

CONTROL H-INFINITO PARA CANCELAR PERTURBACIONES DE CAMPO MAGNÉTICO

Guillermo O. Forte^a, Luis Canali^b, Esteban Anoardo^a

^aLaboratorio de Relaxometría y Técnicas Especiales LaRTE, Facultad de Matemática Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba, Medina Allende y Haya de la Torre S/N Ciudad Universitaria - X5016LAE Córdoba, Argentina. (forte, anoardo)@famaf.unc.edu.ar

^bCentro de Investigación en Informática para la Ingeniería CIII, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Córdoba.

Palabras Clave: MIMO, síntesis, controlador H-infinito, control robusto.

Resumen. Se muestra la síntesis de un controlador para un sistema multivariable (MIMO, siglas en inglés de Multiple-Input-Multiple-Output) con un fuerte acoplamiento entre los circuitos de control. Se llega al controlador minimizando una función objetivo definida por la norma H-infinito de una matriz cuyos elementos están dados por diferentes funciones de sensibilidad del sistema. Se muestra la respuesta obtenida con el controlador sintetizado y se compara su funcionamiento con un diseño anterior realizado en dos pasos, donde primero se desacoplaron los canales y luego se aplicaron controladores de tipo proporcional, integral y derivativo (PID) para cada uno de ellos.

1 INTRODUCCIÓN

Ciertas aplicaciones de Resonancia Magnética Nuclear (RMN), requieren la cancelación de campos magnéticos variables en el tiempo, dentro de un volumen de exclusión. Un ejemplo de esta necesidad puede encontrarse en experimentos de RMN con ciclado de campo (Anoardo y Ferrante, 2003). En el presente trabajo, se presenta un sistema para atenuar perturbaciones de campo magnético en un ancho de banda que está por debajo de los 100 Hz. El problema se divide en dos partes. Por un lado cancelar el valor medio del campo presente en el centro de la zona de exclusión, y por otra parte, la componente constante de gradiente dentro del mismo volumen. Para reducir los campos magnéticos indeseados, se los descompone (tanto su valor medio como su gradiente) en sus tres componentes espaciales. Luego, con una serie de bobinas que generan campo, cada una en una dirección diferente, se procede a la cancelación. La mayor dificultad de este problema, se presenta con los gradientes. Esto se debe a que no es posible desacoplar los campos magnéticos generados por las bobinas de gradiente en las diferentes direcciones. Estos son: derivada de B_x respecto de x , de B_y respecto de y y de B_z respecto de z , llamados G_{B_x} , G_{B_y} y G_{B_z} , respectivamente (siendo B_x , B_y y B_z , las componentes x , y y z del campo). Por lo tanto, la cancelación de estos gradientes de campo magnético, implica un problema de control multivariable fuertemente acoplado. Anteriores soluciones al problema fueron planteadas en dos pasos (Forte, et. al., 2006). Esto significa, diseñando en primer lugar un pre-compensador encargado de reducir el acople entre variables y aplicando luego un controlador para sistemas de entrada y salidas simple (SISO, por las siglas en inglés de Single Input Single Output), en cada circuito de control. En este trabajo, se plantea una solución al problema sintetizando un controlador multivariable basado en la minimización de una función objetivo. Esa función es la norma H_∞ de una matriz que tiene por componentes las funciones de transferencia entre la señal de referencia (campo magnético deseado en el volumen de exclusión) y la salida real de la planta (campo magnético efectivo medido). Además, incluye determinadas restricciones impuestas para optimizar el rechazo a perturbaciones. Una vez diseñado e implementado el controlador en simulación, se evalúa su funcionamiento y se muestran los resultados obtenidos.

2 SÍNTESIS DE UN CONTROLADOR H-INFINITO PARA UN SOLO CIRCUITO DE CONTROL

En una primera aproximación al problema, se estudiará que ventaja puede obtenerse con un controlador H-infinito para un solo canal del sistema de compensación, respecto de un controlador convencional tipo PID, sintonizado para optimizar el rechazo a perturbaciones. La planta que se desea controlar es la utilizada en (Forte, et. al., 2006), donde se cerraron los lazos de control mediante una serie de controladores PID, aplicados a través de un bloque desacoplador en el caso de los circuitos que se afectan mutuamente.

2.1 Definición de la planta. Normalización.

Se utiliza como canal de prueba el correspondiente al campo homogéneo en la dirección x , denominado B_{x0} . En la figura 1 se muestra un diagrama en bloques del circuito de compensación de campos que se va a controlar.

La planta que se tiene estimada, corresponde a la función de transferencia completa de B_{x0} dada por la ecuación 1. Se observa en la misma que la dinámica es de segundo orden y que además presenta un retardo en el tiempo. Este retardo, como se verá mas adelante, es un limitante importante para la máxima frecuencia de la perturbación que el sistema será capaz

de atenuar. Por lo tanto, es de gran importancia contar con un hardware optimizado de manera de minimizar cualquier constante de propagación, tiempo de cálculo, y demás factores que contribuyan al retardo de la función de transferencia.

$$\hat{G}_{tot}(s) = \frac{K e^{-sT}}{\tau^2 s^2 + 2\zeta \tau s + 1} \cdot \quad \text{Donde:} \quad (1)$$

$$K = 25.54 \quad T = 510E - 5$$

$$\tau = 0,0014 \quad \zeta = 0,647$$

Denotamos con $\hat{\cdot}$ la función de transferencia como ha sido estimada de los datos tomados directamente de la planta o las variables con el rango que presentan en la planta efectiva. Posteriormente, para simplificar los cálculos, se normalizarán estos valores para tener: variables de magnitud no superior a 1.

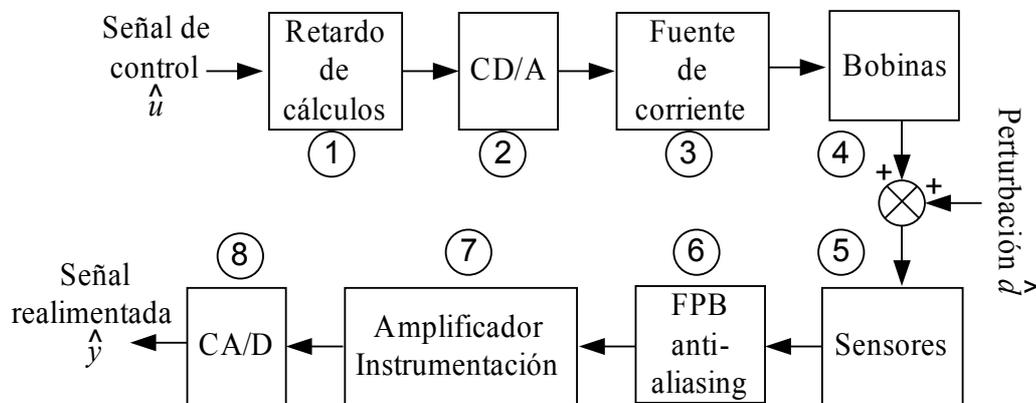


Figura 1: Circuito de B_{x0}

Como se desea separar el bloque que es afectado tanto por la perturbación como por la señal de control (\hat{G}_d), se lo sacará como factor común de la función de transferencia total. El ancho de banda del amplificador de instrumentación y de los sensores es mucho menor que el del FPB anti-aliasing, por lo que el ancho de banda de \hat{G}_d , está dado fundamentalmente por este último. El convertor A/D solamente agrega una ganancia constante en el proceso de conversión. Finalmente:

$$\hat{G}_d = \frac{292.56}{s/w_1 + 1} \cdot \quad \text{Donde:} \quad (2)$$

$$w_1 = 2 \pi f_c$$

f_c = frecuencia de corte del filtro
fijada en 400Hz

Por último, la parte de la función de transferencia que que no se ve afectada por perturbaciones está dada por:

$$\hat{G} = \hat{G}_{tot} / \hat{G}_d \cdot \quad (3)$$

Estas funciones de transferencia, se normaliza como se explica en (Skogestad and Postlethwaite, 2005). Debido a que el objetivo primero del controlador es minimizar el error, será respecto del valor máximo del mismo (\hat{e}_{\max}) de quien se normalicen las variables \hat{y} , \hat{e} y \hat{r} , obteniendo:

$$y = \frac{\hat{y}}{\hat{e}_{\max}}, \quad r = \frac{\hat{r}}{\hat{e}_{\max}}, \quad e = \frac{\hat{e}}{\hat{e}_{\max}}. \quad (4)$$

Donde se ha determinado que \hat{e}_{\max} estará dada por la máxima perturbación esperada; se pide que en ningún caso el error sea superior a dicha perturbación, es decir que no se empeore la situación que se presentaría si no se aplicara el controlador. Luego, $\hat{e}_{\max} = 5G$. Para normalizar las funciones de transferencia \hat{G}_{tot} y \hat{G}_d es necesario conocer los valores máximos a los que estarán limitados las señales \hat{u} , \hat{d} y \hat{r} , los que se han establecidos en: $\hat{u}_{\max} = 127\text{u.a.}$, $\hat{d}_{\max} = 5G$ y $\hat{r}_{\max} = 5G$, respectivamente. Una vez normalizado el sistema, se trabajará a partir de ahora con las siguientes funciones de transferencia:

$$G_{tot}(s) = \frac{648.716}{1.96E-6s^2 + 1.8E-3s + 1}, \quad (5)$$

$$G_d(s) = \frac{292,56}{s/2514,3 + 1},$$

$$G(s) = G_{tot}(s) / G_d(s).$$

Y el sistema normalizado es el representado en la figura 2.

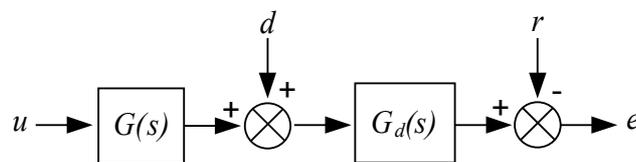


Figura 2: Diagrama de bloques del sistema normalizado

2.2 Síntesis del controlador para B_{x0} .

Dado un sistema como el de la figura 2, donde se agrega un bloque controlador K con entrada e y salida u , para cerrar el lazo de control, se tiene la siguiente función de transferencia a lazo cerrado que define la respuesta del sistema (Skogestad and Postlethwaite, 2005).

$$y = \underbrace{(1 + GK)^{-1} GK}_{T} r + \underbrace{(1 + GK)^{-1} G_d}_{S} d - \underbrace{(1 + GK)^{-1} GK}_{T} n, \quad (6)$$

Se observa en la [ecuación 6](#), que si se desea tener un buen rechazo a las perturbaciones (el caso para este trabajo) es necesario hacer pequeño el producto $|S G_d(j\omega)|, \forall \omega$. Esta condición para el diseño de un controlador, puede ser considerada en el diseño clásico de un control por realimentación conocido como “loop shaping”. Mediante esta técnica, lo que se trata es de definir cual es la forma de la función de transferencia del sistema como función de la frecuencia. Como deseamos que el error, que para rechazo a perturbaciones está dado por $S G_d$, se mantenga por debajo de 1 (recordar que ha sido normalizado) y como G_d es la parte de la planta que no puede modificarse, se debe poner restricciones al valor máximo de S en función de la frecuencia. Dicho máximo de la función sensibilidad S (indica que tan sensible es el sistema a perturbaciones), denominado M_s , está dada por la norma infinita de S . Esto es:

$$\|S(j\omega)\|_{\infty} := \max_{\omega} |S(j\omega)|, \quad (7)$$

Puede definirse la forma deseada para S , mediante una función de peso $w_p(s)$ que multiplica a S y pidiendo que el producto $|w_p S(j\omega)|$ se mantenga inferior a 1 para el sistema normalizado, es decir que el límite superior para S está en $1/|w_p|$.

Se pedirá que S cumpla requisitos adicionales, además del pico máximo antes calculado. Ellos son: el ancho de banda mínimo deseable para el sistema, dado por la frecuencia a la cual $|S(j\omega)|$ cruza 0.707 db de magnitud hacia abajo y el error máximo en estado estacionario. Como se desea mantener el campo magnético en un valor constante (el sistema funciona como regulador y no como servomecanismo), no hay requerimientos sobre el error de seguimiento. Esto es bueno ya que las características deseadas para S si se quiere buen rechazo a perturbaciones, van en desmedro de la respuesta como servomecanismo.

Además de tener en cuenta el requerimiento de la función sensibilidad se pedirá para la síntesis del controlador, restringir los valores permitidos a la señal de control dentro de los límites posibles para el actuador (valor máximo 1 para la planta normalizada). Como la señal de control está dada por $u = K S(r - G_d)$, uno puede restringir u , poniendo un límite superior de $1/|w_u|$; donde $w_u(s)$ es una función de peso a definir.

Suele elegirse para w_p , una función con un cero y un polo de orden n ([Skogestad and Postlethwaite, 2005](#)) de la forma:

$$w_p(s) = \frac{(s/M + w_b)^n}{(s + A w_b)^n}, \quad \text{Donde:} \quad (8)$$

M : Límite superior de $|S|$ en alta frecuencia

A : Límite superior de $|S|$ en baja frecuencia

w_b : ancho de banda requerido

Para nuestro caso, los valores elegidos estarán dados por:

A : Debe ser un valor suficientemente pequeño para que el controlador actúe de manera semejante a si tuviera acción integral, pero no puede ser 0 porque la herramienta utilizada para el cálculo no lo permite. Se eligió $A=1E-2$. M : Se elige $M = 1.2$ para no tener una

degradación importante del funcionamiento del sistema en la zona de cruce. n : Se elige $n=2$ para tener tener mayor ganancia a baja frecuencia (ancho de banda del sistema), manteniendo una baja ganancia en alta frecuencia y de esta manera tener un buen rechazo de perturbaciones. w_b . Finalmente, se define el ancho de banda. Se sabe que si se tiene una función de transferencia con un retardo de la forma e^{-Ts} , ésta tendrá una frecuencia de corte $f_c = 2\pi w_c$ limitada por $w_c = 1/T$. Para nuestro sistema, donde $T=510E-5$, $w_c=196$. Finalmente, se elige $w_b = 190$.

Lo que resta para poder sintetizar el controlador, es encontrar una solución para K , es definir la siguiente matriz de sensibilidad mezclada (mixed sensitivity) que combina los requerimientos antes especificados para S y para $K S$ de la siguiente manera:

$$N = \begin{bmatrix} w_p S \\ w_u K S \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Luego, debe resolverse el problema de encontrar un controlador K que minimice la norma infinito de la matriz dada por la [ecuación 9](#). Esto es:

$$\min_K \|N\|_\infty. \quad (10)$$

Se llega a la solución del problema de minimización planteado en la [ecuación 10](#) utilizando como herramienta la función `mixsyn` de MatLab. Es importante notar que estas funciones de MatLab, admite en sus parámetros de entrada la representación de la planta con funciones de tipo lineal únicamente. Como un retardo de tipo e^{sT} es no-lineal, se utiliza la aproximación de Padé de orden n que es lineal en s ([ecuación 11](#)).

$$e^{-Ts} = \frac{\left(1 - \frac{T}{2n}s\right)^n}{\left(1 + \frac{T}{2n}s\right)^n}. \quad (11)$$

Se eligieron los polinomios de la [ecuación 11](#) de orden 3, con lo cual se tiene una buena aproximación del retardo sin aumentar demasiado el orden del sistema.

3 PRUEBA EN SIMULACIÓN DEL CONTROLADOR PARA B_{X0}

Para simular el funcionamiento del controlador calculado en 2.2, se recurrió a la herramienta de simulación de MatLab, Simulink. El resultado obtenido cuando se aplicó una perturbación de tipo escalón es el mostrado en la [figura 3](#). En ella puede compararse el funcionamiento del controlador H-infinito, recientemente sintetizado, con la respuesta obtenida para el controlador convencional tipo PID utilizado en ([Forte, et. al., 2006](#)). Dicho controlador PID, fué sintonizado utilizando el método de Sung, el cual presenta una óptima respuesta para ese tipo de controlador, ante presencia de perturbaciones.

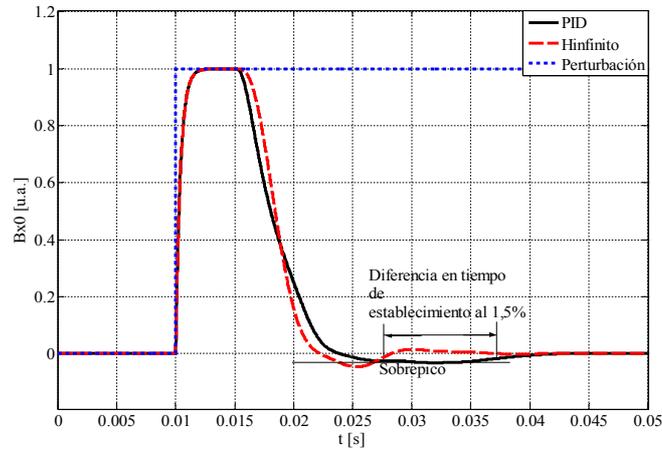


Figura 3: Respuesta del lazo de control para $Bx0$

4 SÍNTESIS DE UN CONTROLADOR H-INFINITO PARA LA CANCELACIÓN DE GRADIENTES

Un procedimiento similar al aplicado a B_{x0} , se utilizará ahora para sintetizar un controlador para el sistema de gradientes, los que se encuentran fuertemente acoplado entre ellos, pero son prácticamente independientes de los campos homogéneos.

4.1 Definición de la planta multivariable. Normalización.

Se utiliza el mismo modelo construido con una matriz de funciones de transferencia de segundo orden con retardo utilizado en (Forte, et. al., 2006). Ellas relacionan las corrientes por cada bobina, con la magnitud del gradiente de campo generado en las diferentes direcciones según se definió previamente en 1. Al igual que se explicó anteriormente en 2.1, se separa la función de transferencia del filtro antialiasing (cuya función de transferencia está dada por la ecuación 2 para todos los circuitos de control) del resto de la planta, ya que es en ese punto donde se suma la perturbación. Además, debe tenerse en cuenta que la dinámica del campo generado por una bobina en los diferentes ejes es la misma, ya que son causadas por una misma corriente. Haciendo estas consideraciones, el sistema MIMO de cancelación de gradientes puede ser expresado según el diagrama en bloques de la figura 2, de la siguiente manera:

$$G_{tot}^{\wedge}(s) = \begin{bmatrix} 14,04 & -4,27 & -10,62 \\ -5,64 & 12,6 & -9,51 \\ -5,67 & -5,6 & 17,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{e^{-520E-5s}}{1,84E-6s^2 + 1,7E-3s + 1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^{-582E-5s}}{2,25E-6s^2 + 2E-3s + 1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e^{-520E-5s}}{1,82E-6s^2 + 1,7E-3s + 1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Luego, para normalizar la planta, se procede de manera similar a como se había hecho para B_{x0} , considerando los siguientes valores máximos para todos los circuitos de control:

$$\hat{u}_{\max} = 127 \text{u.a.}, \hat{d}_{\max} = 200 \text{G/m}, \hat{r}_{\max} = 5\text{G}, \hat{e}_{\max} = 5\text{G}. \quad (13)$$

4.2 Síntesis del controlador H-infinito para el sistema MIMO.

A diferencia del método en dos pasos aplicado en el trabajo anterior, se va a sintetizar un controlador multivariable minimizando la norma de alguna función objetivo. El procedimiento es el mismo que el seguido para sintetizar el controlador para el sistema SISO anterior. En este caso, los pesos de la matriz de sensibilidad mezclada S / KS son también matrices diagonales que se denominarán W_p y W_u .

$$N = \begin{bmatrix} W_p S \\ W_u K S \end{bmatrix} \quad (14)$$

W_p y W_u son matrices diagonales donde los elementos de la diagonal son los pesos definidos según el mismo criterio que se utilizó para B_{x0} , es decir, que son los mismos que el w_p y el w_u utilizados en la [ecuación 9](#). Debe recordarse que al igual que se hizo anteriormente, deben expresarse los retardos con la aproximación de Padé dada por la [ecuación 11](#).

5 PRUEBA EN SIMULACIÓN DEL CONTROLADOR PARA EL CONTROL DE GRADIENTES

La [figura 4](#) muestra el resultado de una simulación del funcionamiento del sistema de cancelación de gradientes constantes. En la misma, se observa la respuesta ante una perturbación de tipo escalón introducida en el gradiente de la componente x del campo B en la dirección x , denominada G_{Bx} . Esta perturbación con amplitud de 1T/m fue introducida en $t=0\text{s}$. Luego del retardo presente en el lazo de control, el controlador nota la presencia de la perturbación y comienza a actuar para llevar el gradiente afectado a cero sin modificar los otros dos. Se puede apreciar que el controlador diseñado en dos pasos, primero desacoplando la planta y luego aplicando un controlador convencional de tipo PID a cada lazo de control por separado, tiene una respuesta un poco más lenta para el canal perturbado. Además, casi no modifica los otros dos canales debido a la acción del desacoplador que actúa como un controlador por acción precalculada. Por otra parte, el controlador calculado minimizando la norma H-infinito de una función objetivo, presenta un tiempo de establecimiento menor (para llevar el gradiente a cero), pero permite una modificación inicial del gradiente en los canales que no fueron afectados por la perturbación. Esto se debe al acoplamiento entre variables del sistema y a que como es un control puramente por realimentación, se requiere que la salida de un canal se modifique para que el controlador actúe. Si se considera el funcionamiento global del sistema, observando cual es el tiempo en el que todos los canales afectados directamente o indirectamente por la perturbación retornaron al valor deseado, el controlador de este trabajo es ligeramente superior al anterior. Adicionalmente, el controlador con desacoplador es altamente sensible a la exactitud en la estimación del modelo.

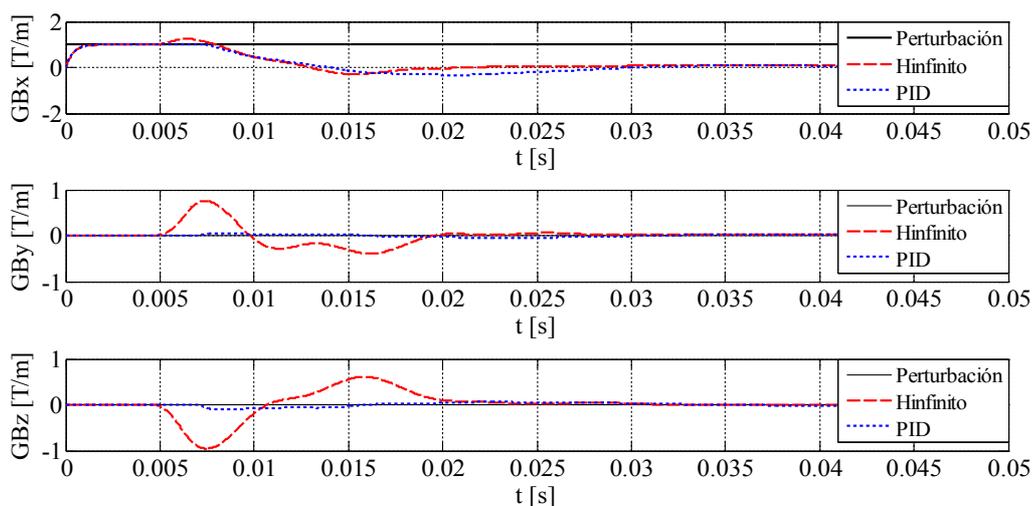


Figura 4: Respuesta del control de gradientes

6 CONCLUSIONES

Un controlador para un sistema con entrada y salida simple diseñado mediante la optimización de la norma H-infinito de alguna función objetivo, permite tener en cuenta las diferentes situaciones que pueden presentarse en el sistema y optimizar el controlador para alguna en particular. En este caso, se realizó un diseño donde la prioridad estuvo puesta en tener un buen rechazo ante la presencia de perturbaciones, pero además, se consideró la máxima señal de control admisible por el actuador sin que se sature.

Cuanto se está en presencia de un sistema multivariable, un controlador convencional tipo PID, aplicado a través de un desacoplador que separe los circuitos de control para poder tratar el sistema MIMO como si fuesen una serie de sistemas SISO simples tiene buenas prestaciones. Sin embargo, esto requiere de un buen conocimiento de la planta para poder diseñar el desacoplador. El diseño de un controlador H-infinito permite en este caso, además de las ventajas antes mencionadas para los sistemas SISO, permite tener mejores prestaciones del sistema considerando todos los lazos de control en su conjunto, como lo muestra la [figura 4](#).

REFERENCIAS

- Anoardo E. y Ferrante G., Magnet field compensation for field-cycling NMR relaxometry in the ULF band. *Applied Magnetic Resonance* 24: 85, 2003.
- Forte G., Canali L. y Anoardo E., Blindaje magnético activo con control multivariable aplicado a resonancia magnética nuclear. *JAR2006* <http://www.frc.utn.edu.ar/jar2006/2006>.
- Skogestad S. and Postlethwaite I. *Multivariable Feedback Control, Analysis and Design*. John Wiley & Sons, Ltd., 2005.