

APROXIMACIÓN NUMÉRICA PARA EL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN ESTOCÁSTICA DE UNA MÁQUINA MULTIPRODUCTO

Elina M. Mancinelli^{a,b} and Laura S. Aragone^b

^bCONICET http://www.fceia.unr.edu.ar/optimiz_control/

^aFCEyA, Universidad Nacional de Rosario

Keywords: Inecuaciones cuasivariacionales, Ecuaciones de Bellman, Procesos seccionalmente determinísticos, Procesos de Poisson.

Abstract. En este trabajo presentamos un esquema de discretización para resolver la optimización de un sistema de producción dado por una máquina multi-producto con demandas seccionalmente determinísticas. Dichas demandas sólo pueden tomar un número finito de valores y sus puntos de conmutación son descriptos por medio de un proceso de Poisson.

1 INTRODUCCIÓN

Consideramos en este trabajo un procedimiento de discretización para un problema de punto fijo relacionado con la optimización de un sistema de producción que comprende una máquina multiproducto con demandas seccionalmente determinísticas. La demanda puede tomar un número finito de valores y los cambios están descritos por un proceso de Poisson. Además de la producción propia del sistema, son permitidas compras externas para hacer frente a la demanda.

Estos procesos seccionalmente determinísticos fueron introducidos por Davis in (5) y algunos resultados sobre el control de los mismos pueden verse en (8)-(9).

El enfoque teórico de este problema fue presentado en (11). En el mismo se caracteriza la función de costo óptimo, tomando en cuenta los costos de conmutación, como la solución en el sentido de la viscosidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) asociada (see (4), (6), (13)).

El método que presentamos aquí discretiza esta ecuación de HJB, de un modo especial aprovechando la linealidad de la dinámica del sistema

Probamos la existencia y unicidad de solución para el problema discreto, presentamos una prueba de la convergencia de la solución discreta a la solución del problema continuo. Finalmente acotamos el orden de convergencia (gracias a la Hölder continuidad de la función de costo óptimo (11)) y presentamos un ejemplo donde obtenemos por simulación, la evolución del sistema siguiendo la política subóptima calculada.

2 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

2.1 Sistema de producción

En todo momento la máquina está o detenida o produciendo uno de los m diferentes productos. Siendo $D = \{0, 1, \dots, m\}$, asignamos los siguientes valores a los distintos estados de la máquina

- $d = 0$, no producción
- $d = 1, \dots, m$, producción ítem d .

Para cada ítem $d = 1, \dots, m$, definimos los datos del problema como sigue:

- p_d producción por unidad de tiempo cuando la máquina está en el estado d .
- n_d cantidad posible de demandas para el ítem d .
- \mathcal{J} conjunto de posibles demandas,

$$\mathcal{J} = \prod_{d=1}^m \{1, \dots, n_d\} \text{ and } |\mathcal{J}| = \prod_{d=1}^m n_d.$$

- Para cada $j \in \mathcal{J}$, $r_j = (r_{1j}, \dots, r_{mj})$ es el vector de demanda, i.e. r_{dj} es la demanda por unidad de tiempo para el ítem d .
- λ_{ij} densidad de probabilidad de cambio entre los estados i y j .
- M_d máximo stock permitido para el ítem d .

- $f(x, d)$ costo instantáneo de producción y almacenamiento.
- $q(d, \tilde{d})$ costo de conmutación para la máquina del estado d al estado \tilde{d} .
- α factor de descuento.

Supondremos las siguientes hipótesis para el costo de conmutación:

$$\begin{cases} q(d, d) = 0, & \forall d \in D, \\ q(d, \tilde{d}) \geq q_0 > 0, & \forall \tilde{d} \neq d, \\ q(d, \hat{d}) < q(d, \tilde{d}) + q(\tilde{d}, \hat{d}), & \forall d \neq \tilde{d} \neq \hat{d}. \end{cases} \quad (1)$$

Supondremos también que las conmutaciones son instantáneas y que se verifica la siguiente condición entre las demandas y la producción:

$$\sum_{d=1}^m \frac{r_{dj}}{p_d} < 1 \quad \forall j \in \mathcal{J}. \quad (2)$$

Trabajamos bajo esta hipótesis ya que la condición $\sum_{d=1}^m \frac{r_{dj}}{p_d} = 1$ permite a la máquina estar en el estado de no producción sólo a lo sumo un tiempo total $\tau = \max_{j \in \mathcal{J}} \left(\sum_{d=1}^m \frac{x_{dj}}{r_{dj}} \right)$ (x_{dj} estado inicial) y esto no es razonable para un problema con horizonte infinito.

2.2 Estados admisibles

El espacio de estados admisibles está dado por $Q = \prod_{d=1}^m [0, M_d]$, $e = (M_1, M_2, \dots, M_m)$ representa el punto de máximo stock.

Queremos distinguir ciertas partes de la frontera de Q para ello definimos una función $a : Q \rightarrow \{0, 1, 2\}^m$ del siguiente modo

$$a_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_i = 0, \\ 1 & \text{si } x_i \in (0, M_i), \\ 2 & \text{si } x_i = M_i. \end{cases}$$

y consideramos

$$\Gamma(a_1, \dots, a_m) = \{x \in Q : a(x) = (a_1, \dots, a_m)\},$$

Las demandas r_{dj} son siempre positivas, por lo tanto si los niveles de stock de al menos dos items llega a cero simultáneamente, el colapso del sistema de producción es inevitable para cualquier política de producción admisible. Por eso consideramos el caso en el que es posible hacer compras externas para modificar el stock con medios adicionales a la producción. Para simplificar el análisis, suponemos que cada vez que se realizan compras externas, las mismas tienen un costo fijo A y el sistema salta instantáneamente al punto de máximo stock $e = (M_1, M_2, \dots, M_m)$.

Las porciones de frontera de Q a distinguir son

$$\begin{cases} \gamma_d^- = \bigcup \{ \Gamma(a_1, \dots, a_d, \dots, a_m) : a_d = 0 \}, \\ \gamma_d^+ = \bigcup_a \{ \Gamma(a_1, \dots, a_d, \dots, a_m) : a_d = 2 \}, \\ \gamma_d = (\gamma_d^+ \cup \bigcup_{\tilde{d} \neq d} \gamma_{\tilde{d}}^-) \quad \gamma_0 = \bigcup_{d=1}^m \gamma_d^- . \end{cases} \quad (3)$$

2.3 Evolución del sistema

El estado y sigue una evolución dada por

$$\frac{dy}{dt} = g(\beta(t), j) \quad \text{donde} \quad g_d(\beta, j) = \begin{cases} -r_{dj} & \text{if } \beta \neq d, \\ p_d - r_{dj} & \text{if } \beta = d. \end{cases} \quad (4)$$

La evolución del sistema depende del estado actual de la demanda. El estado de la demanda r está dado por una cadena de Markov continua con una densidad de probabilidad λ_{ij} de transición entre el estado i y el estado j

Además valen las siguientes hipótesis

$$\left\{ \begin{array}{ll} |f(x, d)| \leq M_f & \forall x \in Q, \quad \forall d \in D, \\ q(d, \tilde{d}) \leq M_q & \forall d, \tilde{d} \in D, \\ \|g(d, j)\| \leq M_g & \forall j \in \mathcal{J}, \quad \forall d \in D, \\ |f(x, d) - f(\bar{x}, d)| \leq L_f \|x - \bar{x}\| & \forall x, \bar{x} \in Q, \quad \forall d \in D. \end{array} \right. \quad (5)$$

2.4 Controles admisibles

Un control admisible está dado por una sucesión (θ_i, d_i) , donde θ_i son los tiempos de conmutación del control (estado de la producción) y d_i es el estado de la producción después del tiempo θ_i (θ_i son stopping times adaptados al proceso y d_i son funciones aleatorias seccionalmente constantes adaptadas al proceso de las demandas (ver (2)). El control debe verificar además la restricción adicional dada por: $y(t) \in Q, \forall t \in [0, \infty)$.

Notamos B_x^{dj} el conjunto de controles admisibles.

Nota 1 Puede probarse que para los propósitos de optimización sólo se necesita considerar el subconjunto de controles admisibles Markovianos. Dada una función $\mathcal{D} : Q \times D \times \mathcal{J} \rightarrow D$, tal que

$$\mathcal{D}(x, \mathcal{D}(x, d, j), j) = \mathcal{D}(x, d, j), \quad \forall x \in Q, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \quad \forall d \in D, \quad (6)$$

el control en feedback $d(\cdot)$ (ver (6)) está definido como

$$d(t) = \mathcal{D}(y(t), d(t-), j(t)).$$

Bajo condiciones adicionales apropiadas, (i.e. que la ecuación (4) tenga solución única cuando $\beta(t) = \mathcal{D}(y(t), \beta(t-), j(t))$), el estado de producción $d(t)$ resulta una función seccionalmente constante con un número finito de saltos en cualquier intervalo finito, i.e. $d = d_i$ en el intervalo $(\theta_i, \theta_{i+1}]$, con

$$\begin{aligned} 0 = \theta_0 \leq \theta_1 < \dots < \theta_i < \theta_{i+1} < \dots; \\ d_i \in \{0, 1, \dots, m\}; \quad d_i \neq d_{i+1}; \quad i = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Además por (1) no son permitidos los lazos cerrados instantáneos de permutación del control.

2.5 El problema de punto fijo

Definición 1 Usaremos la siguiente notación y variables auxiliares

$$\tilde{\alpha}_j = \alpha + \sum_{i \neq j} \lambda_{ji},$$

$$\tau(x, d, j) = \sup\{t : x + t g(d, j) \in Q\}. \quad (7)$$

Definición 2 Siendo $\mathcal{J} = \prod_{d=1}^m \{1, \dots, n_d\}$, $|\mathcal{J}| = \prod_{d=1}^m n_d$ y $B(\bar{\Omega})^{(m+1) \times |\mathcal{J}|}$ el conjunto de las funciones medibles Borel y acotadas, definimos el operador $S : B(Q)^{(m+1) \times |\mathcal{J}|} \rightarrow B(Q)^{(m+1) \times |\mathcal{J}|}$, del siguiente modo ($\forall d \in D, \forall j \in \mathcal{J}, \forall x \in Q$)

$$(SW)_{dj}(x) = \min_{\tilde{d} \neq d} (\min(W_{\tilde{d}j}(x) + q(d, \tilde{d})), W_{dj}(e) + A), \quad (8)$$

Definición 3 Definimos el operador $P : B(Q)^{(m+1) \times |\mathcal{J}|} \rightarrow B(Q)^{(m+1) \times |\mathcal{J}|}$, del siguiente modo ($\forall d \in D, \forall j \in \mathcal{J}, \forall x \in Q$)

$$(Pw)_{dj}(x) = \inf_{\tau \leq \tau(x, d, j)} \left(\int_0^{\tau} e^{-\tilde{\alpha}_j s} (f(y(s), d) + \sum_{i \neq j} \lambda_{ji} w_{di}(y(s))) ds + e^{-\tilde{\alpha}_j \tau} (Sw)_{dj}(y(\tau)) \right), \quad (9)$$

donde $y(s) = x + s g(d, j)$.

En (11), usando las técnicas clásicas basadas en el Principio de la Programación Dinámica y la teoría de soluciones en el sentido de la viscosidad se prueban las siguientes propiedades.

Teorema 1

1. Existe $V \in C(\bar{\Omega})$ tal que

$$V = PV \quad (10)$$

2. V es una función Hölder continua en Ω .

3. $\forall x \in \Omega, \forall d \in D, \forall j \in \mathcal{J}$ se verifican las siguientes condiciones:

(a) $V_{dj}(x) \leq (SV)_{dj}(x)$.

(b) $V_{dj}(x) \leq \int_0^t e^{-\tilde{\alpha}_j s} (f(y(s), d) + \sum_{i \neq j} \lambda_{ji} V_{di}(y(s))) ds + e^{-\tilde{\alpha}_j t} V_{dj}(x + t g(d, j)),$

$$\forall t \leq \tau(x, d, j), \text{ siendo } y(s) = x + s g(d, j).$$

(c) Más aun, si para algún $x \in \Omega$ se tiene una desigualdad estricta entonces existe $t_{x,d,j} > 0$ tal que

$$V_{dj}(x) = \int_0^t e^{-\tilde{\alpha}_j s} (f(y(s), d) + \sum_{i \neq j} \lambda_{ji} V_{di}(y(s))) ds + e^{-\tilde{\alpha}_j t} V_{dj}(x + t g(d, j)), \quad (11)$$

$$\forall 0 \leq t \leq t_{x,d,j} \leq \tau(x, d, j).$$

4. Para todo $d \neq 0$ se verifican las siguientes condiciones de frontera ∂Q :

$$\begin{aligned} V_{\tilde{d}j}(x) &= (SV)_{\tilde{d}j}(x) & \forall x \in \gamma_{\tilde{d}}^-, \quad \forall \tilde{d} \neq d, \\ V_{dj}(x) &= (SV)_{dj}(x) & \forall x \in \gamma_d^+. \end{aligned} \tag{12}$$

Nota 2 Notar que (3) es la forma integral de la ecuación de HJB, que la primera condición en (4) impide la rotura de stock para el ítem d y que la segunda prohíbe al stock del ítem d sobrepasar su nivel máximo.

3 PROBLEMA DISCRETO

3.1 Elementos del problema discreto

Para definir el problema discreto introducimos una aproximación que comprende el espacio $W^{1,\infty}(\Omega)$ y la ecuación (10). Usamos técnicas presentadas en (3) y (1).

3.1.1 Aproximación del dominio

Identificamos la discretización de las variables espaciales con el parámetro k , (también el tamaño de la discretización). Sea $h > 0$, para cada $j \in \mathcal{J}$ definimos la discretización uniforme B^{jk} de \mathbb{R}^m dada por:

- $B^{jk} = \left\{ \sum_{d=0}^m \zeta_d e_j^d : \zeta_d \text{ is integer} \right\}$,
- $h_j^0 = \left(1 - \sum_{d=1}^m \frac{r_{dj}}{p_d} \right) h$,
- $h_j^d = \frac{r_{dj}}{p_d} h$,
- $e_j^0 = (-r_{1j}, \dots, -r_{dj}, \dots, -r_{mj}) h_j^0$,
- $e_j^d = (-r_{1j}, \dots, -r_{(d-1)j}, p_d - r_{dj}, -r_{(d+1)j}, \dots, -r_{mj}) h_j^d$.

Para cada estado de la demanda j aproximamos Q con $Q_{jk} = \bigcup_{\mu} S_{\mu}^{jk}$, donde $\{S_{\mu}^{jk}\}$ es el máximo conjunto de poliedros de \mathbb{R}^m que verifica

$$S_{\mu}^{jk} = x_{\mu}^j + \left\{ \sum_{d=1}^m \xi_d e_j^d : \xi_d \in [0, 1] \right\}, \quad x_{\mu}^j \in B^{jk}, \quad S_{\mu}^{jk} \subset Q.$$

Definimos $k_j = \max_{\mu}(\text{diam } S_{\mu}^{jk})$, $k = \max_{j \in \mathcal{J}}(k_j)$.

Notamos $\mathcal{V}^{jk} = \{x_{\mu}^j, \mu = 1, \dots, N_j\}$ al conjunto de nodos de Q_{jk} , donde N_j es el cardinal de \mathcal{V}^{jk} .

Nota 3 Si k es suficientemente pequeño para dos vértices cualesquiera de \mathcal{V}^{jk} siempre existe un camino dado por una trayectoria del sistema (una trayectoria especial sin cambios de demandas) que une el primer vértice con el segundo.

3.1.2 Interpretación de Q_{jk}

Para cada estado de la demanda j el mallado especial utilizado origina un problema de control óptimo discreto. En dicho problema, el sistema sigue una evolución dada por una ecuación diferencial (4) pero los controles d_i se aplican durante intervalos cuya longitud es $\zeta_d h_j^{d_i}$ con $\zeta_d \in \mathbb{N}$ y el estado inicial x debe ser un nodo de \mathcal{V}^{jk} . En consecuencia, la trayectoria asociada a este control alcanza un nodo del mallado V en todo momento de cambio.

3.1.3 Aproximación de la frontera

Definamos $\forall d = 1, \dots, m, \forall j \in \mathcal{J}$,

$$\gamma_{k,d,j}^+ = \{x_\mu^j \in \mathcal{V}^{jk} : x_\mu^j + h^d g(d, j) \notin Q_{jk}\},$$

$$\gamma_{k,d,j}^- = \{x_\mu^j \in \mathcal{V}^{jk} : x_\mu^j + h^{\tilde{d}} g(\tilde{d}, j) \notin Q_{jk}, \forall \tilde{d} \neq d\}.$$

3.1.4 Aproximación del espacio de funciones \bar{F}_k

Dividamos cada elemento cuadrilátero S_μ^{jk} en simples tales que las aristas son coincidentes con las líneas de la forma $x_\mu^j + s g(d, j), s \geq 0$. Consideremos ahora el conjunto de funciones \bar{F}_k definido por

$$w : \left(\prod_{j \in |\mathcal{J}|} Q_{jk} \right) \times D \rightarrow \mathbb{R}, \quad w_{dj}(\cdot) \in W^{1,\infty}(Q_{jk}),$$

tal que en cada simplex $w_{dj}(\cdot)$ es una función afín del tipo $a_0 + \sum_{i=1}^m a_i x_i$.

Obviamente cualquier $w \in \bar{F}_k$ está enteramente caracterizado por los valores $w_{dj}(x_\mu^j), x_\mu^j \in \mathcal{V}^{jk}, d \in D, j \in \mathcal{J}, \mu = 1, \dots, N_j$.

3.2 La ecuación discreta

3.2.1 Un problema de punto fijo discreto

Sea

$$(\mathcal{L}_k w)_{dj}(x_\mu^j) = \begin{cases} \frac{1}{1+\tilde{\alpha}_j h_j^d} (w_{dj}(x_\mu^j + h_j^d g(d, j)) + h_j^d f(x_\mu^j, d) + h_j^d \sum_{i \neq j} \lambda_{ji} w_{di}(\pi_{Q_{ik}}(x_\mu^j))), \\ \quad \forall x_\mu^j \in (\mathcal{V}^{jk} \setminus (\gamma_{k,d,j}^+ \cup (\bigcup_{r \neq d} \gamma_{k,r,j}^-))), \\ +\infty \quad \forall x_\mu^j \in (\gamma_{k,d,j}^+ \cup (\bigcup_{r \neq d} \gamma_{k,r,j}^-)), \end{cases}$$

donde $\pi_{Q_{ik}}(x_\mu^j)$ es la proyección de x_μ^j sobre el conjunto Q_{ik} y

$$(S_k w)_{dj}(x_\mu^j) = \min_{\tilde{d} \neq d} (\min(w_{\tilde{d}j}(x_\mu^j) + q(d, \tilde{d})), w_{dj}(\pi_{Q_{jk}}(e)) + A),$$

donde $\pi_{Q_{jk}}(e)$ es la proyección de e sobre Q_{jk} .

De esta manera, $(\mathcal{L}_k w)_{dj}(x_\mu^j)$ resulta la discretización natural de (11) e incluye las condiciones de frontera (12).

Sea $P_k : \bar{F}_k \rightarrow \bar{F}_k$ tal que $\forall x_\mu^j \in \mathcal{V}^{jk}, \forall d \in D, \forall j \in \mathcal{J}$

$$(P_k w)_{dj}(x_\mu^j) = \min((\mathcal{L}_k w)_{dj}(x_\mu^j), (S_k w)_{dj}(x_\mu^j)) \quad (13)$$

definimos

Problema P^k : Encontrar el punto fijo del operador P_k .

3.2.2 Existencia y unicidad de solución discreta

Usando las técnicas introducidas en (7) se puede caracterizar a U^k como la única solución del problema P^k .

Teorema 2 *Existe un único punto fijo de operador P_k , i.e. $\exists! U^k$ tal que $U^k = P_k U^k$. Mas aún $\forall w \in \bar{F}_k$ tenemos $U^k = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (P_k)^\nu w$ y además valen las siguientes estimaciones de convergencia:*

$$\|P_k^\nu w - U^k\| \leq K(\rho)(1 - \mu(\rho))^\nu, \quad (14)$$

donde $0 < \mu(\rho) \leq 1$ y $K(\rho) > 0$, ρ depende de $\|w\|$.

Demostración Usaremos las técnicas empleadas en ((?)). Para ello veremos primero que los conjuntos de supersoluciones y subsoluciones son no vacíos o sea, existen al menos dos soluciones \bar{s} y \bar{w} tal que:

$$a) P_k \bar{s} \leq \bar{s} \quad b) P_k \bar{w} \geq \bar{w}$$

a) Sea \bar{s} tal que $\forall d, \forall j$ vale

$$\bar{s}_{dj}(x_\mu^j) = \begin{cases} \frac{M_f}{\alpha} + \frac{M_q}{\eta\alpha}, & x_\mu^j \in (\mathcal{V}^{jk} \setminus (\gamma_{k,d,j}^+ \cup (\bigcup_{r \neq d} \gamma_{k,r,j}^-))), \\ \frac{M_f}{\alpha} + \frac{M_q}{\eta\alpha} + M_q + A, & x_\mu^j \in (\gamma_{k,d,j}^+ \cup (\bigcup_{r \neq d} \gamma_{k,r,j}^-)) \setminus \{0\}, \end{cases}$$

donde η verifica

$$\eta \leq \min_{dj} (h_j^d). \quad (15)$$

Veamos que \bar{s} es una supersolución.

Consideraremos dos casos:

Caso (i) : $x_\mu^j \in (\mathcal{V}^{jk} \setminus (\gamma_{k,d,j}^+ \cup (\bigcup_{r \neq d} \gamma_{k,r,j}^-)))$

$$\begin{aligned} (P_k \bar{s})_{dj}(x_\mu^j) &\leq \frac{1}{1 + \tilde{\alpha}_j h_j^d} (\bar{s}_{dj}(x_\mu^j + h_j^d g(d, j)) + h_j^d (f(x_\mu^j, d) + \sum_{i \neq j} \lambda_{ji} \bar{s}_{di}(\pi_{Q_{ik}}(x_\mu^j)))) \\ &\leq \frac{1}{1 + \tilde{\alpha}_j h_j^d} \left(\frac{M_f}{\alpha} + \frac{M_q}{\eta\alpha} + M_q + h_j^d M_f + h_j^d \sum_{i \neq j} \lambda_{ji} \left(\frac{M_f}{\alpha} + \frac{M_q}{\eta\alpha} \right) \right) \\ &= \frac{1}{1 + \tilde{\alpha}_j h_j^d} \left(M_f \left(\frac{1}{\alpha} + h_j^d + \frac{h_j^d}{\alpha} \sum_{i \neq j} \lambda_{ji} \right) + M_q \left(\frac{1}{\eta\alpha} + 1 + \frac{h_j^d}{\eta\alpha} \sum_{i \neq j} \lambda_{ji} \right) \right) \\ &= \frac{1}{1 + \tilde{\alpha}_j h_j^d} \left(\frac{M_f}{\alpha} (1 + \tilde{\alpha}_j h_j^d) + \frac{M_q}{\eta\alpha} (1 + \eta\alpha + h_j^d \sum_{i \neq j} \lambda_{ji}) \right) \\ &\leq \frac{M_f}{\alpha} + \frac{M_q}{\eta\alpha} = \bar{s}_{dj}(x_\mu^j), \end{aligned}$$

esta última inecuación vale gracias a (15).

Caso (ii) : $x_\mu^j \in (\gamma_{k,d,j}^+ \cup (\bigcup_{r \neq d} \gamma_{k,r,j}^-))$

Trataremos el caso donde x_μ^j pertenece a al menos dos γ^- en este caso el operador S obliga al

sistema a saltar al punto $\pi_{Q_{jk}}(e)$ pagando un costo A , así se tiene

$$\begin{aligned} (P_k \bar{s})_{dj}(x_\mu^j) &= (S \bar{s})_{dj}(x_\mu^j) \leq A + \bar{s}_{dj}(\pi_{Q_{jk}}(e)) \leq A + M_q + \bar{s}_{0j}(\pi_{Q_{jk}}(e)) = \\ &= A + M_q + \frac{M_f}{\alpha} + \frac{M_q}{\eta\alpha} = \bar{s}_{dj}(x_\mu^j). \end{aligned}$$

Luego \bar{s} es supersolución.

b) Sea w dada por

$$w_{dj} = -\frac{M_f}{\alpha}, \quad \forall d \in D, \forall j \in \mathcal{J}.$$

Veamos que es subsolución.

Como $q(d, \tilde{d}) \geq 0$, tenemos

$$(S_k w)_{dj} \geq w_{dj}, \quad \forall d \in D, \forall j \in \mathcal{J}.$$

Veamos que el operador L_k verifica

$$(\mathcal{L}_k w)_{dj} \geq w_{dj}, \quad \forall d \in D, \forall j \in \mathcal{J}.$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_k w)_{dj}(x_\mu^j) &= \frac{1}{1+\tilde{\alpha}_j h_j^d} (w_{dj}(x_\mu^j + h_j^d g(d, j)) + h_j^d (f(x_\mu^j, d) + \sum_{i \neq j} \lambda_{ji} w_{di}(\pi_{Q_{ik}}(x_\mu^j)))) \\ &\geq \frac{1}{1+\tilde{\alpha}_j h_j^d} (-\frac{M_f}{\alpha} - h_j^d M_f - h_j^d \frac{M_f}{\alpha} \sum_{i \neq j} \lambda_{ji}) \\ &= \frac{-M_f}{\alpha(1+\tilde{\alpha}_j h_j^d)} (1 + \alpha h_j^d + h_j^d \sum_{i \neq j} \lambda_{ji}) \\ &\geq -\frac{M_f}{\alpha} = w_{dj}(x_\mu^j). \end{aligned}$$

Entonces $\forall d \in D, \forall j \in \mathcal{J}$

$$w_{dj} \leq \min((\mathcal{L}_k w)_{dj}^k, (S_k w)_{dj})$$

resulta w subsolución de P_k .

La parte restante es análoga a lo presentado para el problema continuo y puede verse en (11).

4 RESULTADOS DE CONVERGENCIA

Teorema 3 *Vale la siguiente estimación del error*

$$\|U^k - V\|_\infty \leq K h^\gamma.$$

Demostración Designaremos con h el parámetro de discretización del dominio Ω , y con U^k la solución discreta asociada a este parámetro. Luego U^k viene dada por

$$U_{dj}^k(x_\mu^j) = \min((\mathcal{L}_k U^k)_{dj}(x_\mu^j), (S_k U^k)_{dj}(x_\mu^j)) \quad \forall x_\mu^j \in \mathcal{V}^{jk}, \forall d \in D, \forall j \in \mathcal{J},$$

Queremos calcular la diferencia entre esta función y la solución del problema.

Veamos primero $V - U^k$. Sea

$$\Delta_1 = \max\{V_{dj}(x_i) - U_{dj}^k(x_i), x_i \in \mathcal{V}^{jk}, j \in \mathcal{J}, d \in D\}.$$

Luego, si con x_0 llamamos al punto donde se realiza este máximo, tenemos

$$U_{d_j}^k(x_0) = \min\{(1 - \tilde{\alpha}_j h_{d_j})U_{d_j}^k(x_0 + h_{d_j} g(d, j)) + h_{d_j} (f(x_0, d)) \\ + \sum_{i \neq j} \lambda_{j_i} U_{d_i}^k(\pi_{Q_{i_k}} x_0), (\mathcal{S}_k U^k)_{d_j}(x_0)\}.$$

Usando un argumento recursivo podemos suponer que el mínimo es alcanzado en la primera componente que aparece en el operador, esto es

$$U_{d_j}^k(x_0) = (1 - \tilde{\alpha}_j h_{d_j})U_{d_j}^k(x_0 + h_{d_j} g(d, j)) + h_{d_j} (f(x_0, d) + \sum_{i \neq j} \lambda_{j_i} U_{d_i}^k(\pi_{Q_i}(x_0))).$$

Entonces $x_0 \notin (\gamma_{h,d,j}^+ \cup (\bigcup_{r \neq d} \gamma_{h,r,j}^-))$, y luego $x_0 + h_{d_j} g(d, j) \in Q_{j_k} \subset \Omega$; en consecuencia

$$h_{d_j} < \tau(x_0, d, j) = \sup\{t : x_0 + t g(d, j) \in \Omega\}$$

y V_{d_j} verifica:

$$V_{d_j}(x_0) \leq \int_0^{h_{d_j}} e^{-\tilde{\alpha}_j s} (f(y(s), d) + \sum_{i \neq j} \lambda_{j_i} V_{d_i}(y(s))) ds + e^{-\tilde{\alpha}_j h_{d_j}} V_{d_j}(x_0 + h_{d_j} g(d, j)).$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= V_{d_j}(x_0) - U_{d_j}^k(x_0) \\ &\leq \int_0^{h_{d_j}} e^{-\tilde{\alpha}_j s} (f(y(s), d) + \sum_{i \neq j} \lambda_{j_i} V_{d_i}(y(s))) ds + e^{-\tilde{\alpha}_j h_{d_j}} V_{d_j}(x_0 + h_{d_j} g(d, j)) \\ &\quad - (1 - \tilde{\alpha}_j h_{d_j}) U_{d_j}^k(x_0 + h_{d_j} g(d, j)) - h_{d_j} f(x_0, d) + h_{d_j} \sum_{i \neq j} \lambda_{j_i} U_{d_i}^k(\pi_{Q_{i_k}}(x_0)) \\ &\leq \int_0^{h_{d_j}} e^{-\tilde{\alpha}_j s} (|f(y(s), d) - f(x_0, d)| + \sum_{i \neq j} \lambda_{j_i} |V_{d_i}(y(s)) - U_{d_i}^k(\pi_{Q_{i_k}}(x_0))|) ds \\ &\quad + V_{d_j}(x_0 + h_{d_j} g(d, j)) e^{-\tilde{\alpha}_j h_{d_j}} - (1 - \tilde{\alpha}_j h_{d_j}) U_{d_j}^k(x_0 + h_{d_j} g(d, j)) \\ &\leq \int_0^{h_{d_j}} e^{-\tilde{\alpha}_j s} (L_f h_{d_j} + \sum_{i \neq j} \lambda_{j_i} (|V_{d_i}(y(s)) - V_{d_i}(x_0)| \\ &\quad + |V_{d_i}(x_0) - V_{d_i}(\pi_{Q_{i_k}}(x_0))| + |V_{d_i}(\pi_{Q_{i_k}}(x_0)) - U_{d_i}^k(\pi_{Q_{i_k}}(x_0))|)) ds \\ &\quad + (1 - \tilde{\alpha}_j h_{d_j}) (V_{d_j}(x_0 + h_{d_j} g(d, j)) - U_{d_j}^k(x_0 + h_{d_j} g(d, j))) + O(h_{d_j}^2) \\ &\leq (L_f h_{d_j} + \sum_{i \neq j} \lambda_{j_i} ((1 + M_g^\gamma) L_V h_{d_j}^\gamma + \Delta_1)) h_{d_j} + (1 - \tilde{\alpha}_j h_{d_j}) \Delta_1 + O(h_{d_j}^2). \end{aligned}$$

En consecuencia obtenemos

$$\Delta_1 (1 - h_{d_j} \sum_{i \neq j} \lambda_{j_i} - 1 + \tilde{\alpha}_j h_{d_j}) \leq (L_f h_{d_j} + (1 + M_g^\gamma) \sum_{i \neq j} \lambda_{j_i} L_V h_{d_j}^\gamma) h_{d_j} + O(h_{d_j}^2),$$

lo que implica $\Delta_1 \leq \frac{1}{\alpha} (L_f h_{d_j} + (1 + M_g^\gamma) \sum_{i \neq j} \lambda_{j_i} L_V h_{d_j}^\gamma) + O(h_{d_j}^2)$.

Luego para cualquier nodo de $Q_{jk} \forall j, \forall d$ se verifica la misma estimación. Ahora para cualquier $x \in Q_{jk}$ existe un punto que notaremos con $x_i \in Q_{jk}$, tal que $\|x - x_i\| \leq h_{dj}$. Teniendo en cuenta que V_{dj} es Hölder continua y que U_{dj}^k es una función afin

$$|V_{dj}(x) - U_{dj}^k(x)| \leq \Delta_1 + C \|x - x_i\|^\gamma.$$

Luego para $x \in \Omega$

$$V_{dj}(x) - U_{dj}^k(x) \leq \frac{1}{\alpha} (L_f h_{dj} + (1 + M_g^\gamma) \sum_{i \neq j} \lambda_{ji} L_V h_{dj}^\gamma) + O(h_{dj}) + O(h_{dj}^\gamma).$$

Definiendo $K = \max_{dj} \{ (1 - (r_{dj})/(p_d)), r_{dj}/p_d \}$ y recordando que $h_{0j} = (1 - r_{dj}/p_d)h$ and $h_{dj} = h r_{dj}/p_d$, tenemos

$$V_{dj}(x) - U_{dj}^k(x) \leq \frac{K}{\alpha} (L_f h + (1 + M_g^\gamma) \sum_{i \neq j} \lambda_{ji} L_V h^\gamma) + O(h^\gamma).$$

Veamos ahora $U^h - V$. Sea \bar{x} tal que

$$\Delta_2 = U_{dj}^k(\bar{x}) - V_{dj}(\bar{x}) = \max_{djx} \{U_{dj}^k(x) - V_{dj}(x)\}.$$

La función U_{dj}^k está dada por

$$U_{dj}^k(x_\mu^j) = \min ((\mathcal{L}_k U^k)_{dj}(x_\mu^j), (\mathcal{S}_k u^h)_{dj}(x_\mu^j)) \forall x_\mu^j \in \mathcal{V}^{j,k}, \forall d \in D, \forall j \in \mathcal{J},$$

entonces

$$U_{dj}^k(x_\mu^j) \leq \frac{1}{1 + \tilde{\alpha}_j h_{dj}} (U_{dj}^k(x_\mu^j + h_{dj} g(d, j)) + h_{dj} (f(x_\mu^j, d) + \sum_{i \neq j} \lambda_{ji} U_{di}^k(\pi_{Q_{ik}}(x_\mu^j))))$$

$$(1 + \tilde{\alpha}_j h_{dj}) U_{dj}^k(x_\mu^j) \leq U_{dj}^k(x_\mu^j + h_{dj} g(d, j)) + h_{dj} (f(x_\mu^j, d) + \sum_{i \neq j} \lambda_{ji} U_{di}^k(\pi_{Q_{ik}}(x_\mu^j)))$$

$$\tilde{\alpha}_j h_{dj} U_{dj}^k(x_\mu^j) \leq U_{dj}^k(x_\mu^j + h_{dj} g(d, j)) - U_{dj}^k(x_\mu^j) + h_{dj} (f(x_\mu^j, d) + \sum_{i \neq j} \lambda_{ji} U_{di}^k(\pi_{Q_{ik}}(x_\mu^j))) \quad (16)$$

$$\tilde{\alpha}_j h_{dj} U_{dj}^k(x_\mu^j) \leq D_{dj} h_{dj} + h_{dj} (f(x_\mu^j, d) + \sum_{i \neq j} \lambda_{ji} U_{di}^k(\pi_{Q_{ik}}(x_\mu^j))),$$

donde

$$D_{dj} = \frac{U_{dj}^k(x_\mu^j + h_{dj} g(d, j)) - U_{dj}^k(x_\mu^j)}{h_{dj}}$$

es la derivada discreta. La función U_{dj}^k es afin sobre las aristas (i.e. $x_\mu^j + s g(d, j)$, $s \geq 0$).

Luego, en (16) podemos reemplazar h_{dj} por $\hat{h}_{dj} \leq h_{dj}$ siendo \hat{h}_{dj} tal que

$$V_{dj}(\bar{x}) = \int_0^{\hat{h}_{dj}} e^{-\tilde{\alpha}_j s} (f(y(s), d) + \sum_{i \neq j} \lambda_{ji} V_{di}(y(s))) ds + V_{dj}(\bar{x} + \hat{h}_{dj} g(d, j)) e^{-\tilde{\alpha}_j \hat{h}_{dj}}.$$

En consecuencia tenemos

$$\tilde{\alpha}_j \hat{h}_{dj} U_{dj}^k(x_\mu^j) \leq D_{dj} \hat{h}_{dj} + \hat{h}_{dj} (f(x_\mu^j, d) + \sum_{i \neq j} \lambda_{ji} U_{di}^k(\pi_{Q_{ik}}(x_\mu^j))).$$

Más aún, existe $x_i \in Q_{jk}$, $x_i \notin \left(\gamma_{h,d,j}^+ \cup \left(\bigcup_{r \neq d} \gamma_{h,r,j}^- \right) \right)$ y

$$U_{dj}^k(\bar{x}) - U_{dj}^k(x_i) = O(h_{dj}^\gamma)$$

Tenemos

$$U_{dj}^k(\bar{x}) \leq (1 - \tilde{\alpha}_j \hat{h}_{dj}) U_{dj}^k(\bar{x} + \hat{h}_{dj} g(d, j)) + \hat{h}_{dj} (f(\bar{x}, d) + \sum_{i \neq j} \lambda_{ji} U_{di}^k(\pi_{Q_{ik}}(\bar{x}))) + \hat{h}_{dj} O(h_{dj}^\gamma)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= U_{dj}^k(\bar{x}) - V_{dj}(\bar{x}) \\ &\leq \int_0^{\hat{h}_{dj}} e^{-\tilde{\alpha}_j s} (|f(\bar{x}, d) - f(y(s), d)| + \sum_{i \neq j} \lambda_{ji} |U_{di}^k(\pi_{Q_{ik}}(\bar{x})) - V_{di}(y(s))|) ds \\ &\quad + (1 - \tilde{\alpha}_j \hat{h}_{dj}) U_{dj}^k(\bar{x} + \hat{h}_{dj} g(d, j)) - V_{dj}(\bar{x} + \hat{h}_{dj} g(d, j)) e^{-\tilde{\alpha}_j \hat{h}_{dj}} + \hat{h}_{dj} O(h_{dj}^\gamma) \\ &\leq \int_0^{\hat{h}_{dj}} e^{-\tilde{\alpha}_j s} (L_f \hat{h}_{dj} + \sum_{i \neq j} \lambda_{ji} (|U_{di}^k(\pi_{Q_{ik}}(\bar{x})) - V_{di}(\pi_{Q_{ik}}(\bar{x}))| \\ &\quad + \int_0^{\hat{h}_{dj}} e^{-\tilde{\alpha}_j s} \sum_{i \neq j} \lambda_{ji} (|V_{di}(\pi_{Q_{ik}}(\bar{x})) - V_{di}(\bar{x})| + |V_{di}(\bar{x}) - V_{di}(y(s))|) ds \\ &\quad + (1 - \tilde{\alpha}_j \hat{h}_{dj}) \Delta_2 + o(\hat{h}_{dj}) + \hat{h}_{dj} O(h_{dj}^\gamma) \\ &\leq (L_f \hat{h}_{dj} + \sum_{i \neq j} \lambda_{ji} ((1 + M_g^\gamma) L_V \hat{h}_{dj}^\gamma + \Delta_2)) \hat{h}_{dj} + (1 - \tilde{\alpha}_j \hat{h}_{dj}) \Delta_2 + o(\hat{h}_{dj}) + \hat{h}_{dj} O(h_{dj}^\gamma). \end{aligned}$$

Resulta

$$\Delta_2 (1 - \hat{h}_{dj} \sum_{i \neq j} \lambda_{ji} - 1 + \tilde{\alpha}_j \hat{h}_{dj}) \leq (L_f \hat{h}_{dj} + (1 + M_g^\gamma) \sum_{i \neq j} \lambda_{ji} L_V \hat{h}_{dj}^\gamma) \hat{h}_{dj} + O(\hat{h}_{dj}^2) + \hat{h}_{dj} O(h_{dj}^\gamma)$$

$$\Delta_2 \leq \frac{1}{\alpha} (L_f \hat{h}_{dj} + (1 + M_g^\gamma) \sum_{i \neq j} \lambda_{ji} L_V \hat{h}_{dj}^\gamma) + O(h_{dj}^\gamma).$$

Similamente a lo realizado para Δ_1 tenemos $\forall x, \forall d, \forall j$

$$U_{dj}^k(x) - V_{dj}(x) \leq \frac{K_2}{\alpha} (L_f h + (1 + M_g^\gamma) \sum_{i \neq j} \lambda_{ji} L_V h^\gamma) + O(h^\gamma),$$

entonces $\|U^k - V\|_\infty \leq \frac{K_2}{\alpha} (L_f h + (1 + M_g^\gamma) \sum_{i \neq j} \lambda_{ji} L_V h^\gamma) + O(h^\gamma)$.

5 APLICACIONES

Presentamos un ejemplo para $m = 2$ productos, factor de descuento $\alpha = 0.1$.

factor de producción $p_1 = p_2 = 1$.

Demandas $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4\}$, $|\mathcal{J}| = 4$.

velocidades de conmutación: λ_{ij}

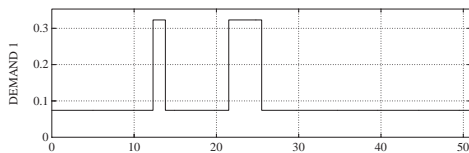
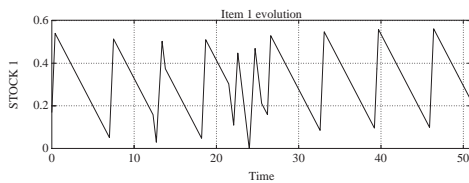
$r_{11} = 0.07415$	$r_{21} = 0.37230$
$r_{12} = 0.07415$	$r_{22} = 0.06741$
$r_{13} = 0.32300$	$r_{23} = 0.37230$
$r_{14} = 0.32300$	$r_{24} = 0.06741$

i / j	1	2	3	4
1	0	0.03	0.031	0
2	0.2	0	0	0.031
3	0.2	0	0	0.03
4	0	0.2	0.2	0

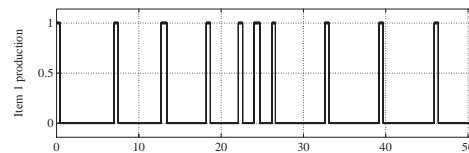
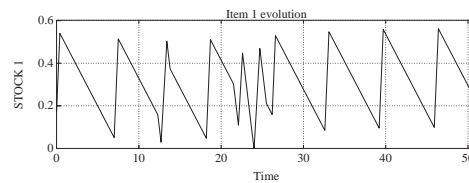
Stock máximo permitido: $M_1 = 0.525$, $M_2 = 1.67$.

El costo instantáneo f es una función lineal de ambas variables y no depende del parámetro d , i.e. $f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2$.

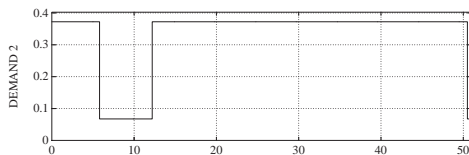
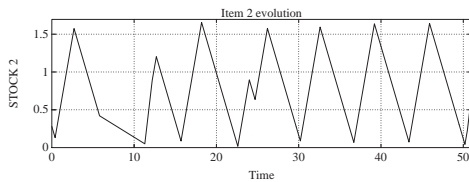
Commutation costs: $q(d, \tilde{d}) = 7, \forall d \neq \tilde{d}$



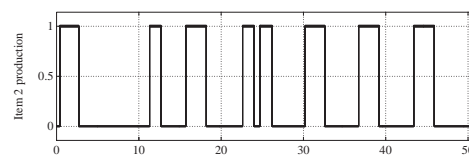
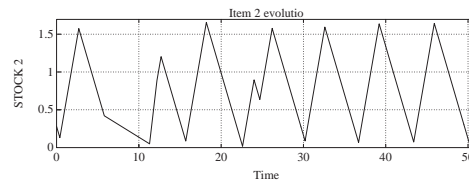
(a) Stock y demanda del ítem 1



(b) Stock y producción del ítem 1



(c) Stock y demanda del ítem 2

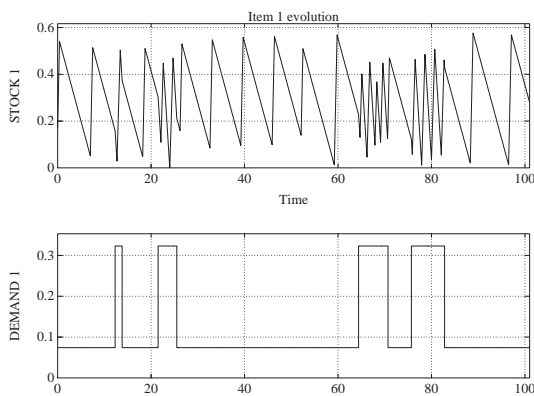


(d) Stock y producción del ítem 2

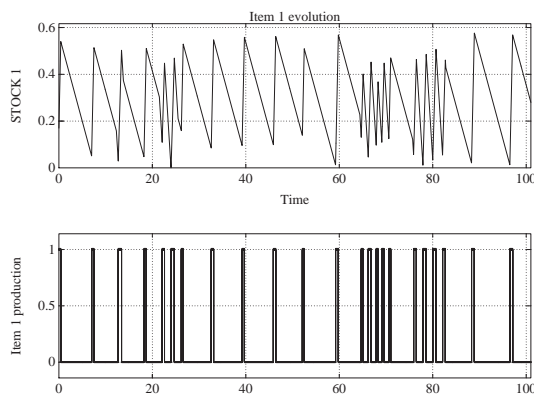
Figure 1: Simulación para 50 unidades de tiempo

CONCLUSIONES

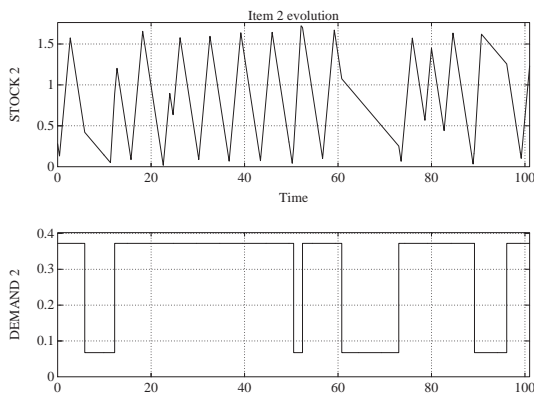
En este trabajo desarrollamos un método numérico de aproximación para la optimización de un sistema de producción que comprende la optimización de una máquina multiproducto con demandas seccionalmente determinísticas. Presentamos un procedimiento de discretización basado en el método de las diferencias finitas. Mostramos que nuestra solución discreta es el único punto fijo de un operador contractivo no lineal $P^h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y damos una cota explícita del error entre la solución discreta y la exacta. Finalmente presentamos una aplicación de esta metodología.



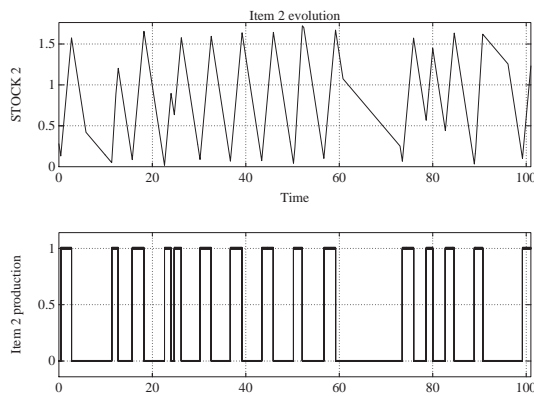
(a) Stock y demanda del ítem 1



(b) Stock y producción del ítem 1



(c) Stock y demanda del ítem 2



(d) Stock y producción del ítem 2

Figure 2: Simulación para 100 unidades de tiempo

REFERENCES

- [1] L.S. Aragone, R.L.V.González, *Fast computational procedure for solving multi-item single machine lot scheduling optimization problem*, Journal of Optimization Theory & Applications, Vol. 93, N°3, pp. 491-515, 1997.
- [2] A. Bensoussan, J.L. Lions, *Contrôle impulsionnel et inéquations quasi-variationnelles*, Dunod, Paris, 1982.
- [3] I. Capuzzo Dolcetta, H. Ishii, *Approximate solution of the Bellman equation of deterministic control theory*, Applied Mathematics & Optimization, Vol. 11, pp. 161-181, 1984.
- [4] M.G. Crandall, L.C. Evans, P.L. Lions, *Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 282, pp. 487-502, 1984.
- [5] M.H.A. Davis, *Markov models and optimization*, Prentice-Hall, 1993.
- [6] W.H. Fleming, H.M. Soner, *Controlled Markov processes and viscosity solutions*, Springer Verlag, New York, 1993.
- [7] B. Hanouzet, J.L. Joly, *Convergence uniforme des itérés définissant la solution d'une inéquation quasi variationnelle abstraite*, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, Serie A, Tome 286, pp. 735-738, 1978.
- [8] Lenhart S.M., *Viscosity solutions associated with switching control problems for piece-*

- wise deterministic processes*, Houston Journal of Mathematics, Vol. 13, N°3, pp. 405-426, 1987.
- [9] Lenhart S.M., Liao Y.C., *Switching control of piecewise deterministic processes*, Journal of Optimization Theory & Applications, Vol. 59, N°1, pp. 99-115, 1988.
- [10] A. Jean-Marie, M.M. Tidball, *Application of the impulsive control of piecewise deterministic processes to multi-item single machine stochastic scheduling*, Annals of Operations Research 88, pp. 139-159, 1999.
- [11] E.M. Mancinelli, L.S. Aragone, *Stochastic optimization of multi-item single machine. Theoretical approach*. En preparación.
- [12] E.M. Mancinelli, R.L.V. González, *Multi-item single machine scheduling optimization. The case with piecewise deterministic demands*, Rapport de Recherche N°3144, INRIA, Rocquencourt, France, 1997.
- [13] H.M. Soner, *Optimal control with state-space constraint II*, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 24, pp. 1110-1122, 1986.
- [14] H.M. Soner, *Singular perturbations in manufacturing*, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 31, pp. 132-146, 1993.