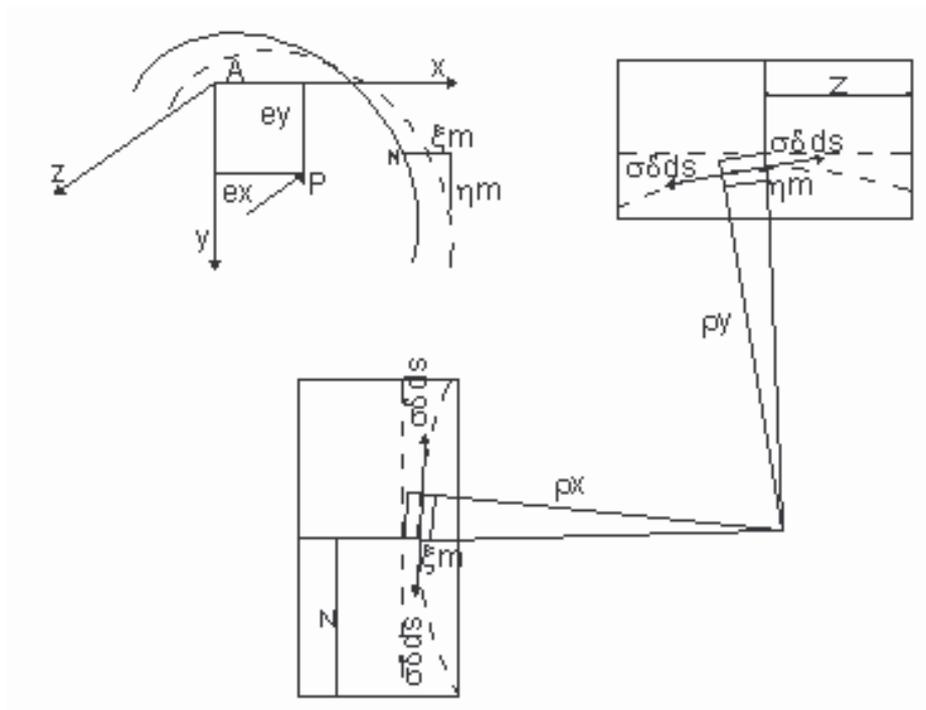


Figura 2: Proyecciones p_x y p_y

Llamando a las magnitudes de estas proyecciones p_x y p_y , y considerando que las tensiones normales no varían a lo largo de la viga obtenemos de la figura

$$\begin{aligned}p_x dz ds &= \sigma \delta s \frac{dz}{\rho_x} \\ p_y dz ds &= \sigma \delta s \frac{dz}{\rho_y}\end{aligned}\quad (3)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho_x} &= \phi'_x = \frac{\partial^2 \xi_M}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{mx}}{\partial z} \\ \frac{1}{\rho_y} &= \phi'_y = \frac{\partial^2 \eta_M}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{my}}{\partial z}\end{aligned}\quad (4)$$

Donde ρ_x y ρ_y son los radios de curvatura y γ_{mx} y γ_{my} son los valores medios de las deformaciones debidas al esfuerzo de corte. Luego

$$\begin{aligned}
p_x &= \sigma \delta \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{mx}}{\partial z} \right) - \sigma \delta (y - a_y) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \\
p_y &= \sigma \delta \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{my}}{\partial z} \right) + \sigma \delta (x - a_x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}
\end{aligned} \tag{5}$$

A partir de (5), se pueden determinar las cargas por unidad de longitud q_x , q_y y m

$$\begin{aligned}
q_x &= \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{mx}}{\partial z} \right) \int_L \sigma \delta ds - \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \int_L \sigma \delta (y - a_y) ds \\
q_y &= \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{my}}{\partial z} \right) \int_L \sigma \delta ds + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \int_L \sigma \delta (x - a_x) ds \\
m &= - \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{mx}}{\partial z} \right) \int_L \sigma \delta (y - a_y) ds + \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{my}}{\partial z} \right) \int_L \sigma \delta (x - a_x) ds + \\
&\quad + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \int_L \sigma \delta [(x - a_x)^2 + (y - a_y)^2] ds
\end{aligned} \tag{6}$$

Sustituyendo (1) en las expresiones (6) y considerando que $\delta ds = dF$; y que $S_x = S_y = J_{xy} = 0$:

$$\begin{aligned}
q_x &= -P \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{mx}}{\partial z} \right) - P(a_y - e_y) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \\
q_y &= -P \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{my}}{\partial z} \right) + P(a_x - e_x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \\
m &= -P(a_y - e_y) \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{mx}}{\partial z} \right) + P(a_x - e_x) \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{my}}{\partial z} \right) + \\
&\quad + P(-r^2 + 2\beta_y e_y - 2\beta_x e_x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}
\end{aligned} \tag{7}$$

Donde r y β_x y β_y son características geométricas

$$r^2 = a_x^2 + a_y^2 + \frac{J_x + J_y}{F_T} \tag{8}$$

$$\beta_x = \frac{U_y}{2J_y} - a_x \tag{9}$$

$$\beta_y = \frac{U_x}{2J_x} - a_y$$

$$\begin{aligned}
U_x &= \int_F y^3 dF + \int_F x^2 y dF \\
U_y &= \int_F x^3 dF + \int_F y^2 x dF
\end{aligned} \tag{10}$$

Los términos de la derecha de la expresión (10) corresponden a los momentos y productos de inercia de tercer orden de la sección considerada.

Considerando el principio de D'Alembert se obtienen las ecuaciones de movimiento para vibraciones flexotorsionales de vigas de pared delgada cargadas axialmente:

$$\begin{aligned}
 EJ_y \left(\frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} - \frac{\partial^3 \gamma_{mx}}{\partial z^3} \right) + P \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{mx}}{\partial z} \right) + P(a_y - e_y) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \\
 + \rho F_T \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \rho F_T a_y \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \rho J_y \left(\frac{\partial^4 \xi}{\partial z^2 \partial t^2} - \frac{\partial^3 \gamma_{mx}}{\partial z \partial t^2} \right) = q_x
 \end{aligned} \tag{11a}$$

$$\begin{aligned}
 EJ_x \left(\frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} - \frac{\partial^3 \gamma_{my}}{\partial z^3} \right) + P \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{my}}{\partial z} \right) - P(a_x - e_x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \\
 + \rho F_T \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \rho F_T a_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \rho J_x \left(\frac{\partial^4 \eta}{\partial z^2 \partial t^2} - \frac{\partial^3 \gamma_{my}}{\partial z \partial t^2} \right) = q_y
 \end{aligned} \tag{11b}$$

$$\begin{aligned}
 EJ_\varphi \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} - GJ_d \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + P(a_y - e_y) \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{mx}}{\partial z} \right) - \\
 - P(a_x - e_x) \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{my}}{\partial z} \right) - P(-r^2 + 2\beta_y e_y - 2\beta_x e_x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \\
 - \rho F_T (a_y \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - a_x \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + r^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}) - \rho J_\varphi \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^2 \partial t^2} = m
 \end{aligned} \tag{11c}$$

En estas ecuaciones, F_T es el área de la sección transversal, J_x y J_y son los momentos de inercia de la sección transversal en relación a los ejes principales, J_φ el momento de inercia sectorial, J_d el módulo de torsión, a_x y a_y las coordenadas del centro de corte. ρ denota la densidad de masa del material de la viga. E y G son los módulos de elasticidad longitudinal y transversal respectivamente. Finalmente, γ_{mx} y γ_{my} representan los valores medios de las deformaciones por corte sobre una sección transversal $z = \text{constante}$.

El sistema representa un modelo general para vigas que tiene en cuenta el acoplamiento triple entre las vibraciones flexionales y torsionales. Debe tenerse en cuenta que la ecuación de vibración longitudinal relacionada al desplazamiento generalizado ξ (Figura 1) está desacoplada del resto del sistema. En el caso que las vibraciones longitudinales sean de interés pueden ser tratadas independientemente.

2.2 Método de variables de estado

Si se realiza la transformada de Fourier del sistema (11) se obtiene un sistema equivalente de 12 ecuaciones diferenciales parciales con doce incógnitas en el dominio de la frecuencia.

$$\begin{aligned}
 EJ_y (\xi^{IV} - \gamma_{mx}''') + P(\xi'' - \gamma_{mx}') + P(a_y - e_y) \theta'' + \rho F_T \omega^2 \xi + \\
 + \rho F_T a_y \omega^2 \theta - \rho J_y \omega^2 (\xi'' - \gamma_{mx}') = q_x
 \end{aligned} \tag{12a}$$

$$EJ_x (\eta^{IV} - \gamma_{my}''') + P(\eta'' - \gamma_{my}) - P(a_x - e_x)\theta'' + \rho F_T \omega^2 \eta - \rho F_T a_x \omega^2 \theta - \rho J_x \omega^2 (\eta'' - \gamma_{my}') = q_y \quad (12b)$$

$$EJ_\phi \theta^{IV} - GJ_d \theta'' + P(a_y - e_y)(\xi'' - \gamma_{mx}) - P(a_x - e_x)(\eta'' - \gamma_{my}) - P(-r^2 + 2\beta_y e_y - 2\beta_x e_x)\theta'' - \rho F_T \omega^2 (a_y \xi - a_x \eta + r^2 \theta) - \rho J_\phi \omega^2 \theta'' = m \quad (12c)$$

El esquema descrito anteriormente es conocido en la literatura como “método de variables de estado”. Se seleccionan como componentes del vector \mathbf{v} de estado seis componentes geométricas y seis estáticas: Los desplazamientos ξ y η , las rotaciones de flexión ϕ_x y ϕ_y , los esfuerzos de corte Q_x y Q_y , los momentos flectores M_x y M_y , la rotación torsional θ y su derivada espacial θ' , el momento torsional total M_T y el bimomento B .

$$\mathbf{v}(z, \omega) = \{\eta, \phi_y, Q_y, M_x, \xi, \phi_x, Q_x, M_y, \theta, \theta', M_T, B\}^T \quad (13)$$

Donde

$$M_T = H_\phi + H_k \quad (14)$$

$$H_k = GJ_d \theta' \quad (15)$$

El sistema es

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = \mathbf{A} \mathbf{v} \quad (16)$$

Donde \mathbf{A} es la matriz del sistema.

Las componentes del vector de estado \mathbf{v} son designadas “variables de estado”. En el dominio de la frecuencia las variables de estado dependen de la frecuencia ω y la variable longitudinal z . Por simplicidad, se usa la misma notación para las variables de estado en el dominio del tiempo y de la frecuencia, puesto que el dominio de trabajo puede identificarse con la indicación de los argumentos de la función. Por ejemplo, $\eta(z, t)$ y $\eta(z, \omega)$ se refieren a los desplazamientos según el eje y en el dominio del tiempo y su transformada de Fourier, respectivamente. Es importante notar que la presente formulación constituye una teoría general de vigas aplicable tanto a vigas de pared delgada como a vigas sólidas.

En (17) k'_x y k'_y son los coeficientes de corte de Cowper y

$$B\theta' = \rho J_\phi \omega^2 - GJ_d \quad (17)$$

$$R = -r^2 + 2\beta_y e_y - 2\beta_x e_x \quad (18)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
0 & 1 & \frac{1}{k'_y FG} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{EJ_x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\rho F \omega^2 & 0 & 0 & \frac{P}{EJ_x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho F \omega^2 a_x & 0 & 0 & \frac{-P(a_c - e_x)}{EJ_\phi} \\
0 & \rho J_x \omega^2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k'_x FG} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EJ_y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\rho F \omega^2 & 0 & 0 & \frac{-P}{EJ_y} & 0 & -\rho F \omega^2 a_y & 0 & 0 & \frac{P(a_y - e_y)}{EJ_\phi} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho J_y \omega^2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{EJ_\phi} \\
\rho F \omega^2 a_x & 0 & 0 & \frac{-P(a_c - e_x)}{EJ_x} & -\rho F \omega^2 a_y & 0 & 0 & \frac{-P(a_y - e_y)}{EJ_y} & 0 & -\rho F \omega^2 r^2 & 0 & 0 & -\frac{PR}{EJ_\phi} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B\theta' & 1 & 0
\end{bmatrix} \quad (19)$$

2.3 Procedimiento numérico y condiciones de contorno

El sistema (16) puede integrarse fácilmente usando procedimientos numéricos estándar, tales como el método de cuarto orden Runge-Kutta, el algoritmo predictor-corrector u otros métodos. Para resolver el problema, tanto para frecuencias naturales como para la respuesta dinámica, debe transformarse el mismo de un problema de valores de borde en dos puntos a un problema de valores iniciales, como es demostrado por [Ebner and Billington \(1968\)](#). El procedimiento es normalmente aplicado en el método de matrices de transferencia ([Pestel and Leckie, 1963](#)). Las frecuencias naturales son determinadas por el método de Thomson.

En este trabajo se consideran las clásicas condiciones de contorno: empotrada, libre o simplemente apoyada.

Borde empotrado

$$\xi = \eta = 0, \phi_x = \phi_y = \theta = 0, \theta' = 0$$

Borde libre

$$Q_y = Q_x = 0, M_x = M_y = M_T = 0, B = 0$$

Borde articulado

$$\xi = \eta = 0, M_x = M_y = 0, \theta = 0, B = 0$$

3 RESULTADOS NUMÉRICOS

3.1 Modelo desarrollado

Se incorporó al programa computacional DYBEAM ([Ambrosini et al, 1995, 2000](#)) la solución obtenida en la sección 2.

Se analiza una viga doblemente asimétrica de aluminio, con sección transversal presentada en Figura 3.

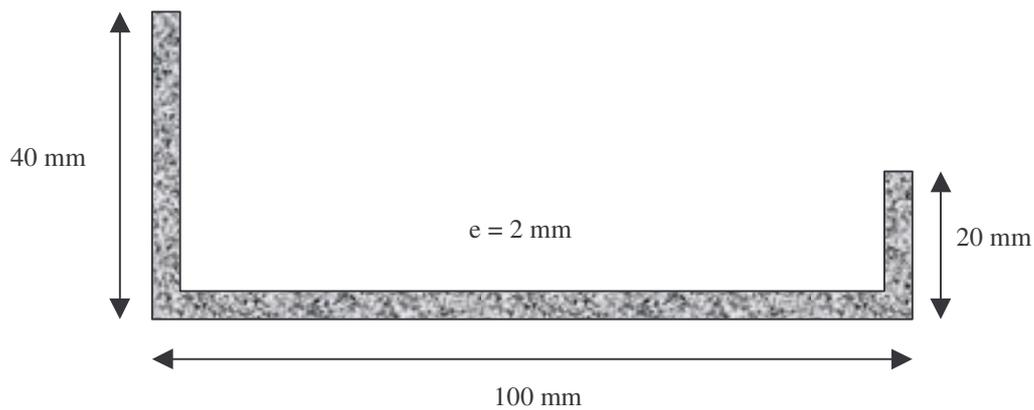


Figura 3: Sección transversal de viga de aluminio

Las propiedades mecánicas y geométricas usadas para aplicar la teoría presentada en este trabajo son:

$$\begin{aligned}
 l &= 2.00 \text{ m} \\
 F_T &= 3.2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \\
 J_x &= 3.024 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 & J_y &= 4.595 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4 \\
 J_\phi &= 2.838 \cdot 10^{-11} \text{ m}^6 & J_d &= 4.270 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4 \\
 a_x &= 2.67 \cdot 10^{-2} \text{ m} & a_y &= -1.30 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\
 E &= 4.50 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2 & \rho &= 2650 \text{ kg/m}^3 \\
 \nu &= 0.25 \\
 P &= 2000 \text{ N}
 \end{aligned}$$

La carga axial se aplicará en el centroide de la sección.

3.2 Modelo de Elementos Finitos

Con el objetivo de realizar una comparación con un modelo de elementos finitos, se utilizó el programa [SAP2000 \(2001\)](#) para modelar la viga presentada anteriormente. Se utilizaron 40 elementos tipo Shell en la dirección longitudinal, considerando los efectos flexionales y membranales. Las propiedades materiales fueron las mismas que las usadas en 3.1. A modo de ilustración se presenta en figura 4 uno de los modos de vibración obtenidos en uno de los ejemplos analizados.

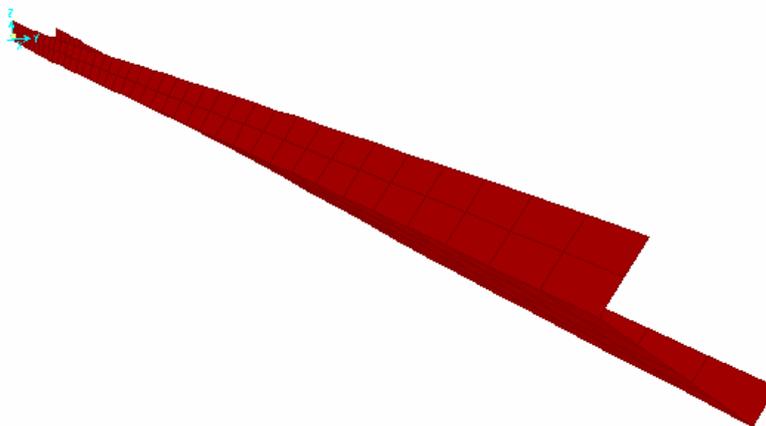


Figura 4: Modo 2. Caso 1 Empotrado – Libre. SAP 2000

3.3 Comparación de resultados

Se realiza en este punto la comparación entre los resultados numéricos. Debido a la asimetría que presentan las vigas, todos los modos de vibración son modos acoplados de flexión y torsión. Se analizan dos casos: Caso 1 Empotrado – Libre y Caso 2: Articulado – Articulado. Los resultados obtenidos se presentan en Tablas 1 y 2.

Se observa que la máxima diferencia en la obtención de las frecuencias naturales considerando la viga descargada y cargada es del orden del 25% con el programa DYBEAM. La influencia de la carga axial se reduce en los modos superiores de vibración. Estos resultados coinciden cualitativamente con los resultados obtenidos por L.Jun et al (2004). Similares resultados son obtenidos con SAP 2000, lo que valida el modelo desarrollado.

Caso 1: Empotrado – Libre				
Modo	DYBEAM f(Hz)		SAP 2000 f(Hz)	
	P=0	P=2000	P=0	P=2000
1	5.29	4.59	5.35	3.76
2	12.16	12.80	11.66	8.19
3	22.18	22.00	23.76	21.43
4	28.53	31.80	30.49	35.30
5	51.39	53.52	50.22	52.80

Tabla 1: Caso 1 Empotrado - Libre.

Caso 2: Articulado – Articulado				
Modo	DYBEAM f(Hz)		SAP 2000 f(Hz)	
	P=0	P=2000	P=0	P=2000
1	13.48	18.14	14.09	17.20
2	25.28	28.04	24.45	32.09
3	43.85	50.05	45.65	48.79
4	61.26	62.55	69.39	59.28
5	85.52	88.50	84.33	65.89

Tabla 2: Caso 2 Articulado - Articulado.

En general, existe buena correlación entre las frecuencias obtenidas con DYBEAM y SAP 2000, tanto para el caso de viga descargada como con carga axial.

4 CONCLUSIONES

Se presentan en este trabajo las ecuaciones de movimiento de vigas de pared delgada y sección abierta bajo carga axial, en el marco del método de variables de estado en el dominio de la frecuencia. Las ecuaciones tienen en cuenta la influencia de la flexibilidad por corte e inercias rotacionales, efectos éstos que son despreciados en la teoría original de Vlasov. Las ecuaciones permiten el análisis de problemas prácticos usando integración numérica conjuntamente con técnicas aplicadas rutinariamente en análisis de matrices de transferencia. Además, la teoría propuesta puede usarse para vigas sólidas en las cuales exista acoplamiento de las vibraciones flexionales y torsionales.

Se presenta una comparación numérica de las frecuencias naturales de vigas de pared delgada y sección abierta doblemente asimétrica. Puede observarse en los resultados obtenidos que el modelo presentado tiene una precisión comparable al obtenido con el método de elementos finitos usando elementos de placa, que resulta de mayor costo computacional. Por último, se aprecia el considerable efecto de la carga axial en los primeros modos de vibración para todas las condiciones de borde consideradas.

Agradecimientos

Se agradece el apoyo financiero del CONICET y la Universidad Nacional de Cuyo.

REFERENCIAS

- Aggarwal, H., and Cranch, E. "A Theory of Torsional and Coupled Bending Torsional Waves in Thin-Walled Open Section Beams." *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 34, 337-343, (1967).
- Ali Hasan, S., and Barr, A. "Linear Vibration of Thin-Walled Beams of Equal Angle-Section." *Journal of Sound and Vibration*, 32, 3-23, (1974).
- Ambrosini, R.D., Riera, J.D., and Danesi, R.F. "Dynamic Analysis of Thin-Walled and Variable Open Section Beams with Shear Flexibility", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38(17), 2867-2885, (1995).
- Ambrosini, R.D., Riera, J.D., and Danesi, R.F. "A modified Vlasov theory for dynamic analysis of thin-walled and variable open section beams", *Engineering Structures*, 22, 890-900, (2000).
- Ambrosini D., and Danesi R., "Free vibration of nonsymmetrical thin walled beams". *Mecánica Computacional* Vol. XXII, XIII Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones, ENIEF 2003, pp. 666-677. (2003).
- Arpaci, A., and Bozdog E. "On free vibration analysis of thin-walled beams with nonsymmetrical open cross-sections" *Computers and Structures*, 80, 691-695, (2002).
- Bishop, R.E.D., Cannon S.M. and Miao, S. "On Coupled bending and Torsional vibration of uniform beams." *Journal of Sound and Vibration*, 131(3), 457-64, (1989).
- Christiano, P., and Culver, C. "Horizontally Curved Bridges Subject to Moving Load." *Journal of Structural Division, ASCE*, New York, 1615-43 (1969).
- Ebner, A., and Billington, D. "Steady State Vibrations of Damped Timoshenko Beams." *Journal of the Structural Division, ASCE*, New York, 737-60, (1968).
- Gere, J., and Lin, Y. "Coupled Vibrations of Thin-Walled Beams of Open Cross Section." *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 25, 373-378, (1958).
- Jun, L. et al. "Coupled Bending and torsional vibration of nonsymmetrical axially loaded thin-walled Bernoulli-Euler beam." *Mechanics Research Communications*, 31, 697-711, (2004).
- Jun, L. et al. "Bending-torsional coupled dynamic response of axially loaded composite Timoshenko thin-walled beam with close cross section." *Composite Structures*, 64, 23-35, (2004).
- Muller, P. "Torsional-Flexural Waves in Thin-Walled Open Beams." *Journal of Sound and Vibration*, 87(1), 115-141, (1983).
- Pestel, E.C., and Leckie, F.A. *Matrix Methods in Elastomechanics*, McGraw-Hill, New York. (1963).
- SAP2000 Integrated Finite Element Analysis and Design of Structures, v. 7.42. Computers and Structures Inc. (2001).
- Tanaka, M., and Bercin A.N. "Free vibration solution for uniform beams of nonsymmetrical cross section using Mathematica" *Computers and Structures*, 71, 1-8, (1999).

- Timoshenko, S., and Young, D. *Vibration Problems in Engineering*, 3rd. Ed., Van Nostrand, Princeton, NJ. (1968)
- Viola et al. *Journal of Sound and Vibration*, 304, 124-153, (2007)
- Vlasov, V. *Thin-walled Elastic Beams*, Israel Program for Scientific Translations, 2ed. Jerusalem. (1963)
- Yaman, Y. "Vibrations of Open-section Channels: A Coupled Flexural and Torsional Wave Analysis." *Journal of Sound and Vibration*, 204(1), 131-158, (1997).
- Yoo, C., and Fehrenbach, J. "Natural Frequencies of Curved Girders." *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, New York, 339-54, (1982).