

BIOAUTÓMATAS: DISPOSITIVOS AUTÓNOMOS DE COMPORTAMIENTO ESTOCÁSTICO CON SIMILITUD CUÁNTICA

José L. Puliafito⁽¹⁾, S. Enrique Puliafito⁽²⁾

⁽¹⁾ Universidad de Mendoza, Arístides Villanueva 773, 5500 Mendoza, Argentina,
email: jose.luis.puliafito@um.edu.ar

⁽²⁾ Universidad Tecnológica Nacional- Fac. Regional Mendoza, Rodríguez 273, Mendoza, Argentina
email: epuliafito@frm.utn.com.edu.ar

Palabras claves: Dispositivos autónomos; comportamiento estocástico, ecuación de Langevin- Schrödinger; similitud cuántica; dinámica poblacional

Resumen : Como contribución a la comprensión del comportamiento de individuos y poblaciones interaccionado con su ambiente, se estudia el comportamiento estocástico de dispositivos de movimiento autónomo, cuya fuente de energía proviene de la exploración, captura y bio-procesamiento de unidades discretas de recursos ambientales (bioautómatas), y que presentan dinámicas espacio-temporales con similitud cuántica. Partiendo de la definición de una función potencial de reserva, que representa la distribución esperada de recursos, y que toma la forma de un pozo de potencial en la que pueden definirse las zonas clásicas de homogeneidad espacial de la mecánica, se obtiene una ecuación diferencial estocástica de Langevin modificada excitada por ruido granalla, que describe el movimiento y captura de recursos por parte del bioautómata. Dicha ecuación diferencial es analizada y simulada numéricamente por zonas, y sus resultados son interpretados en el contexto de los procesos estocásticos clásicos así como también comparados con los procesos estocásticos cuánticos descritos por ecuaciones del tipo Langevin- Schrödinger. Se infieren algunas conclusiones relativas al comportamiento colectivo de individuos, en particular aplicables a la Dinámica Poblacional en ecosistemas densos.

1 INTRODUCCIÓN

La emergencia de patrones espacio-temporales complejos en la dinámica poblacional de ciertas especies suscita gran interés en Ecología. Es frecuente encontrar modelos de caminata aleatoria y de difusión para describir los movimientos de animales en su ambiente, analizar su dispersión y predecir su distribución espacial, incluyendo como influyen las diversas heterogeneidades territoriales (ver por ej. Jeanson R et al, 2003), pero aún hay una considerable distancia conceptual que recorrer.

Los patrones espacio-temporales complejos en muchas de las actividades colectivas realizadas por insectos sociales, como en especies de hormigas y de termitas, revelan que los individuos pueden abordar colectivamente tareas que superan en mucho las capacidades individuales. Esto no sólo se evidencia en la escala característica de los patrones, típicamente mucho más grande que el tamaño de los individuos, sino también en su forma, con arquitecturas compuestas de una variedad de estructuras delicadas y altamente regulares. A pesar de la aleatoriedad y limitaciones en el nivel individual, las estructuras colectivas emergen efectivamente en respuesta a diversos requisitos funcionales y adaptativos (protección contra depredadores, el substrato de la vida social y de las actividades reproductivas, la regulación térmica, etc.) (Theraulaz G. et al, 2003).

Numerosos estudios en los últimos veinte años tienden a revelar que el origen de la complejidad jerárquica no radica en la capacidad de los insectos individuales de procesar una cantidad grande de información, sino más bien en la multiplicidad de respuestas a estímulos que resultan de comportamientos relativamente simples de los individuos interactuantes. Así, los patrones resultantes parecen emerger de interacciones no lineales entre los individuos y entre los individuos y su ambiente, a través de mecanismos tales como *plantillas*, *estigmergia* y *auto-organización*. (Theraulaz G. et al, 2003; Ball, P., 1998)

Precisamente estas características han impulsado a incorporar más explícitamente el espacio al análisis dinámico temporal tradicional (Ecología Espacial), a través de modelos de metapoblación y de reglas de transición como el Autómata Celular. El interés es la vinculación entre la estructura espacial del medio ambiente y de la población ocupante con las características de las especies, su desarrollo y supervivencia, e incluso su diversidad (Pascala & Levin, 1997; Tilman & Kareiva, 1997).

El uso de Autómatas Celulares se ha extendido bastante impulsado por su capacidad intrínseca de simulación de la complejidad, en particular de la auto-organización e innovación. Sin embargo, no debe perderse de vista que tales modelos son al fin de cuentas *métodos computacionales tensoriales* basados en celdas finitas del espacio, definiendo así virtualmente un *medio elasto-plástico excitable*, representativo del sistema especie-espacio/ambiente en cuestión. En todo caso, el mayor éxito de los Autómatas Celulares radica en que pueden modelar muy diversos tipos de medios excitables, lo que se apoya no sólo en alguna insensibilidad de la dinámica “macroscópica” en relación a la estructura y naturaleza de las interacciones en su orden “microscópico”, sino también en el singular hecho que la mayoría de los sistemas y aún objetos matemáticos hipotéticos, son descriptibles por alguna clase de ecuaciones de transporte (Popov V.L. and Psakhie S.G., 2001).

Esto último apunta a enfoques fenomenológicos de modelación mediante ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, tales como las *ecuaciones de reacción-difusión* basadas en el modelo de Alan Turing (1952); originalmente aplicado a la morfogénesis de manchas en la piel de animales tales como cebras, jaguares y leopardos, fue luego extendido por diversos autores a casi todo tipo de patrones biológicos y ecológicos, incluyendo la morfogénesis celular y la segregación espacial de especies. Básicamente describe la interacción no lineal de las concentraciones de dos especies, una “activadora” (más bien de acción local) y otra

“inhibidora” (de acción de más largo alcance), de modo que las estructuras periódicas surgen como consecuencia de diferentes velocidades de difusión (ver por ej. Meinhardt, H., 1982). Un ejemplo notable en el nivel biológico es el comportamiento espaciotemporal quimiotaxonómico de dos especies bacterianas, el que puede controlarse externamente y que configura patrones y ondas propagantes (Lebiedz D. and Brandt-Pollmann U., 2003).

No deja de sorprender que a pesar de la evidente separación conceptual entre el mundo inanimado y el mundo animado, ciertos fenómenos poblacionales se describan de modo similar. De hecho, los sistemas del tipo reacción-difusión son frecuentes y de importancia considerable en muchas áreas de las ciencias físicas. Por ejemplo, mediante *la teoría de bandas* (ver p.ej. Kittel C. 1995), los sólidos cristalinos como semimetales y semiconductores, pueden describirse eléctricamente a través de ecuaciones de transporte de carga de *electrones* (carga negativa) y *huecos* (carga positiva) en bandas de energía específicas; dado que ambas ecuaciones de transporte están acopladas por la vía de la generación- recombinación de portadores, similar a la interacción presa-predador en la Ecología, la concentración de cada portador puede describirse por un modelo similar al de Turing.

Ya que allí aparecen naturalmente las especies activa e inhibidora, dando un pie al mecanismo de estigmergía, una *metáfora cristalográfica* puede ser útil para modelar ciertos aspectos de la evolución espacio temporal de especies sociales, al menos en condiciones estacionarias o cuasi-estacionarias. Esta aproximación ha sido estudiada y aplicada a la modelación espacio-temporal de regiones urbanas, demostrándose no sólo su viabilidad sino también su potencialidad para explicar diversos fenómenos urbanos de distribución heterogénea. (Puliafito J., 2004; Puliafito J.L, 2006).

En el fondo de todo ello parece estar el carácter tanto *discreto como estocástico* de las interacciones, con el que un sistema especie-espacio es capaz de manifestar magnitudes características muy acotadas tales como la masa, dimensiones y vida media de los individuos, todas ellas relativas a una calidad y capacidad portante del sustrato portador (ambiente), y a la vez permitir una multiplicidad de estados dinámicos más o menos similares, sobre los cuales sólo es posible realizar ciertas observaciones estadísticas.

Un programa de investigación que trate con todos estos elementos debe comenzar por modelar un individuo genérico como un autómatas que explora el ambiente y captura y se alimenta con unidades discretas de materia y energía, desarrollando así alguna clase de movimiento aleatorio por pasos confinado mayormente a un cierto territorio. Más allá de su interés teórico, está la eventual aplicación de ciertas analogías simplificadoras -aunque sea restrictivamente-, sobre todo en la dinámica poblacional de concentraciones densas, ya que ello permitiría tender un puente hacia una descripción colectiva análoga a la teoría de bandas de la materia, con todas las ventajas que ello puede reportar.

2 BIOAUTOMATA DE PRIMERA ESPECIE- ECUACION DE LANGEVIN

Sea un dispositivo homeostático de movimiento autónomo, que denominaremos *bioautómata*. En una clase elemental (bioautómata de *primera especie*), tal dispositivo ideal es un sistema biofísico abierto que se mueve aleatoriamente por pasos, en el espacio, a fin de capturar, almacenar y procesar unidades discretas de materia/energía (recursos), y así garantizar su "supervivencia" mientras pueda. Puede verse como una caja negra que es excitada con impulsos de Poisson y responde con desplazamientos espaciales limitados a través de una función de transferencia apropiada. Puesto que debido a tales desplazamientos mecánicos los recursos disponibles en el espacio-ambiente próximo pueden ser capturados, éste último también puede tomarse como una caja negra, que es excitada con una función de paso aleatoria y entrega al bioautómata tales impulsos de energía (fig.1).

La evolución en el espacio del estado del sistema total (bioautómata/ ambiente), es un proceso estocástico que depende por un lado de la eficacia del bioautómata, en particular en cuanto a la captura de recursos y el uso de su reserva interna de la energía, y por el otro lado de la oferta ambiental y de su capacidad de renovación. Habrá soluciones aleatorias estacionarias o cuasi-estacionarias en la medida que el valor esperado de la tasa de energía ingerida por período entre impulsos, sea mayor o igual que la tasa media mínima de consumo de energía [eq. 1]:

$$\langle \epsilon_{\delta i} / T_{\delta i} \rangle \geq \epsilon_0 / T_0 \geq (\delta\epsilon/\delta\tau)_{\min} \quad (1)$$

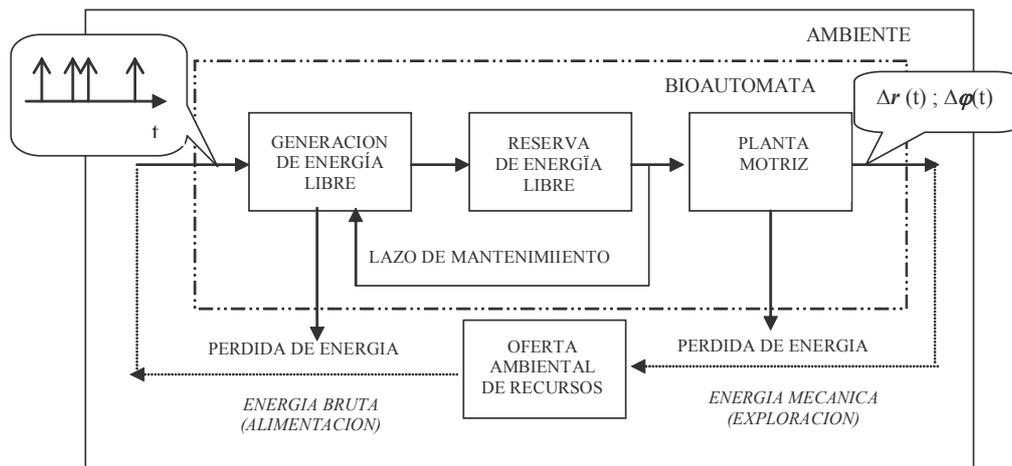


Fig. 1- Esquema simplificado de la interacción bioautómata/ambiente

La eq. [1] puede considerarse el *funcional de primera especie* del bioautómata o funcional de "supervivencia", en donde $(\delta\epsilon/\delta\tau)_{\min}$ desempeña un papel similar al del metabolismo basal en los organismos vivos. Aquí la "supervivencia" del dispositivo, es el conjunto de condiciones que dan como resultado el sostenimiento en el tiempo de las reacciones internas del mismo, dentro de un rango relativamente estable, equilibrando dinámicamente el intercambio energético con el medio.

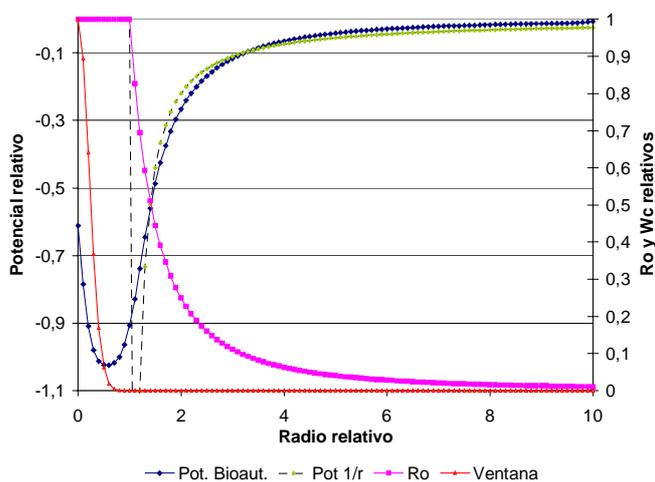


Fig. 2- Aproximación relativa de $U_{br}(r)$ con una ventana $S_c(r)$ gaussiana (W_c) y una densidad de recursos $\rho(r)$ uniforme (R_o) dentro de un radio normalizado $r = 1$

Puesto que el desplazamiento del bioautómata y su supervivencia, están limitados en condiciones estacionarias a un uso óptimo de su reserva interna, puede asociársele a dicha reserva una cierta *función potencial*, como medida de la probabilidad de capturar nuevos recursos. Esta queda definida como una convolución espacio-temporal entre cierta ventana $S_c(r)$, representativa de la percepción y radio

de la captura del bioautómata, y la densidad espacial de recursos $\rho(r)$ (aquí ζ es una constante de proceso y $\tau(r')$ el área explorada) [eq. 2]:

$$U_{br}(r, t) = -(1/2\pi \zeta) \int_{\tau} S_c(r(t) - r') \rho(r') d\tau \quad (2)$$

Esta definición de energía potencial resulta apropiada ya que tomando una ventana gaussiana y una distribución de recursos localizada (por ej. de tipo disco) se obtiene una función espacial en forma de pozo, que reconoce como aproximación las regiones dadas por los tres grados de homogeneidad de la mecánica clásica ($K_h=2$ parabólica para $r \leq 1,5 r_0$, $K_h=1$ lineal para $1,5 r_0 < r < 2r_0$ y $K_h=-1$ newtoniana para $r \geq 2 r_0$, con r_0 un radio característico) (fig. 2).

A diferencia de un potencial clásico, que queda determinada por el medio, U_{br} depende de lo que se espera pueda ofrecer el medio ambiente en términos de recursos, así como del grado de aprovechamiento (o eficiencia) que de dichos recursos esperados pueda lograr el bioautómata, es decir representa *la interacción esperada* bioautómata-medio. Así su interpretación como función potencial está condicionada a que el movimiento resultante sea un proceso estacionario o cuasi estacionario, o en otras palabras, a que resulte ser un *estimador eficiente de la distribución espacial de recursos*.

De las anteriores definiciones puede derivarse para el bioautómata una *ecuación diferencial estocástica generalizada de Langevin*, la que puede analizarse por partes en las regiones de homogeneidad antedichas ($\bar{\mathbf{r}}$ es el radio vector estocástico) (eq. 3).

$$m \cdot \frac{d^2}{dt^2} \bar{\mathbf{r}} + f \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{r}} - \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{r}}} U_{br}(\bar{\mathbf{r}}, t) = \bar{\mathbf{F}}_{ex}(t) = m \cdot \bar{\mathbf{n}}(t) \quad (3)$$

Notemos que la ecuación (3) ha reducido el esquema más o menos complejo de interacciones de la figura 1, al movimiento estocástico disipativo de una partícula puntual de masa m y fricción f , sometida a ciertas fuerzas de excitación y a fuerzas de restitución que dependen del potencial virtual $U_{br}(\bar{\mathbf{r}}, t)$. Formalmente la ec. (3) puede interpretarse como una clase generalizada de *movimiento browniano*, en donde $\bar{\mathbf{n}}(t)$ representa ruido blanco granalla, aunque conviene tener en cuenta:

- a) La fuente energética inmediata del movimiento en el bioautómata es de carácter *interna* y aunque también resulta de ciertos impulsos de excitación, implica una respuesta motriz no instantánea, entre otras cosas porque interviene la generación y mantenimiento de una reserva energética. Esto por sí solo no impide su reducción al movimiento browniano, por ejemplo a través de una inercia efectiva del sistema (es decir una masa eficaz), pero impone una restricción al movimiento toda vez que debe conservar siempre activas las reacciones internas bioquímicas y a su vez sufragar el impulso motor (el cual puede o no verse recompensado apropiadamente por una nueva ingesta energética). La competencia entre usos (aunque complementaria) lleva a identificar virtualmente dos especies distintas de almacenamiento y eventualmente un juego oscilatorio entre ellas.
- b) Las trayectorias en la partícula browniana clásica, también aleatorias, provienen de la causalidad de las leyes mecánicas del choque, en esencia deterministas (lo que deriva en un proceso estocástico de Markov); en el caso del bioautómata, se producen en cambio por “decisión” propia; es decir son en principio no causales e *intrínsecamente aleatorias*, de modo que están aparentemente “desconectadas” de los impulsos energéticos primarios de alimentación. No obstante, en condiciones estacionarias o cuasi estacionarias, las trayectorias *medias* pueden considerarse también como rectas entre dos eventos impulsivos espacio-temporales de alimentación, resultando así un movimiento de característica markoviana en sus medias, que es potencialmente reductible a leyes mecánicas análogas a las del choque, aunque con *fuerzas de excitación aparentes*.

Puesto de esta manera, la principal diferencia con la partícula browniana clásica proviene del efecto restituyente del potencial virtual, mecanismo mediante el cual pueden definirse

fuerzas aparentes reactivas contra el mayor gasto de reserva en una zona de baja densidad de recursos. Matemáticamente, esto implica que el movimiento no sólo puede ser estacionario en la velocidad, como en el caso browniano clásico, sino también en la posición. En este sentido, en tanto que en la partícula browniana clásica resulta suficiente su descripción dinámica como un proceso de *Wiener-Levy* (integral de ruido blanco gaussiano), en el bioautómata aparecerán propiedades estadísticas notables cuando consideramos que la excitación es por ruido granalla.

3 COMPORTAMIENTO EN ZONAS $K_h = 2$

En las proximidades del centro de la distribución $\rho(r)$, $U_{br}(\bar{\mathbf{r}})$ adquiere una forma que se asemeja a una parábola de segundo grado ($K_h = 2$); como el gradiente de potencial $-\nabla U_{br}(\bar{\mathbf{r}})$, es decir la fuerza reactiva potencial, resulta en una función del espacio que puede ser expresada genéricamente mediante una serie polinómica estocástica, una primera aproximación consiste en describir realizaciones de movimientos en los que dichas fuerzas son aproximadamente proporcionales a los desplazamientos ($\bar{\mathbf{F}} \approx k \cdot \bar{\mathbf{r}}$):

$$\frac{d^2}{dt^2} \bar{\mathbf{r}} + \beta \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{n}}(t) \quad (4)$$

con $\beta = f/m$ y $\omega_0^2 = k/m$ que corresponde al caso del movimiento de una partícula en medio viscoso bajo la acción de un campo central. En el caso del bioautómata, β debe interpretarse más genéricamente como la relación entre las fuerzas disipativas totales (exteriores e interiores) y la masa total equivalente que incluye la masa inerte y la biomasa asociada. El problema bidimensional puede ser descrito en términos de un proceso analítico con una variable aleatoria compleja:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{x}(t) + j \mathbf{y}(t) \quad (5)$$

Los procesos estocásticos $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$, se encuentran también descriptos por ecuaciones diferenciales independientes del tipo (4), acopladas a través de coeficientes $\beta_x = \beta_y = \beta$ y $\omega_{0x} = \omega_{0y} = \omega_0/\sqrt{2}$, lo que presupone isotropía espacial. De esta forma $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$, pueden considerarse como procesos de *Hilbert* en cuadratura representativos del proceso complejo $\mathbf{r}(t)$, con excitación $\mathbf{n}(t) = \mathbf{n}_x(t) + j \mathbf{n}_y(t)$. Las variables aleatorias \mathbf{x} e \mathbf{y} para un dado $t = t_1$ son ortogonales, pero los procesos $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$ no lo son necesariamente, ya que esto exigiría que la correlación cruzada $R_{xy}(\tau) = 0$ para todo $\tau = t_1 - t_2$. Por otra parte, para que el proceso $\mathbf{r}(t)$ sea estacionario en sentido amplio, se requiere además que los procesos componentes $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$ sean conjuntamente estacionarios en sentido amplio, es decir que cumplan simultáneamente que sus medias sean constantes y que las respectivas autocorrelaciones, así como su correlación cruzada, dependan sólo de la diferencia de tiempos τ .

Las propiedades fundamentales del movimiento surgen de la ecuación característica para la autocorrelación de cualquiera de las dos componentes, es decir:

$$p^2 + \beta \cdot p + \omega_{0x}^2 = 0 \quad \text{con } p_{1,2} = -\beta/2 \pm (\beta^2/4 - \omega_{0x}^2)^{1/2} \quad (6)$$

que resulta en los tres casos conocidos: a) $\beta/2\omega_{0x} < 1$, en el que el movimiento será armónico subamortiguado, b) $\beta/2\omega_{0x} = 1$ que representa un movimiento armónico críticamente amortiguado, y c) $\beta/2\omega_{0x} > 1$ en el que el movimiento será sobreamortiguado, caso este último en el que, si $\beta/2\omega_{0x} \gg 1$, pueden desprejarse las aceleraciones en la ecuación diferencial estocástica (3). En particular, nos interesa el caso armónico subamortiguado, que describe un rango de soluciones correspondiente a *un oscilador estocástico*, en el que las trayectorias son "órbitas" estocásticas descriptas por:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r} e^{-0,5 \beta t + j(\omega_d t + \varphi)} \quad (7)$$

con $\omega_d = \omega_0 (1 - \beta^2/4\omega_0^2)^{1/2}$; $\mathbf{r} = (\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2)^{1/2}$; $\varphi = \arctag(\mathbf{y}/\mathbf{x})$

Este caso arroja los *mayores tiempos posibles de vida media* del bioautómata ($\tau \sim 2/\beta$), siendo así el más apropiado a las definiciones anteriores.

3.1 Análisis estadístico con excitación por ruido blanco normal

En un oscilador estocástico, las excitaciones $\mathbf{n}_x(t)$ y $\mathbf{n}_y(t)$ se consideran típicamente procesos estacionarios distribuidos normalmente con media cero; ya que la ecuación (7) corresponde a un sistema lineal excitado por ruido estacionario, con función de transferencia en el dominio de la frecuencia $H(j\omega) = 1/((j\omega)^2 + j\omega\beta + \omega_0^2)$, suponiendo ruido blanco con espectros de potencia $S_{nnx}(\omega) = S_{nny}(\omega) = \alpha$, se tiene (ver por ej. Papoulis A. 1980):

$$S_{xx}(\omega) = S_{nnx}(\omega) / |(j\omega)^2 + j\omega\beta + \omega_0^2|^2 = \alpha / [(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2\beta^2] = S_{yy}(\omega) \quad (8)$$

Considerando además que $S_{rr}(\omega) = 2S_{xx}(\omega) + j2S_{yx}(\omega) = S_{r00}(\omega - \omega_d)$ (con un espectro de potencia de módulos $S_{r00}(\omega) = 4S_{xx}(\omega)$ para $\omega > 0$, y $S_{r00}(\omega) = 0$ para $\omega < 0$) resulta:

$$\begin{cases} f_r(r) = (r/\sigma_0^2) e^{-r^2/2\sigma_0^2} \\ E\{r\} = r_0 = (\pi/2)^{1/2} \sigma_0 = (\pi\alpha/4\beta)^{1/2} 1/\omega_0 \\ E\{r^2\} = 2\sigma_0^2 = \alpha/\beta\omega_0^2 \end{cases} \quad (9)$$

en donde $f_r(r)$, $E\{r\}$ y $E\{r^2\}$ son respectivamente, la distribución de módulos del radio (Rayleigh), el valor medio (radio característico) y la varianza del movimiento. Asimismo, dicho proceso está caracterizado por la función de distribución $F_\varphi(\varphi)$ que resulta ser uniforme en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ con media cero.

En (9), vemos que una solución estacionaria en sentido amplio está asociada a un área eficaz espacial constante, definida tanto por una frecuencia natural de oscilación como por la característica del medio circundante. Es importante destacar que el espectro $S_{rr}(\omega)$ de $\mathbf{r}(t)$ resulta de trasladar el espectro S_{r00} del módulo \mathbf{r} en una magnitud igual a ω_d , lo que en otros términos podría interpretarse como una *modulación* de un movimiento básicamente browniano a través de una *frecuencia propia* ω_0 , lo que justamente provoca que el movimiento resultante sea estacionario en sentido amplio en cuanto a su posición.

3.2 Análisis estadístico con excitación por ruido granalla

Consideraremos ahora el caso específico de interés, es decir cuando $\mathbf{n}(t) = \mathbf{n}_x(t) + j\mathbf{n}_y(t)$ es ruido granalla, representativo de los eventos discretos de alimentación. Para ello, nos interesa la resultante de las fuerzas aparentes de excitación $\bar{\mathbf{F}}_{ex}$ que puede expresarse como:

$$\bar{\mathbf{F}}_{ex}(s) \approx \sum_i \gamma \Delta s \cdot \delta(s - s_i) \bar{s}^0 \rightarrow \bar{\mathbf{F}}_{ex}(t) = \sum_i (\mathbf{e}_i / \bar{v}_i) \delta(t - t_i) \quad (10)$$

En la primera expresión de la ec. (10) γ es la densidad aparente de energía por unidad de longitud, Δs el paso medio y $\delta(s - s_i)$ la función Delta de Dirac para $s = s_i$, describiendo así un tren de impulsos localizados en (i) posiciones aleatorias sobre la trayectoria s . Las posiciones aleatorias $s = s_i$ pueden considerarse como eventos independientes, de modo que el proceso resultante es de Poisson, con parámetro de densidad de puntos α_s determinado por la distribución de recursos en el espacio, y valor esperado $\langle \bar{\mathbf{F}}_{ex} \rangle = \gamma \delta s \alpha_s$. La segunda expresión de la ec. (10) está en función explícita del tiempo, con \bar{v} la velocidad vectorial instantánea del bioautómata sobre la trayectoria s , y \mathbf{e}_i la energía específica del recurso capturado en las posiciones aleatorias $s = s_i$. Ello resulta en un ruido excitación de módulo:

$$|\mathbf{n}(\mathbf{t})| = |\bar{\mathbf{F}}_{\text{ex}}(\mathbf{t})|/m_0 = \sum_i (\boldsymbol{\varepsilon}_i / m_0 \mathbf{v}) \delta(\mathbf{t}-\mathbf{t}_i) \cong \langle \boldsymbol{\varepsilon} / m_0 \mathbf{v} \rangle \sum \delta(\mathbf{t}-\mathbf{t}_i) \cong \varepsilon_0 / m_0 v_0 \sum_i \delta(\mathbf{t}-\mathbf{t}_i) \quad (11)$$

El último término es una aproximación con impulsos de área constante, considerando un proceso estacionario, con $\varepsilon_0/m_0 v_0$ el valor medio de las velocidades instantáneas. En estas condiciones, la autocorrelación del proceso sobre la trayectoria s es:

$$R_{\text{nn}}(t_1-t_2) = (\varepsilon_0/m_0 v_0)^2 \{ \alpha_t'^2 + \alpha_t' \delta(t_1-t_2) \} \quad (12)$$

donde $\alpha_t' = \alpha_{s,v}$ la densidad de eventos de captura en el tiempo a lo largo de s . En régimen estacionario $\langle \mathbf{r} \rangle = \langle s \rangle / 2\pi$, el espectro de potencia del ruido sobre la trayectoria $S_{\text{nn}}(\omega)$ se puede convertir a otro $S_{\text{nn}}(\omega')$ sobre el módulo del radio haciendo $\alpha_t' = 2\pi \alpha_t$:

$$S_{\text{nn}}(\omega) / 2\pi = 4\pi^2 (\varepsilon_0/m_0 v_0)^2 \alpha_t'^2 \delta(\omega') + (\varepsilon_0/m_0 v_0)^2 \alpha_t' \quad (13)$$

De esta forma, $S_{\text{roo}}(\omega) / 2\pi = S_{\text{nn}}(\omega') / 2\pi |H(j\omega)|^2$, es decir el espectro de potencia de los módulos del radio resulta ser :

$$S_{\text{roo}}(\omega) / 2\pi = \frac{4\pi^2 (\varepsilon_0/m_0 v_0)^2 \alpha_t'^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \beta^2} \delta(\omega) + \frac{(\varepsilon_0/m_0 v_0)^2 \alpha_t'}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \beta^2} \quad (14)$$

Como puede verse, está compuesto de dos términos, uno que es un impulso $\delta(\omega)$ situado en $\omega=0$, que establece una condición sobre la media del proceso, y otro que representa un espectro de banda pasante y que establece una condición sobre la dispersión del proceso. En efecto, antitransformando la ec.(14) obtenemos $R(\tau) = \eta^2 + C(\tau)$, es decir:

$$\eta_{\text{roo}}^2 = E^2 \{ \mathbf{r} \} = r_0^2 = 4\pi^2 (\varepsilon_0/m_0 v_0)^2 \alpha_t'^2 / \omega_0^4 \quad (15.a)$$

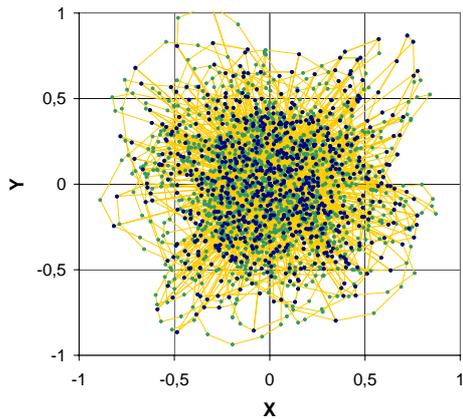
$$C_{\text{roo}}(\tau) = E \{ \mathbf{r}^2 \} = 2\pi (\varepsilon_0/m_0 v_0)^2 \alpha_t' \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau+\zeta) h(\zeta) d\zeta \quad (15.b)$$

A partir de aquí, y como en el punto 3.1, queda descrito un movimiento sobre el radio vector de posición $\mathbf{r}(\mathbf{t}) = \mathbf{r} e^{-0,5 \beta t + j(\omega_d t + \varphi)}$, con $\omega_d = \omega_0 (1 - \beta^2/4\omega_0^2)^{1/2}$ y $S_{rr}(\omega) = S_{\text{roo}}(\omega - \omega_d)$, en donde $f_r(\mathbf{r}) = (r/\sigma_0^2) e^{-r^2/2\sigma_0^2}$. Conservamos además que el movimiento está caracterizado por la función de distribución de fases $F\varphi(\varphi)$ que resulta ser uniforme en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ con media cero.

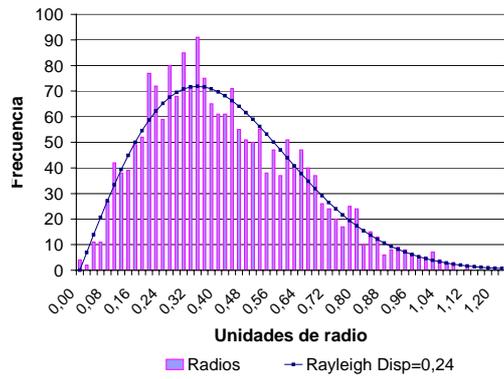
3.3 Simulación numérica

A los efectos de facilitar el análisis se ha realizado una simulación numérica de la ec. diferencial estocástica (4) en modo iterativo con 2000 iteraciones (Fig. 3). Las aceleraciones, velocidades y posiciones resultan de integrar las fuerzas reactivas así como de las fuerzas discretas aparentes de excitación. Éstas últimas, surgen de una secuencia aleatoria de unos y ceros en un período de cinco pasos, separados en el tiempo con una cierta densidad de diferencias de tiempo distribuidas exponencialmente (es decir 01011-00101-00010-etc); la distribución resultante es una distribución de impulsos de Poisson de energía unitaria con una densidad determinada (aquí se usó 0,42). Los ángulos direccionales φ se obtienen a partir de una secuencia numérica de números pseudo aleatorios distribuidos prácticamente de manera uniforme a lo largo del intervalo $(-\pi; \pi)$. La simulación ha sido realizada con los parámetros que se muestran en la tabla 1 de la Fig. 3.

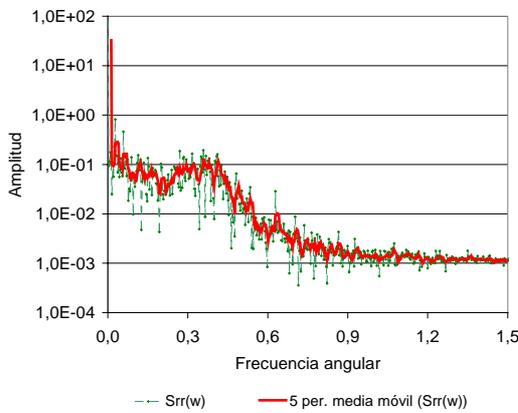
En la fig. 3.a se muestran las trayectorias; además sobre ella se exhiben las posiciones de encuentro con los recursos que corresponden a la secuencia de impulsos de entrada. Así una *nube de puntos de excitación* se asocia a tales trayectorias, que es más densa en el centro y se diluye hacia el exterior. Aunque no se muestran en el gráfico, las distribuciones de distancias



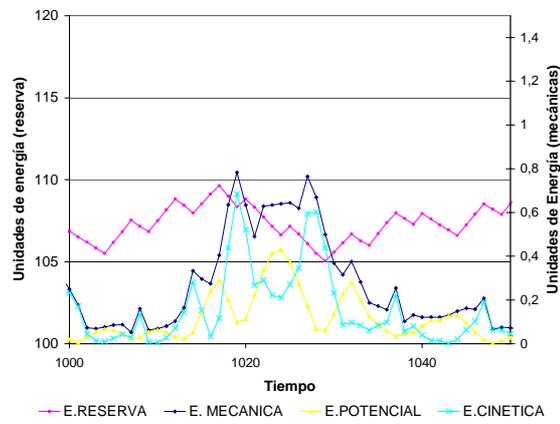
a- Trayectoria y puntos de encuentro con los recursos



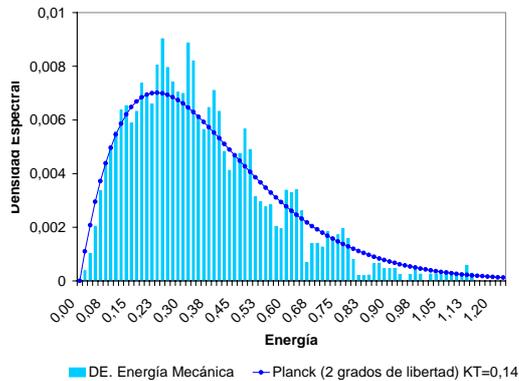
b- Distribución de Radios



c- Espectro de Potencia de Radios



d- Evolución de Energía Mecánica



e- Distribución de Energía Mecánica

Período de Alim.	5
Masa	10
Fricción	3,145
C.Elástica	0,987
Frec. Angular ω_x :	0,314165561
Frecuencia f_x :	0,050001002
Beta:	0,3145
Beta/2Frec.(x) = ξ_x	0,500532265

Tabla 1- Parámetros de simulación de la fig. 2

Fig.3- Simulación numérica del Bioautómata con excitación de Poisson y selección aleatoria de dirección., y parámetros de simulación dados en Tabla 1.

x-y así como de las componentes x-y de las velocidades siguen una forma gaussiana, mientras si se puede ver que los radios de la posición siguen una distribución de Rayleigh (fig. 3.b).

El espectro de potencia de los radios tiene la distribución concordante en frecuencia, mostrando una función de transferencia de segundo orden desplazada en la frecuencia angular natural del sistema (fig. 3.c). Las fluctuaciones de energía (mecánica y de reserva) se muestran para un intervalo representativo de tiempo en (fig. 3.d) mostrando el comportamiento estacionario previsto.

A diferencia de lo que se esperaría con fuerzas gaussianas, aquí la distribución de energía mecánica del sistema en la fig 3.e (así como sus transiciones), tiene una densidad espectral que sigue aproximadamente una distribución del tipo de Planck con dos grados de libertad (el factor de correlación es del orden de 0.97):

$$F(\varepsilon) = A \cdot \varepsilon^2 \cdot (e^{\varepsilon/\varepsilon_T} - 1)^{-1} \quad (16)$$

donde ε representa la energía, ε_T una energía “térmica” de equilibrio, y A una constante característica apropiada. El tercer factor toma la forma de la función de distribución de Bose-Einstein, mientras que aquí ε está al cuadrado en lugar de una potencia cúbica como en la ley de radiación de Planck.

En este sentido, la fig 4 exhibe una distribución de componentes instantáneas x-y de las fuerzas virtuales de entrada con ley seno (descomposición vectorial en fases aleatorias distribuidas uniformemente); sus medias móviles (en una ventana de la misma longitud del período de alimentación) muestran en cambio la tendencia a distribuciones gaussianas esperada, aunque con una clara estructura reticular fina.

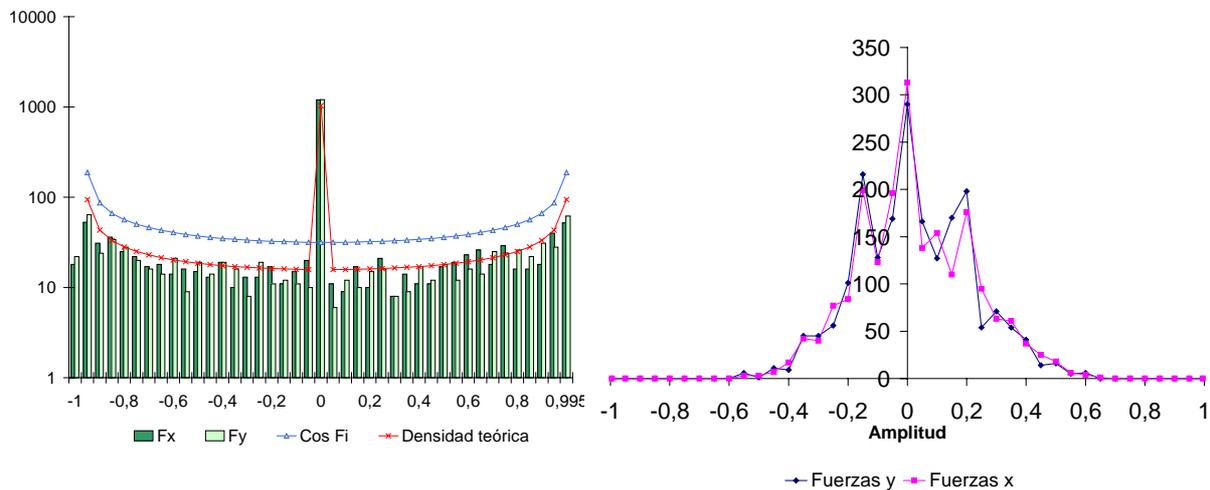


Fig.4- Fuerzas de excitación : a (izquierda) Distribución de la componentes x-y instantáneas; b (derecha) Distribución del promedio temporal de las componentes x-y

3.4 Cuantificación del comportamiento para $K_h=2$

Los resultados revelan la necesidad de considerar un comportamiento cuantificado en función del número entero de acontecimientos de captura asociados a la densidad de ruido. En efecto, es posible analizar el comportamiento del dispositivo descomponiendo su excitación en términos de una *suma aleatoria de modos de entrada k*, donde $k=1$ representa siempre un impulso de entrada por período de alimentación, $k=2$ representa una secuencia aleatoria de solamente dos impulsos por período, $k=3$ corresponde a tres impulsos, etc. Esto está dado por las ecuaciones (17) y (18) donde $\check{z}(t)$ es el promedio móvil de fuerzas de excitación $z(t)$ en el período de alimentación T^* (que son de carácter impulsivo), φ_i las fases aleatorias azar en el instante i , $f_z(z)$ la densidad de distribución de $\check{z}(t)$ y $f_{z_k}(y)$ para la densidad de distribución de los componentes de fuerzas en el modo de entrada k .

$$\check{z}(t) = (1/T^*) \int_t^{t+T^*} \mathbf{F}_{ex}(t) dt \rightarrow \sum_t^{t+n\tau} \delta(k\tau) \cdot (\tau/T^*) \cdot \sin \varphi(k\tau) = \sum_0^n a \cdot \sin \varphi_i = \sum_0^n \mathbf{x}_i = \mathbf{y}_n \quad (17)$$

$$\text{con } (\mathbf{y}_0 = 0 ; \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 ; \mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 ; \dots ; \mathbf{y}_k = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_k) ; (a = \tau/T^*)$$

$$\begin{cases} f_z(z) = \sum_k P(\mathbf{n}=\mathbf{k}) \cdot f_{zk}(y) \quad (k=0,1,..) \\ f_{zk}(y) = f_x(y) * f_x(y) * \dots * f_x(y) \quad (k \text{ veces}) \end{cases} \quad (18)$$

Operando a partir de (17), con la función característica de $f_{zk}(y)$ en el *dominio estocástico de la frecuencia* Ω , se obtiene la forma final de la descomposición de la densidad de distribución $f_z(z)$:

$$f_z(z) = (1/\pi) \sum_k b_k f_{zk}(z) \quad (19.a)$$

con:
$$f_{sk}(z) = \int_0^\infty J_0^k(a\Omega) \cdot \cos \Omega z \, d\Omega \quad (19.b)$$

$$b_k = e^{-\lambda \cdot T^*} \cdot (\lambda \cdot T^*)^k / k! \quad (19.c)$$

En las ec. (19) $f_{zk}(z)$ es la componente k -modal de la densidad de la distribución, expresada como la transformada de Fourier en coseno de la potencia k de la función de Bessel de primera especie de orden cero $J_0(a\Omega)$; a su vez b_k es el factor de peso del modo k , expresado como coeficiente de probabilidad de Poisson. Aunque dichas ecuaciones expresan la solución general, debe establecerse una *frecuencia estocástica de corte superior* correspondiente a $f_{zk}(z)$, que surge de la *estructura reticular de fuerzas* en condiciones estacionarias:

$$\Omega_{\max} = 2\pi / F^* = 2\pi \cdot \sqrt{2} \cdot T^* / \langle \mathbf{p} \rangle = 2\pi \cdot \sqrt{2} \cdot \tau / a \cdot \langle t/\mathbf{p} \rangle \quad (20)$$

Aquí F^* es el valor medio de las fuerzas integrado sobre T^* , y $\langle \mathbf{p} \rangle / \sqrt{2}$ el valor medio rms de los momentos cinéticos en el mismo período; en un sistema de unidades donde $\langle t/\mathbf{p} \rangle = 1$, con $a = \tau / T^* = 0.2$ y $\tau = 1$, Ω_{\max} resulta muy cerca de la tercera raíz de $J_0(a\Omega)$ ($\Omega_{\max} \cong 44$). El resultado de la ec. (19) se muestra en la fig. 5.b, que presenta prácticamente la misma estructura de la fig. 4.b. En la fig. 5a se muestran las componentes de fuerzas k -modales.

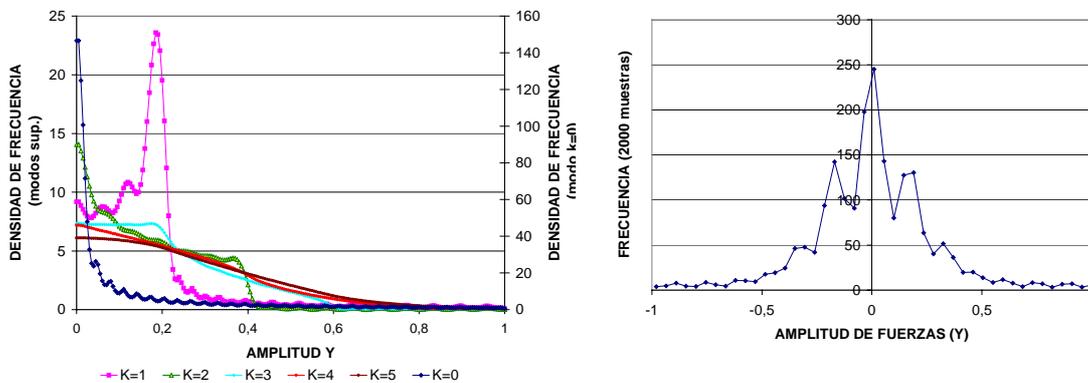


Fig. 5- Teoría de la estructura reticular de fuerzas con excitación granalla: a) (izq.) Componentes de fuerza k -modales; b) Distribución del promedio de fuerzas según el cálculo teórico-

Entre los modos notables está $k=1$, que se puede simular por medio de un tren determinístico de impulsos, de modo que todo el comportamiento aleatorio sea solamente debido a la selección de las fases. La distribución de energía resultante (cinética así como potencial) se puede aproximar aquí por Maxwell-Boltzman, como se esperaría desde consideraciones medias clásicas (fig. 6). Podemos también pensar en un modo donde $k=0$, que significa que no llega ningún impulso (no se captura ningún recurso), de modo que el movimiento se hace a la sola expensa de la reserva interna de energía, con una energía mecánica media total que, por el *teorema del virial* (caso $K_h = 2$), es *la mitad* de la energía total del sistema en el modo $k=1$.

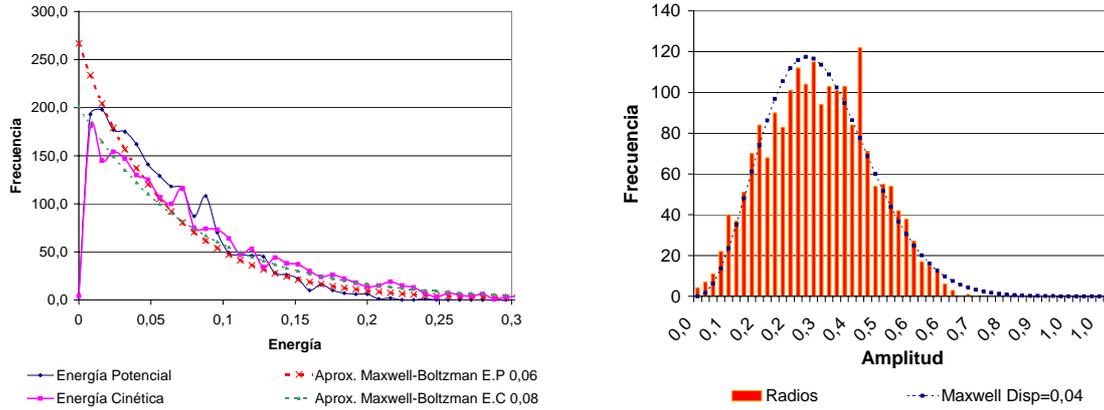


Fig. 6.- Modo k=1. a) (izq) Distribución de energías cinética y potencial (izquierda) v b) (derecha) distribución de módulos del radio

En vista de lo anterior, también es posible descomponer en k modos los valores medios del momento angular así como de la energía mecánica. En efecto, volviendo a la ec. (15.a), recordando que $2\pi\alpha_t = \alpha_s \cdot v_0 = (N/r_0) v_0$, y reemplazando se tiene

$$N^2 \varepsilon_0^2 / \omega_0^2 = m_0^2 \omega_0^2 r_0^4 = \langle \mathbf{M}_\phi \rangle^2 \quad (21)$$

donde $\langle \mathbf{M}_\phi \rangle$ es el valor esperado del momento angular cuando es excitado por N eventos de captura por período de alimentación. En la ec. (25), podemos inmediatamente definir *una constante de acción* $\varepsilon_0 / \omega_0 = a / 2\pi = \check{a}$, que representa la tasa media de energía ingerida por evento de captura, asociada a *una cierta capacidad de ingesta* del bioautómata.

De este modo, considerando a k=0 *el modo basal*, obtenemos las componentes k-modales para el momento angular, y por extensión de la energía, en las regiones $K_h=2$:

$$\mathbf{M}_{\phi 0k} = (k + 1/2) \check{a} \quad (22)$$

$$E_{0k} = (k + 1/2) \check{a} \omega_0 \quad (23)$$

Otras magnitudes relacionadas con el movimiento, pueden obtenerse de la resolución de la ec. (15.b):

$$C_{\mathbf{r}00}(\tau) \Big|_{\tau>0} = A/4\xi\omega_0^3 e^{-\xi\omega_0\tau} \{ \cos \omega_0 \sqrt{1-\xi^2} \tau + [\xi/\sqrt{1-\xi^2}] \text{sen } \omega_0 \sqrt{1-\xi^2} \tau \} \quad (24)$$

$$\text{con } A = 2\pi (\varepsilon_0/m_0v)^2 \alpha_t ; \quad \xi = \beta/2\omega_0 = f/2(m_0k)^{1/2}$$

Sustituyendo nuevamente $2\pi\alpha_t = \alpha_s \cdot v_0 = (N/r_0)v_0$ y $\varepsilon_0 / \omega_0 = \check{a}$, y además considerando $\omega_0 \cdot r_0 = v_0$, se tiene para $\tau = 0$:

$$C_{\mathbf{r}00}(0) = \sigma_0^2 = A/4\xi\omega_0^3 = N (\check{a}^2/m_0^2v_0^2)/4\xi \quad (25)$$

que resulta en las componentes k-modales de la *dispersión* de radios:

$$\begin{cases} \sigma_{0k}^2 = (k + 1/2) (\check{a}^2/m_0^2v_0^2)/4\xi \\ \sigma_{00} = [1/2 \sqrt{2\xi}] \check{a} / m_0 v \end{cases} \quad (26)$$

en donde σ_{00} corresponde al modo basal k=0. En vista de lo obtenido hasta aquí, también podemos escribir para los radios y velocidades, las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} r_{0k}^2 = (k + 1/2) \check{a} / m_0 \omega_0 = (k + 1/2) r_0^2 \\ r_{00}^2 = \check{a} / 2m_0 \omega_0 = 4\sigma_{00}^2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} v_{0k} = \omega_0 r_k = (k + 1/2)^{1/2} \omega_0 r_0 \\ v_{00} = (\check{a} / 2m_0)^{1/2} \omega_0^{1/2} = 2 \omega_0 \sigma_{00} \end{cases} \quad (27)$$

En la ec. (27) hemos hecho $r_{00}^2 = 4\sigma_{00}^2$ y correspondientemente $v_{00} = 2 \omega_0 \sigma_{00}$; ello se sustenta en la simulación para $k=1$ (fig. 6), que también muestra que las componentes k-modales de los radios (y por lo tanto de las velocidades) no están distribuidas por Rayleigh como en la simulación general, sino más bien por la densidad de Maxwell:

$$f_{r_{0k}}(r) = (r^2/\sigma_{0k}^3) e^{-r^2/2\sigma_{0k}^2} \quad (28)$$

en consonancia con la distribución de energía cinética y potencial. Ello sugiere que dichas componentes modales representan *grupos* de soluciones de tres grados de libertad (incluyendo una rotación estocástica intrínseca) y no dos como en el caso compuesto.

Así, las ecuaciones (22), (23), (26) y (27) reflejan los *valores medios de los grupos de estados asociados*, tal que su composición, mediante los coeficientes de Poisson dados en (23.c), definen el *estado mezclado general* del Bioautómata en zonas $K_h=2$.

3.5 Otros parámetros y relaciones características

Vinculando las ec. (26) y (27), podemos ver que

$$\xi m_0 v_0^2 = \check{\alpha} \cdot \omega_0 \quad (29)$$

que indica que en estado estacionario cada evento de captura debe suministrar una unidad de energía $\varepsilon_0 = \check{\alpha} \cdot \omega_0$ para compensar la pérdida por fricción $\xi m_0 v_0^2$. Esto está de acuerdo al hecho que la energía interna del bioautómata dada por la energía cinética más la energía de reserva resulta ser precisamente $E_i = m_0 v_0^2$. Debemos tener en cuenta aquí que la velocidad media del bioautómata es un parámetro característico del dispositivo que surge de la máxima velocidad de paso que puede desarrollar en cualquier circunstancia; en consecuencia $v = v_0$ es también la *velocidad característica de la interacción bioautómata/medio*, a la que por otra parte podemos asignarle una *masa efectiva* $m_\delta = \xi m_0$, tal que:

$$\begin{aligned} m_\delta v^2 &= \check{\alpha} \omega_0 \\ \check{\alpha} / m_\delta v &= v/\omega_0 = \lambda_{bc}/2\pi \end{aligned} \quad (30)$$

La magnitud $p_\delta = m_\delta v$ puede interpretarse como el *impulso medio aparente* que tendrían los recursos si fijamos la posición del bioautómata. Así, λ_{bc} puede interpretarse como una *longitud de onda característica asociada a la interacción bioautómata medio*. Por otra parte, observemos que a partir de (27) se satisfacen también relaciones ondulatorias similares para cada grupo k:

$$\check{\alpha} / p_{0k} = \lambda_{0k}/2\pi = r_{0k} / (k + 1/2) \quad (31)$$

en donde λ_{0k} y $p_{0k} = m_0 \omega_0 r_{0k} = m_0 v_{0k}$, son respectivamente *la longitud de onda e impulso medios* asociados del grupo.

A partir de la ec. [14] podemos extraer aún algunas otras conclusiones. El segundo término del segundo miembro es la transformada $\Gamma_{rr}(j\omega)$ de la autocorrelación de radios; analizaremos qué sucede si se produjeran *alteraciones* de la velocidad media y de la masa del bioautómata (expresándolas como medias variables v y m). Operando se tiene:

$$\omega_0 |\Gamma_{rr}(j\omega)|^2 = \frac{N \check{\alpha}^2 / p^2}{|1 - \omega^2/\omega_0^2 + 2j \xi \omega/\omega_0|^2} = \frac{r_0^2}{|1 - \omega^2/\omega_0^2 + 2j \xi \omega/\omega_0|^2} = |\Re(j\omega)|^2 \quad (32)$$

En el segundo miembro de la ec. (32) el factor N es también una media variable y función de la velocidad v media variable. Nos interesa evaluar el caso en el que las variaciones mantienen aún el régimen estacionario, es decir cuando el numerador es constante e igual al radio medio de exploración r_0^2 . En el tercer y cuarto miembro, ω desempeña el rol de la

frecuencia aparente del régimen medio de excitación forzado, producto del movimiento de búsqueda de bioautómata; así la frecuencia relativa ω/ω_0 deviene de la variación de la velocidad relativa media del bioautómata v/v_0 , y la respuesta $|\Re(j\omega)| = r(v/v_0) = r$ resulta:

$$r = \frac{r_0}{[(1-v^2/v_0^2)^2 + 4\xi^2 v^2/v_0^2]^{1/2}} \quad (33)$$

que expresa *la relatividad del radio medio de exploración* con respecto a la velocidad media, y es la respuesta media espacial del sistema realimentado bioautómata-medio (fig. 1), ante variaciones de los parámetros de la interacción, con el fin de mantener su situación estacionaria. Ello exige la conservación de la relación entre la función de reserva potencial del dispositivo y el radio medio de exploración, es decir $U_{br0}/r_0 = U_{br}/r = \text{cte} = (\pi A/8f) m_0^2/r_0$, (aquí usamos la ec. (26) en la que A es la densidad espectral de ruido granalla). Si las variaciones se deben sólo a una acumulación o reducción de masa por efecto del cambio del valor medio de la reserva ($A/f = \text{cte}$), resulta que $m_0^2/r_0 = m^2/r$. Más genéricamente, podemos asociar los efectos de las variaciones posibles de A y f a masas eficaces m_0^* y m^* , con lo que, dentro de ciertos límites, se debe cumplir:

$$m^* = \frac{m_0^*}{[(1-v^2/v_0^2)^2 + 4\xi^2 v^2/v_0^2]^{1/4}} \quad (34)$$

que para casos en donde ξ es pequeño ($\xi \approx 0$), adopta una forma análoga a la conocida fórmula relativista $m = m_0 / (1-v^2/c^2)^{1/2}$.

Las ecuaciones (29), (30), (31) y (34) expresan ciertas relaciones *viriales* que caracterizan a las soluciones estacionarias; en forma más general, establecen una *relación alométrica entre el flujo de recursos y la masa efectiva del dispositivo*, análoga a las que se observan en el mundo biológico. En efecto, ya que $2\omega_0/\beta > 1$, partiendo de la función de reserva potencial en la ec. (2), igualando a la energía capturada en términos de recursos y operando con (25), se tiene:

$$\delta\varepsilon/\delta t > 1/2 (\pi/2)^{1/2} k^{3/4} A^{1/2} (\delta s/\delta t) m_0^{3/4} \quad (35)$$

con $\delta\varepsilon/\delta t$ la tasa temporal de recursos capturados, y $\delta s/\delta t$ la *velocidad característica de paso*. Comparando con la ecuación (1) que representa el funcional de supervivencia, concluimos que *la relación alométrica* del bioautómata es:

$$(\delta\varepsilon\delta\tau)_{\min} \sim a m_0^b \quad (36)$$

con $a = (\pi/2)^{1/2} k^{3/4} A^{1/2} (\delta s/\delta t)$ y $b = 0,75$ los parámetros alométricos que caracterizan a la solución estacionaria, y de la cual puede obtenerse inversamente la densidad espectral A de equilibrio. La ec. (36), en donde $(\delta\varepsilon\delta\tau)_{\min}$ representa el metabolismo basal y m_0 se expresa en kg de peso, se cumple aproximadamente para la mayoría de los mamíferos según *la teoría de similitud biológica* de Max Klieber (1932) ($b=0,738$) e incluso para distintas especies homieotermas, polikotermas y unicelulares según estudios más recientes como Hemmingsen (1960) (con $b=0,75$) y Günther et al.(1992).

4 COMPORTAMIENTO EN ZONAS ALEJADAS

Hasta aquí hemos descrito el comportamiento del bioautómata en regiones $K_h=2$, que también puede considerarse como una cuestión de evoluciones cerca del centro de una distribución de recursos. Consideraremos ahora brevemente qué sucede si el dispositivo es colocado en una zona alejada de un centro de recursos, es decir, dentro de un intervalo de distancias del potencial virtual que corresponde a las regiones $K_h=-1$. Aquí la ecuación

generalizada de Langevin no posee término lineal en distancia sino uno de tipo $-1/r$ (newtoniano). Para este caso se pueden considerar básicamente dos tipos de comportamientos, uno que es estacionario y otro que es una transición de $K_h=-1$ a $K_h=2$.

En el primer caso ($K_h=-1$) las trayectorias medias son más largas, con menores probabilidades de capturar recursos; un grupo de soluciones estacionarias requiere aquí fricciones más bajas, o alternativamente mayor energía por recursos; además el carácter selectivo propio de la forma no lineal de la ecuación diferencial hace que las soluciones estacionarias dependan críticamente del juego de valores elegido para los parámetros del dispositivo y su excitación.

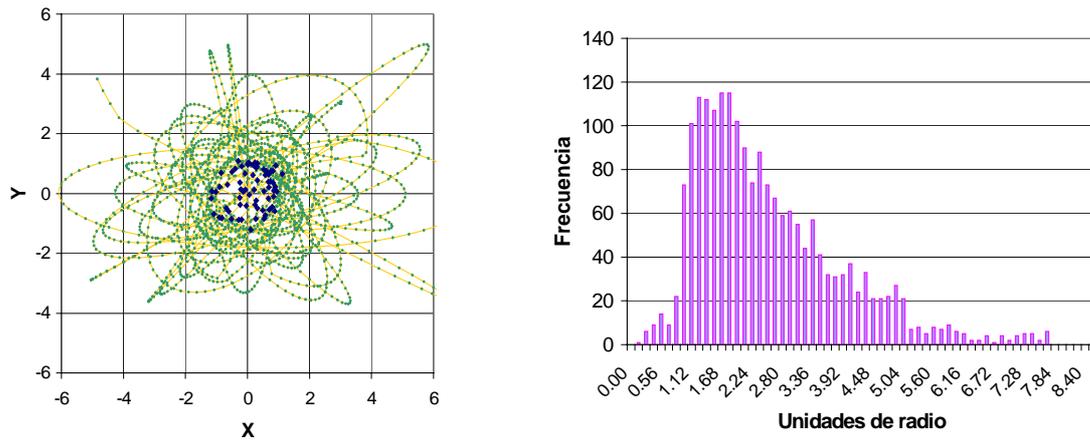


Fig.7- Trayectorias (izq.) y Distribución de Radios (der.) en regiones $K_h=-1$ con Masa =10; Fricción = 0.31415 y C. Atracción = 0.1. Los recursos están distribuidos uniformemente para radios menores o iguales a 1 ($\rho \sim 1/\pi$)

Aunque la simulación y análisis detallado de este caso excede el marco y espacio dado al presente trabajo, cabe apuntar, basados en simulaciones numéricas restringidas (fig. 7) y la lógica progresión conceptual a partir de la descripción realizada en regiones $K_h=2$, que las trayectorias estarán como antes confinadas mayormente a cierto radio medio, aunque con distribuciones espaciales compuestas de diversas anisotropías, en parte debido a un grado de libertad adicional (rotación estocástica), y en parte por la composición en grupos de soluciones k-modales similares a las vistas anteriormente.

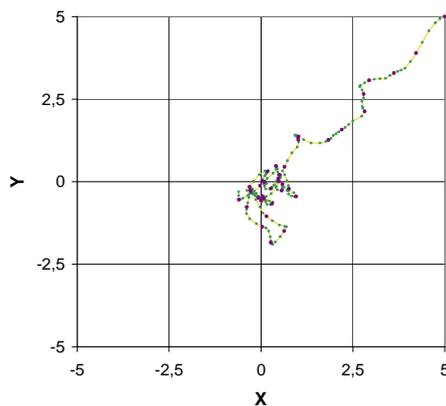


Fig. 8- Transición de $K_h=-1$ a $K_h=2$ comenzando desde [5,5]; los parámetros son los de Tabla 1 de la fig.3.

La segunda posibilidad (fig.8) se refiere a un bioautómata cuyos parámetros son inapropiados para mantener un comportamiento dinámico estacionario en la región $K_h=-1$, sino que, por el contrario, son adecuados para la región $K_h=2$. Aquí lo que ocurre es una transición más o menos rápida de la primera región a la segunda, pasando por la región $K_h=1$. Esto puede simularse con un bioautómata con parámetros que corresponden al caso $K_h=2$ de la fig. 3, y con un potencial virtual cambiando por secciones. Una vez que el

dispositivo alcanza la región parabólica, su comportamiento será nuevamente estacionario, según fuera descrito en el punto 3.

5 DISCUSION

En los puntos anteriores hemos descrito el movimiento del Bioautómata haciendo uso principalmente de los elementos que nos proporciona la teoría básica de los procesos estocásticos. En los mismos, sin embargo, se traslucen comportamientos que sugieren cierta *similitud con sistemas cuánticos estocásticos*, asociados principalmente al carácter discreto de la absorción de recursos, así como a que el movimiento adopta la forma de una secuencia aleatoria de pasos, más o menos confinados a un área de exploración.

Para profundizar algo sobre dicha similitud es necesario enfocar la dinámica del sistema bioautómata- medio desde las posibles transiciones de estados. En este sentido, aparte de los movimientos estacionarios ya vistos, pueden existir en el bioautómata desplazamientos forzados, que resultarían del *movimiento virtual de su centro de recursos*. Ello ocurriría, por ejemplo, cuando en una zona de ocupación originariamente densa hay una disminución del flujo de recursos; pueden concebirse aquí tanto una *deriva* como una *migración* del bioautómata. En efecto, si la disminución de la función de reserva potencial resulta en una estimación del centro de recursos algo más alejado del centro de la zona actual ($K_h=1$), los pequeños cambios de estado provocarían que el bioautómata tienda a “acompañar” el desplazamiento virtual del centro (deriva). Si en cambio, la disminución de recursos se agrava a punto tal que el centro estimado de recursos se manifiesta a una distancia virtual equivalente a una zona $K_h=-1$, resultaría una transición como la ejemplificada en el caso de la fig. 8 (migración).

Esto puede apreciarse alternativamente desde la ecuación de *Chapman-Kolmogorov*, que es una propiedad de las funciones de transición de los procesos de Markov. Suponiendo que $\mathbf{u}(t)$ es un proceso estocástico continuo, y $p(\mathbf{u},t;\mathbf{u}_0,t_0)$ es su función de densidad condicionada (o de transición) por $\mathbf{u}(t_0)=\mathbf{u}_0$ para $t \geq t_0$, se tiene para $t > t_1 > t_0$:

$$p(\mathbf{u},t;\mathbf{u}_0,t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{u},t;\mathbf{u}_1,t_1) p(\mathbf{u}_1,t_1;\mathbf{u}_0,t_0) d\mathbf{u}_1 \quad (37)$$

con $\int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{u},t;\mathbf{u}_0,t_0) d\mathbf{u} = 1$ y $p(\mathbf{u},t;\mathbf{u}_0,t_0) \rightarrow \delta(\mathbf{u}-\mathbf{u}_0)$ para $t \rightarrow t_0$. A partir de (37) y para $t > t_0$, es posible deducir (debido a Kolmogorov) las *ecuaciones progresiva y regresiva de difusión* para la densidad condicionada $p(\mathbf{u},t;\mathbf{u}_0,t_0)$, en donde la regresiva, la segunda ecuación en (38), resulta ser la ecuación de difusión de *Focker-Planck*:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t_0} + \dot{\eta}_u(\mathbf{u}_0,t_0) \cdot \frac{\partial p}{\partial \mathbf{u}_0} + \frac{1}{2} \dot{\sigma}_u^2(\mathbf{u}_0,t_0) \frac{\partial^2 p}{\partial \mathbf{u}_0^2} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} [\dot{\eta}_u(\mathbf{u},t)p] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{u}^2} [\dot{\sigma}_u^2(\mathbf{u},t)p] = 0 \end{cases} \quad (38)$$

con $\dot{\eta}_\mu(\mathbf{u}_0,t_0)$, $\dot{\sigma}_\mu(\mathbf{u}_0,t_0)$, $\dot{\eta}_\mu(\mathbf{u},t)$ y $\dot{\sigma}_\mu(\mathbf{u},t)$ representando las derivadas temporales de la media y varianza condicionadas del proceso $\mathbf{u}(t)$. En particular, para el bioautómata (38) se cumple no sólo para cada componente de velocidad, como en el movimiento browniano clásico, sino también para las componentes de las distancias recorridas.

Ya que un proceso de Markov (tiempos crecientes) lo es también en sentido inverso (tiempos decrecientes), la ecuación progresiva puede interpretarse, fijando el tiempo t y haciendo decrecer t_0 , como una *antidifusión*, o bien como la difusión de las trayectorias de una *antipartícula*, que representaría el movimiento virtual del centro de recursos.

Así, la interacción debe verse como un intercambio más o menos simétrico entre dos polos; si fijamos la posición en el bioautómata veremos un flujo incidente de recursos, pero si fijamos la posición en el centro de recursos veremos ahora un flujo incidente de “vacíos”, o en términos más generales de *residuos* (fig. 9); es decir intervienen en realidad cuatro

entidades: una partícula B equivalente al bioautómata, una antipartícula \bar{B} equivalente al medio próximo, un flujo discreto de recursos R y un flujo discreto de residuos \bar{R} .

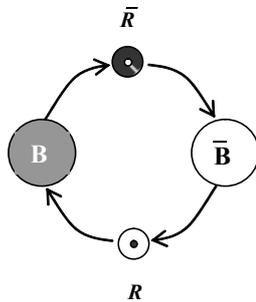


Fig. 9- Interacción Bioautómata-Medio como sistema cerrado.

En el caso estrictamente estacionario las ecuaciones (38) presentan una *simetría cerrada*, implicando que los recursos ingeridos y residuos producidos por el autómata son igualados a los recursos producidos y residuos procesados por el medio; en tanto que en deriva, (el bioautómata “acompaña estrechamente” al centro de recursos), hay una *simetría prácticamente cerrada* (régimen cuasi estacionario) ya que es posible referir las ec. (38) a un sistema de coordenadas móvil que reconduce al caso anterior. Finalmente, en una migración, la simetría definitivamente se rompe y las ec. (38) expresan dos flujos de trayectorias más o menos

independientes, uno para la partícula y otro para la antipartícula.

En virtud de lo anterior, el par de ecuaciones en (38), generalizadas para movimientos bidimensionales estacionarios o cuasi estacionarios (con medias y varianzas que no dependen de la posición absoluta), reflejan en alguna medida el *flujo esperado de recursos y residuos* para tiempos crecientes ($t > t_0$) desde el punto de vista de la partícula B:

$$\begin{cases} \dot{p} + \bar{\nabla} \cdot (\bar{v}_F p) + D \nabla^2 p = 0 \\ \dot{p} + \bar{\nabla} \cdot (\bar{v}_R p) - D \nabla^2 p = 0 \end{cases} \quad (39)$$

con $p = p(x,y,t;x_0,y_0,t_0)$ la probabilidad de transición bidimensional, \dot{p} su derivada parcial respecto del tiempo, \bar{v}_R una velocidad “regresiva”, \bar{v}_F una velocidad “progresiva” y D un coeficiente de difusión. Siguiendo ahora por ejemplo a E. Nelson (1966), sumamos y restamos miembro a miembro las ec. (39), con lo cual tenemos:

$$(a) \begin{cases} \dot{p} = -\bar{\nabla} \cdot (\bar{v}_0 p) \\ \bar{v}_0 = \frac{1}{2} (\bar{v}_F + \bar{v}_R) \end{cases} \quad b) \begin{cases} \bar{\nabla} \cdot (\bar{u}_0 p) = D \nabla^2 p \\ \bar{u}_0 = D (\bar{\nabla} p)/p = D \bar{\nabla} (\ln p) = \frac{1}{2} (\bar{v}_R - \bar{v}_F) \end{cases} \quad (40)$$

Como puede apreciarse las ec. (40.a) representan una conservación de la *corriente conjunta de probabilidad de recursos y residuos* donde \bar{v}_0 es velocidad característica de la interacción; asimismo la ec. (40.b) representa la *conservación del flujo neto de recursos y residuos*, en donde \bar{u}_0 es ahora una velocidad “osmótica”. Escribamos ahora el valor esperado $\langle H \rangle$ del hamiltoniano del sistema desde el bioautómata:

$$H = \langle H \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x;y) H(x;y) d(x;y) \quad (41)$$

con $H(x;y) = \text{energía cinética} + \text{energía del recurso} + \text{reserva} = \frac{1}{2} m v_0^2 + \xi m v_0^2 + U_b$

Si imponemos la condición de *irrotacionalidad* del campo vectorial $\bar{v}_0(x,y)$, habrá un potencial escalar $S(x,y)$ tal que:

$$\bar{v}_0 = - (1/m_0) \bar{\nabla} S \rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = (1/2 m_0) (\nabla S)^2 \quad (42)$$

de modo que :

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p \cdot \{ (1/2 m_0) (\nabla S)^2 + m_0 D^2 [\nabla (\ln p)]^2 + U_b \} d(x;y) \quad (43)$$

con $u_0^2 = \xi v_0^2 = D^2 [\nabla (\ln p)]^2$. En situación estacionaria se tiene además:

$$\partial H/\partial t = 0 \rightarrow \partial/\partial t \{ p \cdot [1/2 (1/m_0) (\nabla S)^2 + m_0 D^2 (\nabla(\ln p))^2 + U_b] \} = 0 \quad (44)$$

por lo que considerando las ec. (40.a) y (42) se debe cumplir que:

$$\begin{cases} \dot{p} = - (1/m_0) \bar{\nabla} \cdot (p \bar{\nabla} S) \\ \dot{S} + (1/2m_0) (\nabla S)^2 - m_0 D^2 [\nabla(\ln p)]^2 + U_b - 2 m_0 D^2 \bar{\nabla} \cdot [(\bar{\nabla} p) / p] = 0 \end{cases} \quad (45)$$

Definamos ahora dos campos ψ y su conjugada ψ^* asociados a la *densidad media normalizada de flujos* de recursos y residuos, tal que su producto refleje la probabilidad de transición:

$$\begin{aligned} \psi \psi^* &= p(x, y, t; x_0, y_0, t_0) \\ \text{con } \int_{-\infty}^{\infty} \psi \psi^* dx dy &= 1 \text{ y } \psi = p^{1/2} e^{-j S/\hbar} \end{aligned} \quad (46)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones dadas en (45) y (46), se satisface una ecuación general de ondas *similar a la ecuación de Schrödinger* con $\hbar^2 = 2m_0^2 D^2$:

$$j \hbar \partial \psi / \partial t = - (\hbar^2/2 m_0) \nabla^2 \psi + U_b \cdot \psi \quad (47)$$

y consecuentemente queda establecida la similitud cuántica del sistema bioautomata –medio.

Finalmente por (23) $p = \sum_k b_k p_k$, podemos incorporar la descomposición k-modal de ψ y ψ^* introduciendo juegos ortogonales de ondas o *grupos de funciones de onda* asociadas

$$\begin{cases} \psi = \sum_k B_k \psi_k(x, y, t; x_0, y_0, t_0) \\ \psi^* = \sum_k B_k \psi_k^*(x, y, t; x_0, y_0, t_0) \end{cases} \quad (48)$$

donde $B_k = b_k^{1/2}$ con b_k los coeficientes de Poisson. Las ec. (48) describen la configuración esperada de recursos y de residuos por intermedio de sus funciones de onda k-modales: las ψ_k asociadas al flujo entrante o incidente y las ψ_k^* asociadas al flujo saliente o reflejado, y así un *estado general mezclado* del bioautomata comparable a un *sistema cuántico estocástico*.

6 CONCLUSIONES

Hemos presentado hasta aquí un dispositivo de movimiento autónomo, y comportamiento estocástico, cuya fuente de energía proviene de la exploración, captura y bio-procesamiento de unidades discretas de recursos ambientales (bioautomatas), y que presentan dinámicas espacio-temporales con similitud cuántica.

Partiendo de la definición de una función potencial de reserva, que representa la distribución esperada de recursos, y que toma la forma de un pozo de potencial en la que pueden definirse las zonas clásicas de homogeneidad espacial de la mecánica, se obtiene una ecuación diferencial estocástica de Langevin generalizada, excitada por ruido granalla, que describe el movimiento y captura de recursos por parte del bioautomata.

Dicha ecuación diferencial ha sido analizada y simulada numéricamente por zonas, y sus resultados interpretados en el contexto de los procesos estocásticos clásicos así como también comparados con los procesos estocásticos cuánticos descritos por ecuaciones del tipo Langevin- Schrödinger.

Cabe preguntarse aquí, a modo de conclusión, cuál es el alcance de esta similitud cuántica y hasta qué punto puede ser extendida a organismos vivientes.

Una parte de la respuesta está en la propia comparación de bioautomata con tales sistemas cuánticos estocásticos (o también cuántico-disipativos), los que tienen en la física un gran interés en los últimos años (ver por ej. Caldeira A. O. and Leggett A. J., 1983; Bu S., 2006; Shao J., 2006), ya sea por su aplicación en tópicos experimentales modernos de óptica e

información cuántica, como también en la exploración teórica de la frontera con la mecánica clásica. En este último sentido, ha habido a lo largo de la historia muchas interpretaciones con respecto al significado de las ecuaciones de la Mecánica Cuántica, las que han ido conformando un amplio espectro de representaciones. En un extremo del mismo, y representando en alguna medida la creencia de la mayoría de los físicos, podría ubicarse a Bohr y Heisenberg (escuela de Copenhague), para los que la matemática involucrada es una cuestión más bien epistemológica, es decir de cómo se obtiene el conocimiento del mundo. En el otro extremo del espectro, y menos convencionales, están las interpretaciones ontológicas, que consideran la posibilidad que las ecuaciones reflejen efectivamente alguna realidad externa genuina.

El más conocido de estos acercamientos se debe a Bohm (1952), en el que, como en la física clásica, las ecuaciones describen partículas que se mueven en verdaderas trayectorias del espacio-tiempo. En general ésta es la postura de las teorías de “variables ocultas”, es decir las que asignan la naturaleza indeterminista subyacente a la influencia desconocida de ciertas variables no explícitas; la principal crítica a éstas, que surge del teorema de Bell (1964), es que son visiones del tipo “realista local”, incompatibles con la teoría cuántica.

En la física, el principio de localidad es que objetos distantes no pueden tener una influencia directa uno sobre otro sino a través de su entorno inmediato. El teorema de Bell, a menudo citado para demostrar que ninguna teoría cuántica puede satisfacer el principio de localidad, asume implícitamente que cada medición posible - incluso las aún no realizadas - lleva a un único resultado definido (*Counterfactual definiteness*- CFD). En realidad lo que el teorema de Bell prueba es que toda teoría cuántica debe violar o el CFD o el principio de localidad (Albert D. Z, 1994; Cramer John G. 1986). Así la ontología de Bohm es un caso particular, ya que es una teoría *no local* de variables ocultas, en la que las propiedades cuánticas, tales como el intrincamiento e interferencia, se incorporan a través de un potencial cuántico.

El CFD es una característica de la interpretación de Copenhague así como de la interpretación de variables ocultas de Bohm, pero no lo es de otras interpretaciones ontológicas tales como la de *las historias consistentes*, que permiten resolver las desigualdades de Bell sin la violación del principio de localidad. La aproximación por historias consistentes es una interpretación moderna, que generaliza la más convencional de Copenhague y a la vez proporciona una vía para la cosmología cuántica. Según esta interpretación, el propósito de una teoría mecánico-cuántica es predecir probabilidades de ocurrencia entre varias historias alternativas. El criterio de consistencia consiste en que la historia de un sistema pueda ser descrita en función de las probabilidades clásicas para cada historia alternativa, de una forma compatible (consistente) con la ecuación de Schrödinger. Un modelo reciente (Orda G.N., Mann R.B., 2003) demuestra que el movimiento estocástico por pasos de una partícula puntual puede asociarse a “trayectorias apareadas” que son además “auto cuantificadas”. El EPRW (Entwined Pair Random Walk) es un ejemplo constructivo de una "difusión reversible"; la conexión entre la difusión reversible y la ecuación de Schrödinger fue investigada primero por Fényes (1952) y Nelson (1966) y estudiada posteriormente por muchos autores. Es importante destacar que el EPRW substituye el concepto de *ensemble de trayectorias*, usualmente utilizado para proporcionar el propagador de una sola partícula, por una sola trayectoria, es decir la trayectoria apareada se toma como una entidad física coherente, constituyendo potencialmente una ontología en sí misma.

Debemos enfatizar aquí, sin tomar partido en la discusión relativa a la interpretación de fondo de la Mecánica Cuántica, que aunque ciertamente el bioautómata no es un sistema cuántico, sino un *sistema clásico con similitud cuántica*, dicha similitud está situada en todo caso muy cerca de estas últimas teorías. Ello está reafirmado en varios elementos tales como

en la propia ecuación generalizada de Langevin (3) que es equivalente a la propuesta primeramente por Magalinski en 1942 y luego seguida por otros autores como método general de análisis de los sistemas cuánticos disipativos (Hänggi P., Ingold G-L., 2005), o en conclusiones de estudios recientes tales como en Wang Q. A. (2005), que establece que existen relaciones de conmutación e incertidumbre en los procesos clásicos estocásticos análogas a las previstas por Heisenberg, y en otros como Faigle U., Schoenhuth A. (2006) que establece una clase general de modelos estocásticos con predicción cuántica (Quantum Predictor Models) de los cuales el bioautómata sería una subclase. También se sustenta en la propia derivación de la ec. asociada de Schrödinger, que aunque sigue un formalismo similar al de Fényes y E. Nelson (ver por ej. L. Smolin 2005), es relativamente directa en el contexto presentado y da naturalmente pie al equivalente del potencial cuántico de Bohm.

Tan cierto como que el bioautómata no es un sistema cuántico, lo es que tampoco representa un organismo vivo, aún el más sencillo, sino en una muy vaga y simplificada aproximación. No obstante, tomado restringidamente como componente básico de una población relativamente estacionaria, y descartando de antemano todo intento de descripción del ciclo vital y función reproductiva asociada de un ser real (entre muchas otras), no es difícil imaginar bioautómatas sometidos a *funcionales superiores de segunda especie*, con los cuales podrán manifestar entre sí interacciones con simetrías conjuntas complementarias o de exclusión, e incluso a *funcionales de tercera especie* con los cuales se debe maximizar la supervivencia colectiva. Más allá del interés propio que puede tener aquí trazar o no una analogía cuántica, su importancia radica principalmente en los efectos que tiene la extensión de los resultados anteriores al comportamiento de un *ensemble* de dispositivos, y desde allí, en una eventual extrapolación, a la dinámica poblacional de especies biológicas.

En este sentido, el hecho que el comportamiento estadístico de los bioautómatas pueda ser representado en la media por funciones de ondas, permite también vislumbrar soluciones estacionarias o cuasi-estacionarias en cuanto al comportamiento colectivo, que resultarían de la superposición de las funciones de ondas individuales; es por lo tanto posible que un ensemble de bioautómatas tienda a *una estructuración espacial en celdas cuasi –periódicas* más o menos fluctuantes, todo lo cual conduce a describir la dinámica en términos de ecuaciones de transporte en el marco de alguna *teoría de bandas apropiada*.

Así un *modelo equivalente básico* bien podría definirse en términos de un substrato virtual con dos bandas de energía: una banda poblacional y una banda de recursos, en las que sus pseudo partículas asociadas, el *habitante* y el *recursón*, representan respectivamente, en principio de manera antisimétrica, la población interactuante y su estructura espacio-ambiente. (Puliafito J., 2004; Puliafito J.L, 2006).

Debemos tener presente aquí que al describir la evolución dinámica espacio-temporal de poblaciones de individuos reales mediante ecuaciones de transporte, se sugiere, además de interacciones definidas de la especie o especies en cuestión con su espacio/ambiente, la eventual existencia de regiones de soluciones en el espacio de estado asociado más o menos estables similar a las bandas de energía en los materiales sólidos (multiestabilidad, ver Theraulaz G. et al, 2003), de forma que o bien hay apartamientos pequeños y fuerzas reactivas que tienden a restituir las relaciones dinámicas previas conservando la evolución dentro de una región (linealidad, elasticidad), o bien hay apartamientos grandes y transición entre regiones (no linealidad, plasticidad).

La experiencia demuestra que el comportamiento social y las estructuras espacio-temporales complejas y regulares, en general emergen en condiciones en la que la especie alcanza cierta densidad espacial crítica. Ello sugiere que un ecosistema no es la mera asociación de interacciones en un todo o una colección de elementos independientes fuertemente interactivos, sino una suma más o menos coherente de unidades elementales

conformadas por los individuos vivientes y su espacio-ambiente próximo, tomado éste último como una representación multidimensional de los recursos necesarios para su subsistencia, incluido el espacio físico en sí mismo.

En este contexto, en el que un ecosistema de alta densidad reconoce ciertas relaciones estadísticas viriales y una ocupación territorial altamente estructurada, adquiere algún sentido su comparación con una red elastoplástica, y permite entrever que su dinámica podría tratarse de una forma similar al estado sólido de la materia, es decir como transiciones de estados en *un sustrato virtual pseudo-cristalino*, sometidas a un principio general de exclusión.

REFERENCIAS

- Albert David Z, Bohm's Alternative to Quantum Mechanics- *Scientific American*- Mayo 1994
- Ball P., 1998- The self-made tapestry- *Oxford University Press*
- Bell J. S., (1964)- On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox- *Physics I*, 195 (1964).
- Bohm, David , 1952- A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden Variables" I- II - *Physical Review (I)* 84: 166-179. (II) 85: 180-193
- Bu, Shouliang 2006 -Quantum trajectory of an individual particle in the presence of chaos- *Physica D* 217 (2006) 103–106 - Elsevier doi:10.1016/j.physd.2006.03.016
- Cramer John G., 1986- The transactional interpretation of quantum mechanics- *Reviews of Modern Physics* Vol 58, #3 pp.647-687 -1986
- Caldeira A. O. and Leggett A. J.; 1983, Path integral approach to quantum brownian motion, *Physica A* 121, 587 (1983)- Elsevier doi: 10.1016/0378-4371(83)90013
- Faigle Ulrich, Schoenhuth Alexander, 2006 - Quantum Predictor Models - *Electronic Notes in Discrete Mathematics* 25 (2006) 149–155- Elsevier
- Fényes Imre, 1952- Eine wahrscheinlichkeitstheoretische Begründung und Interpretation der Quantenmechanik, - *Zeitschrift für Physik* 132 (1952) 81- 106.
- Gunter, B., Gonzalez, U., Morgado, E., 1992- Biological Similarity theories: a comparison with empirical allometric equation. *Biol. Res* 25 (7-13)
- Hänggi Peter and Ingold Gert-Ludwig, 2005- Fundamental aspects of quantum Brownian motion- *CHAOS* 15, 026105 (2005)
- Hemmingsen A.M, 1960- Energy Metabolism as related to body size and respiratory surfaces, and its evolution- *in Rep.Steno Mem. Hosp.* 9, 1960, pp 1-110
- Jeanson R, Blanco S, Fournier R, Deneubourg JL, Fourcassie V, Theraulaz G., 2003- A model of animal movements in a bounded space- *Journal of Theoretical Biology* 225, p. 443-451
- Kittel, C., 1995- Introducción a la Física del Estado Sólido – *Ed. Reverté España* (Introduction to Solid State Physic, *Sixth edition by John Wiley & Sons Inc.*)
- Klieber M., 1961 - The Fire of Life- *John Wiley & Sons Inc.* New York 1961
- Lebiedz D. and Brandt-Pollmann U., 2003- Manipulation of Self-Aggregation Patterns and Waves in a Reaction-Diffusion System by Optimal Boundary Control Strategies- *Phys. Rev. Lett.* 91, 208301 (2003) doi: 10.1103/PhysRevLett.91.208301
- Magalinski V. B., 1959- Dynamical model in the theory of the Brownian motion- *Sov. Phys. JETP* 9, 1381–1382 s1959d fJ. Exp. Theor. Phys. 36, 1942–1944 s1959dg;
- Meinhardt, H., 1982 -Models of biological pattern formation- *Academic Press, London 1982*
- Orda G.N., and Mann R.B., 2003 -Entwined pairs and Schrödinger's equation- *Annals of Physics* 308 (2003) 478–492 – Elsevier
- Nelson, E., 1966, -Derivation of the Schrödinger Equation from Newtonian Mechanics- *Physical Review* 150, 1079–1085

- Papoulis A. (1980) - Probabilidad, variables aleatorias y procesos estocásticos- *Ed. Universitaria de Barcelona*- Barcelona 1980
- Pascala, S; Levin, S. 1997- Biological Generated Spatial Pattern and the Coexistence of Competing Species- in D. Tilman, P. Kareiva (Eds.), *Spatial Ecology: The Role of Space in Population Dynamics and Interspecific Interactions* - *Princeton Univ. Press* pages 296-317.
- Popov V.L., Psakhie S.G., 2001- Theoretical principles of modeling elastoplastic media by movable cellular automata method. (I) - *Physical Mesomechanics*, 4 I 15-25
- Puliafito, José .L. 2004- La evolución urbana desde el punto de vista de un modelo espacio temporal: caso Gran Mendoza- *Mecánica Computacional Vol. XXIII* G.Buscaglia, E.Dari, O.Zamonsky (Eds.) Bariloche, Argentina, November 2004
- Puliafito, José Luis 2006- A transport model for the evolution of urban systems-*Applied Mathematical Modelling* 31 (2007) 2391–2411- Elsevier doi:10.1016/j.apm.2006.09.005
- Shao, Jiushu 2006- Stochastic description of quantum open systems: Formal solution and strong dissipation limit- *Chem. Physics* 322 (2006) 187–192- Elsevier doi:10.1016/j.chemphys.2005.08.007
- Smolin, Lee 2007- Could quantum mechanics be an approximation to another theory?- *arXiv:quant-ph/0609109v1*
- Theraulaz G., Gautrais J., Camazine S., Deneubourg J.L, 2003; The formation of spatial patterns in social insects: from simple behaviours to complex structures; *Phil. Trans. Royal Society*, A 361, p. 1263-82, 2003
- Tilman,D; Kareiva, P. 1997- *Spatial Ecology: The Role of Space in Population Dynamics and Interspecific Interactions*- *Princeton University Press*
- Wang Qiuping A., 2005- Non-quantum uncertainty relations of stochastic dynamics- *Chaos, Solitons and Fractals* 26 (2005) 1045–1052- Elsevier